

A. PROPRIÉTÉS DE  $\mathbb{R}$ 

- Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $m \in \overline{\mathbb{R}}$  un réel ; montrer que  $m$  est la borne supérieure de  $A$  si et seulement si c'est un majorant de  $A$  qui est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .
- Soit  $A \subset B$  deux parties de  $\mathbb{R}$  ; on dit que  $A$  est dense dans  $B$  lorsque tout intervalle du type  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  avec  $x$  dans  $B$  et  $\varepsilon > 0$  contient au moins un élément de  $A$ .

- Montrer que  $A$  est dense dans  $B$  ssi tout élément de  $B$  est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .
- Montrer que si  $f$  est une fonction numérique continue sur  $B$  alors

$$A \text{ dense dans } B \implies f(A) \text{ dense dans } f(B)$$

- \* : Soit  $\omega$  un irrationnel  $> 0$  ; on souhaite démontrer que  $A = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} = \{p + q\omega / p, q \in \mathbb{Z}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
  - Soit  $a > 0$  un élément de  $A$  ; supposons qu'il n'existe aucun autre élément de  $A$  strictement compris entre 0 et  $a$ .
    - Soit  $x$  un autre élément de  $A$  et  $b = x - \left[\frac{x}{a}\right]a$  ; montrer que  $b$  ne peut qu'être nul et que donc  $\frac{x}{a}$  est entier.
    - En faisant successivement  $x = 1$  et  $x = \omega$ , aboutir à une contradiction.
  - En déduire qu'il existe une suite  $(a_n)$  strictement décroissante et positive d'éléments de  $A$ .
  - En utilisant  $a_{n-1} - a_n$ , montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe toujours un élément de  $A$  strictement compris entre 0 et  $\varepsilon$ .
  - Conclure.

## B. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

$$4. : \text{ Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{cases}$$

Tracer  $\mathcal{C}_f$  (remarquer qu'elle est formée de portions d'hyperboles).

Vérifier que  $f$  est injective sur  $\mathbb{R}$ , et définir la fonction  $f^{-1}$ , réciproque de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , avec une seule formule.

- Quelle relation y a-t-il entre les fonctions  $f$  et  $g$  (et  $h$  éventuellement) dans les cas suivants ? Indiquer celles qui sont égales et celles dont l'une est une restriction de l'autre.

$$(a) \quad x \xrightarrow{f} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \text{ et } x \xrightarrow{g} \frac{1 - \cos x}{\sin x} ; x \xrightarrow{h} \tan \frac{x}{2}$$

$$(b) \quad x \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2x} \text{ et } x \xrightarrow{g} \sqrt{\sin x} \sqrt{\cos x}$$

$$(c) \quad x \xrightarrow{f} \arcsin(x-1) + \arcsin(x+1) \text{ et } x \xrightarrow{g} \sqrt{x} + \sqrt{-x}$$

$$(d) \quad x \xrightarrow{f} ([x] + x)(x - [x]) + ([x] - 1)([x] + 1) \text{ et } u \xrightarrow{g} (u-1)(u+1)$$

$$(e) \quad x \xrightarrow{f} \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \text{ et } x \xrightarrow{g} |\sqrt{x-1} - 1|$$

- Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  mais que ce n'en est pas un sous-anneau.

- Soit  $\omega$  un irrationnel.
  - Montrer que  $\cos x + \cos \omega x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ .
  - Qu'en déduit-on pour la périodicité de la fonction  $x \mapsto \cos x + \cos \omega x$  ?

- \* : Sommes de fonctions périodiques ; généralisation de 7.

- On considère deux applications  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continues, non constantes, mais périodiques de périodes respectives  $T_1$  et  $T_2$  dont le rapport est irrationnel ; montrer que  $f + g$  n'est pas périodique.

Indication : supposer  $f + g$  périodique de période  $T > 0$  et considérer  $h$  définie par  $h(x) = f(x + T) - f(x)$ , puis utiliser le fait (à justifier) que  $T_1\mathbb{Z} + T_2\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  pour montrer que  $h$  est nulle.

9. : Ayant tracé la courbe de  $f$  et celle de  $g$  dans un même repère, donner une méthode pour construire points par points celle de  $g \circ f$  ; appliquer au tracé de  $y = e^{-x^2}$ .

### C. LIMITES-ÉQUIVALENTS

10. : Démontrer qu'une fonction périodique sur  $\mathbb{R}$  non constante n'admet pas de limite en  $+\infty$ .
11. : Soient  $f$  une fonction numérique définies et strictement positives sur  $\mathbb{R}_+$  ; Montrer que lorsque  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= o(x) \Leftrightarrow \forall \lambda > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x > A \quad f(x) \leq \lambda x \\ f(x) &= O(x) \Leftrightarrow \exists \lambda > 1 \quad \forall x \geq 0 \quad f(x) \leq \lambda x \\ f(x) &\sim x \Leftrightarrow \forall \lambda > 1 \quad \forall \mu \in ]0, 1[ \quad \mu x \leq f(x) \leq \lambda x \end{aligned}$$

Représenter ces conditions par un dessin.

### 12. Limites de FONCTIONS ALGÈBRIQUES

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes, et en déduire la limite. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

Rappels :

- a) si  $\alpha < \beta$ ,  $x^\alpha = o(x^\beta)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et  $x^\beta = o(x^\alpha)$  quand  $x \rightarrow 0$   
 b)  $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)$  quand  $u \rightarrow 0$

(a)  $x \rightarrow 0$  :

- i.  $\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$
- ii.  $\frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$
- iii.  $\frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$
- iv.  $\frac{\sqrt{4-2x} - \sqrt[3]{8+3x}}{x}$
- v.  $\frac{\sqrt[3]{x^3+8x} - \sqrt[3]{x^3+x}}{\sqrt[3]{8x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+x}}$
- vi.  $\frac{\sqrt[3]{8x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}$

Rep : i.  $-1$  ii.  $2$  iii.  $-1$  iv.  $-(3/4)$  v.  $\sqrt[3]{x}$  vi.  $(7/3)x^2\sqrt[3]{x}$ .

(b)  $x \rightarrow +\infty$  :

- i.  $\sqrt{a+x} - \sqrt{x}$
- ii.  $\sqrt{x^2+x} - x$
- iii.  $\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{x^2+1}}$
- iv.  $\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$
- v.  $\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}$

Rep : i.  $a/(2\sqrt{x})$  ii.  $1/2$  iii.  $-1/(2x^3)$  iv.  $1/(2\sqrt{x})$  v.  $3/(4\sqrt[12]{x})$

(c)  $x \rightarrow -\infty$  :

- i.  $\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{x^2+1}}$
  - ii.  $\sqrt{x^2+2x} + x$
- Rep : i.  $2/x$  ii.  $-1$ .

(d)  $x \rightarrow 4$  :  $\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

(e)  $x \rightarrow 1$  :  $\frac{1 - \sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}}{1 - \sqrt{2 - \sqrt{\frac{1}{3-2x}}}}$

(f)  $x \rightarrow 8 : \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+19} - 3}$

(g)  $x \rightarrow 0, 2, +\infty, -\infty : \frac{\sqrt{x^2+16} - \sqrt{4x^2+2x}}{x(x-2)}$

Rep : (d) 1/12 (e) -3/2 (f) 9/4 (g)  $-2/x, -7\sqrt{5}/20, -1/x, 1/x$ .13. limites de **FONCTIONS ALGÈBRIQUES EN** sin, cos, tan :

Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

Rappels :  $\sin u \sim \tan u \sim u$  quand  $u \rightarrow 0$  ;  $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$  quand  $u \rightarrow 0$ .

(a)  $x \rightarrow 0$  :

i.  $\frac{\sin ax}{\sin bx}$  et  $\frac{\tan ax}{\tan bx}$  ( $b \neq 0$ )

ii.  $\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

iii.  $\frac{x^2}{\tan^2 x - 2 \sin^3 x}$

iv.  $\frac{\sin x - \tan x}{x - x \cos x}$

v.  $\frac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

vi.  $\frac{\sin x + \tan x}{\sqrt{9x^2 + 2x^3}}$

vii.  $\frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 3x}$

viii.  $\frac{\cos x - \cos 2x + \sin 3x}{\sqrt{\cos x - \cos 2x}}$

ix.  $\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$

x.  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

xi.  $\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{\tan^2 \frac{x}{2}}$

xii.  $1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}$

Rep : iii. 1 v.  $2\sqrt{2}\text{signe}(x)$  vi.  $2.\text{signe}(x)/3$  vii.  $\sqrt{2}/3.\text{signe}(x)$  viii.  $\sqrt{6}.\text{signe}(x)$  ix. 1 x.  $\sqrt{2}/8$  xi.  $2/x$  xii.  $3x^2/2$ 

(b)  $x \rightarrow \frac{\pi}{2} : \tan x \sin 2x$

(c)  $x \rightarrow \frac{\pi}{3} : \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$

(d)  $x \rightarrow \frac{2\pi}{3} : \frac{\cos(x - \frac{\pi}{3}) - \sin \frac{x}{4}}{\tan 3x}$

(e)  $x \rightarrow \text{????} : \frac{\sqrt{3} \tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{3}}$

(f)  $x \rightarrow a : \frac{\sin(x-a)}{\sin x - \sin a}$

(g)  $x \rightarrow +\infty : x \sin \frac{\pi}{x}$

(h)  $x \rightarrow +\infty, \theta$  fixé, puis  $\theta \rightarrow 0, x$  fixé :  $\frac{\sin \theta}{x \sin \frac{\theta}{x}}$

Rep : (b) 2 (c)  $-\sqrt{3}$  (d)  $-5\sqrt{3}/24$  (e)  $-4\sqrt{3}/3$  (f)  $1/\cos a$  (g)  $\pi$  (h)  $\sin \theta / \theta, 1$ .

14. FONCTIONS ALGÈBRIQUES EN  $\ln$  :

Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand  $x \xrightarrow{>} 0$  et quand  $x \rightarrow +\infty$  :

Rappels :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a+b) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

lorsque  $u \rightarrow +\infty$  et  $\alpha > 0$  :  $\ln u = o(u^\alpha)$

$$\text{lorsque } u \rightarrow 0 \text{ et } \alpha > 0 : \ln u = o\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)$$

lorsque  $u \rightarrow 0$   $\ln(1+u) = u + o(u) \sim u$

(a)  $x^n \ln x$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(b)  $\frac{\ln x}{x^n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(c)  $x \ln(x^2)$

(d)  $\ln x - x^n$

(e)  $\ln x + \frac{1}{x^n}$

(f)  $\frac{(\ln x)^{100}}{\sqrt{x}}$

(g)  $(\ln x)^{100} - \sqrt{x}$

(h)  $x \ln(x+1) - \sqrt{x}$

(i)  $\frac{\sqrt{x+1} - \ln(x+1)}{3\sqrt{x}}$

(j)  $\frac{\ln(ax)}{\ln(bx)}$  ( $a, b > 0$ )

15. : Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand  $x \rightarrow 0$  :

(a)  $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$

(b)  $\frac{\ln(1+x)}{x^2+x}$

(c)  $\frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$

16. Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand  $x \rightarrow +\infty$  :

(a)  $\ln(3x^2 + 4x - 5) - \ln(6x + 1)$

(b)  $\ln(x^2 - 4) - \ln(x^2 + 1)$

(c)  $\frac{\ln(x+1) - \ln x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

(d)  $\frac{x \ln x - (x-t) \ln(x-t)}{x}$

Rep : (a)  $\ln x$  (b)  $-\frac{5}{x^2}$  (c)  $2/\sqrt{x}$

17. Déterminer la limite de  $\frac{x \ln x - (x-t) \ln|x-t| - t \ln t}{x-t}$  quand  $x \rightarrow t > 0$ 18. : FONCTIONS ALGÈBRIQUES EN  $\exp$ 

Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand  $x \rightarrow \pm\infty$  :

(a)  $\frac{e^x}{x^{100}}$

- (b)  $\sqrt{|x|}e^x$
- (c)  $\frac{e\sqrt{|x|}}{x}$
- (d)  $e^x - x^{100}$
- (e)  $e^x - \frac{1}{x^{1000}}$
- (f)  $e^{-x} + x^2$
- (g)  $e^{\ln|x|} - x$
- (h)  $e\sqrt{|x|} - x$
- (i)  $e^{2x} - e^x$
- (j)  $\frac{e^{2x} - e^x}{x^{100}}$
- (k)  $e^{3x} - e^{2x} - e^x$
- (l)  $e^{2x} - x^{100}e^x$

19. : Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand  $x \rightarrow 0$  :

- (a)  $\frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}$
- (b)  $\frac{e^{4x^2} - 1}{x^2 - 4x}$
- (c)  $\frac{e^{x+1} - 1}{x^2 - x}$
- (d)  $\frac{e^{x+1} - e}{x}$
- (e)  $\frac{e^{\ln(x+1)} - 1}{2x}$

Rep : (a)1 (b) $-x$  (c) $\frac{e-1}{-x}$  (d) $e$  (e)  $1/2$

20. : Déterminer un équivalent simple puis la limite des expressions suivantes quand  $x \rightarrow +\infty$  :

- (a)  $x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$
- (b)  $x \left( e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right)$
- (c)  $x \left( e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}} \right)$

### 21. : FONCTIONS PUISSANCES

la forme indéterminée " $1^\infty$ " ; déterminer la limite quand  $x \rightarrow +\infty$  des expressions suivantes :

Rappel :  $a^b = e^{b \ln a}$

- (a)  $\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$
- (b)  $\left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x$
- (c)  $\left( 1 + \frac{a}{x} \right)^{bx}$
- (d)  $\left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{3x-2}$
- (e)  $\left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$

(f)  $\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^x$

(g)  $\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

(h)  $\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$

(i)  $\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$

22. : Trouver des fonctions  $a$  et  $b$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 0$  et telles que :

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a(x))^{b(x)} \in ]0, 1[$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a(x))^{b(x)} = 0$

Retenez donc que la forme indéterminée " $0^0$ " n'est pas toujours égale à 1...

23. : MISCELLANÉES ...

Déterminer un équivalent simple puis la limite de chacune des expressions suivantes :

(a)  $\tan x \ln x$  pour  $x \rightarrow 0$

(b)  $\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$  pour  $x \rightarrow 0$

(c)  $(\ln(1+x))^x$  pour  $x \rightarrow 0$

(d)  $\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$  pour  $x \rightarrow 0$

(e)  $\frac{\ln \cos x}{x^2}$  pour  $x \rightarrow 0$

(f)  $(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$  pour  $x \rightarrow 0$

(g)  $(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$  pour  $x \rightarrow 0$

(h)  $(1 + \tan^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$  pour  $x \rightarrow 0$

(i)  $\frac{1}{x} \ln \frac{\sin a}{\sin(a-x)}$  pour  $x \rightarrow 0$

(j)  $\frac{\ln x^n - \ln x_0^n}{\sin x - \sin x_0}$  pour  $x \rightarrow x_0$

(k)  $\frac{\ln \tan x}{\ln \tan 3x}$  pour  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

(l)  $\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$  pour  $x \rightarrow 0$  et  $x \rightarrow 1$ .

24. : La croissance des montagnes.

On considère un triangle isocèle  $ABC$  de base  $AB = 2a$ , de côté  $AC = BC = l$  fixé et de hauteur  $h$ ; on pose  $x = l - a$ ; calculer  $h$  pour  $l = 1\text{m}$  et  $x = 1\text{mm}$ ; montrer que lorsque  $x \rightarrow 0$ , la hauteur  $h$  équivaut à  $\sqrt{2lx}$  et que donc  $h \gg x$ , (alors qu'à priori on pense que  $h$  et  $x$  sont du même ordre); expliquer à l'aide de ce résultat la hauteur des montagnes.

25. \* : Un rail fixé en ses deux extrémités, de longueur  $2l$  se dilate d'une longueur  $2x$  en prenant la forme d'un arc de cercle, de flèche  $h$ , de rayon  $R$  et d'angle au centre  $2\alpha$ .

(a) Montrer successivement :  $h = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ;  $R = \frac{l+x}{\alpha} = \frac{l}{\sin \alpha}$ ;  $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{l}{l+x}$ ;  $h = l \tan \frac{\alpha}{2}$ .

(b) Déterminer une valeur approchée de  $h$  à l'aide de la fonction solve de la calculatrice pour  $2l = 500\text{ m}$  et  $x = 1\text{ cm}$ .

(c) Démontrer que lorsque  $x \rightarrow 0$ ,  $h \sim \frac{\alpha}{2}l \sim \sqrt{\frac{3}{2}lx}$ ; on utilisera le développement  $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + o(\alpha^3)$ .

Comparer la valeur approchée du (b) avec la valeur approchée obtenue en utilisant cet équivalent. Comparer aussi les résultats des exercices 23 et 24.

26. : La portée d'un promontoire d'altitude  $h$  est la longueur  $L$  indiquée sur la figure 2 :

(a) Montrer que  $L \sim L' \sim \sqrt{2Rh}$  quand  $h \rightarrow 0$ .

(b) Quelle longueur vaut exactement  $\sqrt{2Rh}$  sur la figure ?

(c) Avec  $R \simeq 6371\text{ km}$ , justifier la formule approchée :  $L \simeq 3,56\sqrt{h}$  avec  $h$  en mètres et  $L$  en kilomètres.

(d) Quelle est la portée du Mont-Blanc ? ( $h = 4811\text{ m}$ )

(e) A quelle distance perd-on de vue une planche à voile (hauteur 4 mètres), les yeux étant situés à 1,70 m du sol ?

27. Une fève circulaire de rayon  $r$  est placée dans une galette circulaire à une distance  $d$  du centre ( $r \leq d$ ).

(a) Déterminer la probabilité  $p$  qu'un coup de couteau rectiligne passant par le centre rencontre la fève. (A.N. :  $r = 1\text{cm}, d = 10\text{cm}$ ).

(b) Déterminer un équivalent de  $p$  quand  $r$  tend vers 0 ( $d$  fixé).

(c) Déterminer un équivalent de  $1 - p$  quand  $d$  tend vers  $r$  (penser à la formule  $\arctan \frac{1}{x} = \dots$ ).