I: INITIATION AU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

1. : Convertir en langage formalisé ; donner la négation, en français et en langage formalisé ; puis démontrer ou infirmer l'énoncé (sauf (a) et (d)) ; on pourra noter $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

   (a) Tout entier naturel est somme de 4 carrés.
   (b) Tout nombre premier $\geqslant 3$ est du type $4n-1$ ou $4n+1$.
   (c) Tout entier naturel du type $4n-1$ est premier.
   (d) a est un multiple de b (a et b sont deux entiers donnés).
   (e) Tout multiple de 4 et 6 est multiple de 24.
   (f) Tout nombre complexe possède une racine $n^{ième}$, quel que soit l'entier $n > 0$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique ; écrire en langage formalisé :

a. u_n est toujours nul	a$'$. u_n est toujours non nul
b. u_n est nul à partir d'un certain rang	b$'$. u_n est non nul à partir d'un certain rang
c. u_n est nul une infinité de fois	c$'$. u_n est non nul une infinité de fois
d. u_n est nul au moins une fois	d$'$. u_n est non nul au moins une fois

   Négations de ces énoncés ? Y-a-t-il des implications entre eux ?

3. : Soient a et b deux réels et c un réel $> a+b$; montrer qu'il existe $a' > a$ et $b' > b$ tels que $c = a' + b'$.

4. :

   (a) Démontrer que l'opposé et l'inverse d'un irrationnel sont des irrationnels
   (b) Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
   (c) Que dire :
      i. du produit d'un rationnel non nul par un irrationnel ?
      ii. de la somme de deux irrationnels positifs ?

5. : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est-il rationnel ?

6. : $\log 2$ est-il rationnel ?

7. *: Montrer que si n et m sont deux entiers naturel dont l'un n'est pas un carré, $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ est irrationnel.
   Indication : calculer $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$.

8. : Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires ssi

$$\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\qquad/\quad \alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$$

   Soit l'énoncé :$\exists\lambda\in\mathbb{R}\quad \overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{v}$. Montrer qu'il ne s'agit pas d'une condition nécessaire et suffisante de colinéarité et le modifier pour qu'il en soit une.

9. : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace. On sait que $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$ et que $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ ssi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
   Que signifie l'énoncé : $((\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$?

10. : Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) dans le plan, défini par :

   (a) $xy\,(|x|+|y|-1)=0$
   (b) $\left(x^2-y^2\right)(|x|-|y|-1)=0$
   (c) $|x|+|y|\neq 1 \Rightarrow xy=0$.

11. : Démontrer que si n nombres réels ($n\geqslant 2$) ont une somme non nulle, alors pour tout entier p tel que $2\leqslant p\leqslant n$, il existe p de ces termes dont la somme est non nulle.

12. * : Un coffre-fort est muni de n serrures différentes et ne s'ouvre que si ces n serrures sont ouvertes à la fois. On considère 5 personnes A, B, C, D, E ; on demande de choisir l'entier n le plus petit possible et de distribuer des clefs à ces 5 personnes (on dispose de chaque clef en autant d'exemplaires que l'on veut) pour que le coffre-fort ne puisse être ouvert que par A et B ensemble, ou bien par A, C, D ensemble, ou bien par B, D, E ensemble.

13. * : Si P est un énoncé, on pose $V(P) = 1$ si P est vraie, et $V(P) = 0$ si P est fausse.

    (a) Déterminer en fonction de $p = V(P)$ et de $q = V(Q)$: $V(\text{non } P)$ et $V(P \text{ et } Q)$.

    (b) En déduire par le calcul : $V(P \text{ ou } Q)$ (ou inclusif), $V(P \Rightarrow Q)$, $V(P \Leftrightarrow Q)$, $V(\text{soit } P \text{ soit } Q)$ (ou exclusif) sous la forme la plus simple.

14. * : Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur n pour que l'ensemble $[|1, n|]$ puisse être partagé en deux sous-ensembles de même somme.

15. * : On dit qu'un point M du plan "se projette" sur un segment $[AB]$ s'il existe un point H du segment $[AB]$ avec $[MH]$ perpendiculaire à $[AB]$.

    On considère un polygone convexe. Les énoncé suivants sont-ils vrais ou faux ?

    (a) Tout point intérieur au polygone se projette sur un côté au moins.

    (b) Il y a au moins un point intérieur au polygone qui se projette sur tous les côtés.

    (c) Tout côté est le projeté d'au moins un point intérieur au polygone.