II) GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1. : Quelle relation y a t-il entre les fonctions f et g (et h éventuellement) dans les cas suivants ? Indiquer celles qui sont égales et celles dont l'une est une restriction de l'autre (f est une restriction de g si $D_f \subset D_g$ et si pour tout x dans D_f, $f(x) = g(x)$).

   (a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{\sin x} \end{cases}$; $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan \dfrac{x}{2} \end{cases}$

   (b) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin 2x} \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x} \end{cases}$

   (c) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left|\sqrt{x-1} - 1\right| \end{cases}$

2. : Soit ω un irrationnel.

   (a) Montrer que $\cos x + \cos \omega x = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

   (b) Qu'en déduit-on pour la périodicité de la fonction $x \mapsto \cos x + \cos \omega x$?

3. : Sur les périodes communes à deux fonctions périodiques.

   (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ ayant une plus petite période T_0 strictement positive (autrement dit, toute période T de f strictement positive est supérieure ou égale à T_0). On sait que tout multiple entier de T_0 est une période, et on va s'intéresser à la réciproque de cette affirmation ; soit donc T une période de f et posons $\left\lfloor \dfrac{T}{T_0} \right\rfloor = k$, $a = T - kT_0$; quelles inégalités vérifient a ? Montrer que a est forcément nul et conclure.

   (b) * Soit une f_1 fonction de plus petite période $T_1 > 0$, et f_2 une fonction de plus petite période $T_2 > 0$; on demande de déterminer et de démontrer une CNS portant sur T_1 et T_2 pour que f_1 et f_2 possèdent une période commune.

IV) LIMITES

4. : Démontrer qu'une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

5. Limites de **FONCTIONS ALGÉBRIQUES**

   Déterminer la limite des expressions suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

   (a) $x \to 0$:

      i. $\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x}$

      ii. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$

      iii. $\dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$

      Rep : i. -1 ii. 2 iii. -1

   (b) $x \to +\infty$:

      i. $\sqrt{a+x} - \sqrt{x}$

      ii. $\sqrt{x^2+x} - x$

      iii. $\dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{x^2+1}}$

      iv. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

      Rep : i. 0 ii. 1/2 iii. 0 iv. 0

   (c) $x \to -\infty$:

      i. $\dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{x^2+1}}$

ii. $\sqrt{x^2+2x}+x$

Rep : i. 0 ii. -1.

(d) $x \to 4$: $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

(e) $x \to 0, 2, +\infty, -\infty$: $\dfrac{\sqrt{x^2+16}-\sqrt{4x^2+2x}}{x\,(x-2)}$

Rep : (d) $1/12$ (e) $\mp\infty, -7\sqrt{5}/20, 0, 0$.

6. Limites de **FONCTIONS ALGEBRIQUES EN** $\sin, \cos, \tan$:

Déterminer la limite des expressions suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

(a) $x \to 0$:

i. $\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ et $\dfrac{\tan ax}{\tan bx}$ $(b \neq 0)$

ii. $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

iii. $\dfrac{x^2}{\tan^2 x - 2\sin^3 x}$

iv. $\dfrac{\sin x - \tan x}{x - x\cos x}$

v. $\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

vi. $\dfrac{\sin x + \tan x}{\sqrt{9x^2+2x^3}}$

vii. $\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x}$

viii. $\dfrac{\cos x - \cos 2x + \sin 3x}{\sqrt{\cos x - \cos 2x}}$

ix. $\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

x. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

Rep : iii. 1 v. $2\sqrt{2}\text{signe}(x)$ vi. $2.\text{signe}(x)/3$ vii. $\sqrt{2}/3.\text{signe}(x)$ viii. $\sqrt{6}.\text{signe}(x)$ ix. 1 x. $\sqrt{2}/8$

(b) $x \to \dfrac{\pi}{2}$: $\tan x \sin 2x$

(c) $x \to a$: $\dfrac{\sin(x-a)}{\sin x - \sin a}$

(d) $x \to +\infty$: $x \sin \dfrac{\pi}{x}$

(e) $x \to +\infty$, θ fixé, puis $\theta \to 0$, x fixé : $\dfrac{\sin\theta}{x\sin\frac{\theta}{x}}$

Rep : (b) 2 (c) $1/\cos a$ (d) π (e)$\sin\theta/\theta, 1$.

7. : Définir le prolongement par continuité des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$