MATRICES

1. : Calculer si c'est possible :

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}^2$; $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}^2$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Soient $A, B; C$ trois matrices de formats respectifs, $(n,p),(p,q),(q,r)$; on veut effectuer le produit ABC.

   (a) Combien de multiplications effectuera-t-on si l'on calcule $(AB)C$? Et si l'on calcule $A(BC)$?

   (b) Pour calculer $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, que choisit-on ?

3. :

   (a) Une matrice carrée A est dite triangulaire supérieure lorsque :

   $$i > j \Rightarrow A(i,j) = 0.$$

   Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de même ordre est encore une matrice triangulaire supérieure, et déterminer les termes diagonaux de ce produit. Que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{T}_n(K)$ des matrices triangulaires supérieures ? Quelle est sa dimension ?

   (b) Même question pour les matrices triangulaires inférieures.

4. :

   (a) Calculer $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$ pour n entier $\geqslant 1$.

   (b) Où est l'erreur dans le calcul suivant ?

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

   donc $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n + n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & n-1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & n \\ n & n^2-n+1 \end{bmatrix}}$$

5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent.

   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ A et B^k commutent. En déduire que tout polynôme en A commute avec tout polynôme en B.

   (b) Montrer que si B est inversible, A et B^{-1} commutent.

   (c) Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; déterminer une matrice B qui commute avec A et qui n'est pas un polynôme en A.

6. : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; on demande de déterminer une matrice carrée telle que le produit (à gauche ou à droite, c'est à vous de le déterminer) de cette matrice avec A ait pour résultat d'

   (a) échanger les lignes k et l de A.

(b) échanger les colonnes k et l de A.

(c) ajouter à la ligne k de A le produit par λ de la ligne l.

(d) ajouter à la colonne k de A le produit par λ de la colonne l.

7. :

(a) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. A quelle condition les produits AB et BA sont-ils possibles tous les deux ? Quelle est alors le format des deux matrices AB et BA ?

(b) Vérifier que le produit A^tA est toujours possible, et donner la particularité de cette matrice produit. Quelle particularité supplémentaire a la diagonale de A^tA, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

8. :

(a) Soit X une matrice colonne $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^tXX$ (qui est un élément de $\mathbb{K}$) est non nul ; calculer le carré de la matrice $P = \dfrac{1}{{}^tXX}X^tX$.

(b) En déduire le carré de la matrice $S = 2P - I_n$.

(c) Montrer que si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$X^tX = Y^tY \Leftrightarrow Y = \pm X$$

9. : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices symétriques.

(a) Donner un exemple où AB n'est pas symétrique.

(b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B (ne faisant pas intervenir de transposition), pour que le produit AB soit encore symétrique.

(c) Que dire de $AB + BA$ et $AB - BA$?

(d) Les puissances successives de A sont elles symétriques ?

(e) Si A est inversible, A^{-1} est elle symétrique ?

10. : Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \; ;$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad ; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}) \quad ;$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Rep : $A^{-1} = 2\begin{bmatrix} 4 & -12 & 10 \\ -15 & 60 & -60 \\ 12 & -54 & 60 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \dfrac{1}{3}\overline{B}$.

11. Déterminer l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ en écrivant $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sans écrire aucun calcul intermédiaire.

Idem pour $\begin{bmatrix} 1 & a & d & f \\ 0 & 1 & b & e \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (n'appliquer cette méthode que pour les matrices triangulaires !).

12. * : Soit $A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,n}(\mathbb{K})$

   (a) Définir $A_n(i,j)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
   (b) Calculer par récurrence $A_n A_{n-1} ... A_1$.
   (c) Calculer $[1\,1 \cdots 1]\, A_n$.
   (d) En calculant $[1\,1 \cdots 1]\, A_n A_{n-1} ... A_1$ de deux façons différentes, retrouver une première relation classique entre coefficients binomiaux.
   (e) Calculer ${}^tA_1 ... {}^tA_n A_n ... A_1$ de deux façons différentes, et retrouver une deuxième relation classique entre coefficients binomiaux.

13. : Soit $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de projecteur ($E^2 = E$) différente de I_n ; on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme EAE avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;

   (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable pour la multiplication et possédant un élément neutre pour la multiplication (c'est donc un anneau), mais que ce n'est pas un sous-anneau de de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec la définition donnée dans le cours.
   (b) Déterminer $\mathcal{A}$ pour $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14. : Soit G l'ensemble des matrices du type : $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $a \in \mathbb{K}$.

   (a) Montrer que $(G, \times)$ est un groupe isomorphe à un groupe connu.

   (b) En déduire A^n $(n \in \mathbb{Z})$.

15. : les complexes et les quaternions vus comme des matrices.

   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.
   (b) * : Le corps des quaternions.
   Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on pose $Q(a,b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$
      i. Montrer que $Q(a,b) + Q(c,d)$ et $Q(a,b)Q(c,d)$ sont encore de la forme $Q(u,v)$.
      ii. Montrer que si $(a,b) \neq (0,0)$, $Q(a,b)$ est inversible et que $Q(a,b)^{-1}$ est encore de la forme $Q(u,v)$.
      iii. L'ensemble des *quaternions* est $\mathbb{H} = \{Q(a,b) \;/\; a, b \in \mathbb{C}\}$ ($\mathbb{H}$ est l'initiale de Hamilton, qui a découvert cet ensemble) ; montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que c'est même un corps contenant comme sous-corps le corps isomorphe à $\mathbb{C}$ du a).
      iv. Montrer que $\mathbb{H}$ est aussi un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; en donner une $\mathbb{R}-$base de la forme (I_2, J, K, L).
      v. Montrer que les éléments de la $\mathbb{R}-$base, et leurs opposés forment un groupe à huit éléments pour la multiplication qui n'est pas isomorphe au groupe cyclique à 8 éléments ; c'est le *groupe quaternionique*.

16. : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée nilpotente ; c'est-à-dire : $\exists m \in \mathbb{N} \quad A^{m+1} = 0_n$.
On pose : $e^A = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ avec la convention $A^0 = I_n$ (remarquer que cette somme n'est qu'en apparence infinie, puisque $A^k = 0_n$ pour $k \geqslant m+1$.)

(a) Calculer e^{0_n} et $e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$.

(b) On suppose que A et B sont nilpotentes et **commutent** ; démontrer que $e^{A+B} = e^A e^B$.

(c) En déduire que e^A est inversible. Quelle est son inverse ?

17. : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle :

$$i \geqslant j \Rightarrow A(i,j) = 0.$$

(a) Montrer que $A^n = 0_n$ (on pourra raisonner en termes d'endomorphismes).

(b) Montrer qu'on a le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures à diagonale nulle .

Remarque : ces résultats sont à retenir, ils sont souvent utiles.

18. :

(a) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que A est non inversible si et seulement s'il existe $X \neq O_{n,1}$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = O_{n,1}$.

(b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i. Montrer en utilisant (a) que B non inversible, implique AB non inversible.

ii. En déduire que A non inversible, implique AB non inversible.

iii. En déduire qu'un produit de matrices carrées est inversible si et seulement si les facteurs du produit sont inversibles. (Remarque : ceci pouvait aussi se déduire de l'exercice 22 sur les applications linéaires).

(c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

(d) On suppose que $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $ABC = I_n$. Déterminer l'inverse de B en fonction de A et C.

(e) * Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_2$. A-t-on nécessairement $AB = I_3$? Donner un exemple.

19. : Matrices simplifiables et matrices inversibles.

(a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible est simplifiable (ou régulière).

(b) Considérons maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible. Montrer en utilisant le résultat de 18. (a) qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = O_n$; en déduire que A n'est pas simplifiable.

(c) Que conclut-on de (a) et (b) ?

20. : Même thème, par une autre méthode ; pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on considère l'application f_A (resp g_A) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même qui à X fait correspondre AX (resp. XA).

(a) Montrer A simplifiable ssi f_A et g_A injectives.

(b) Montrer A inversible ssi f_A et g_A surjectives (cf exercice 4. sur les lois de composition)

(c) En déduire A simplifiable ssi A inversible.

21. * : Soient f et g deux endomorphismes d'un espace de dimension finie n.

Montrer que $f \circ g = 0$ et $f + g$ bijective ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f une matrice formée d'une matrice inversible d'ordre r bordée de zéros à droite et en dessous et g a une matrice formée d'une matrice inversible d'ordre $n - r$ bordée de zéros au-dessus et à gauche.

22. : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$;

(a) Montrer que A^p est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que si β est non nul, A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n.

(c) Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geqslant 2$. Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

(d) Application 2 : montrer que si $n = 2$, pour toute matrice A, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2, et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant (b).

23. : (généralisation de l'exercice précédent).
Soit A une matrice carrée d'ordre n ; on suppose que A^q $(q \geqslant 1)$ est une combinaison linéaire de $A^{q-1}, A^{q-2}...$ et I_n : $A^q = \alpha_{q-1}A^{q-1} + ... + \alpha_0 I_n$;

(a) Montrer que A^p est également une combinaison linéaire de $A^{q-1}, A^{q-2}...$ et I_n pour tout $p \geqslant q$.

(b) Montrer que si α_0 est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de $A^{q-1}, A^{q-2}...$ et I_n.

(c) Montrer que si $q = n^2$, pour toute matrice A, A^q est toujours une combinaison linéaire de $A^{q-1}, A^{q-2}...$ et I_n (le théorème de Cayley-Hamilton qui sera vu l'année prochaine prouvera qu'on peut même prendre $q = n$).

24. : Soit A la matrice $\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de terme général $A(i,j) = \binom{j}{i}$,
pour i et $j \in [|0,n|]$ (avec la convention classique : $i > j \Rightarrow \binom{j}{i} = 0$).

(a) Écrire A et l'inverser pour $n = 2$ et 3.

(b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant A pour matrice canonique ; calculer $f(X^j)$ puis $f(P)$ pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

(c) En déduire l'inverse de A (méthode à retenir) ; montrer que $A^{-1} = JAJ$ où $J = diag(1,-1,1,-1...)$.

(d) * Déterminer la matrice $B = {}^tAA$ en utilisant la formule de convolution sur les coefficients du binôme :

$$\sum_{i+j=k} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{k}$$

(cf. exercice 27 sur les coefficients binomiaux) et déduire de ce qui précède une expression de B^{-1}.

25. : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que A puisse se mettre sous la forme $A = I_n - N$ avec N matrice nilpotente d'indice de nilpotence $p+1$ (c'est-à dire que $N^{p+1} = 0_n$ et $N^p \neq 0_n$).

(a) Calculer $A\sum\limits_{k=0}^{p} N^k$ (on rappelle que $N^0 = I_n$).

(b) En déduire que A est inversible et donner l'expression de son inverse (ce résultat est une version matricielle de la formule : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...$).

(c) Appliquer à $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

26. :

(a) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; rappeler pourquoi il existe $P \in GL_4(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_3(\mathbb{K})$ telles que :

$$Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Déterminer l'un de ces couples (P, Q).
Méthode : déterminer une base (X_3, X_4) de $\ker A$; compléter en une base (X_1, X_2, X_3, X_4) de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{K})$; déterminer une base (AX_1, AX_2, Y_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{K})$; P a pour colonnes X_1, X_2, X_3, X_4 et Q a pour colonnes AX_1, AX_2, Y_3.
Réponse : $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ par exemple.

27. Soit p un projecteur et s une symétrie d'un e.v. de dimension finie ; montrer que $trace(p) = rg\,(p)$, et que $trace(s) = rg\,(s + id) - rg\,(s - id)$.

28. :

(a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_n)$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$; montrer que $f^2 = \lambda f \Leftrightarrow$ il existe une base où la matrice de f est $\text{diag}(\lambda, ..., \lambda, 0, ..., 0)$ (indication : commencer par le cas $\lambda = 1$).

(b) En déduire que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^2 = \lambda A \Leftrightarrow A$ est semblable à une matrice du type....................................

(c) Peut on faire $\lambda = 0$ dans l'énoncé ci-dessus ?

(d) Appliquer b) à $A = \begin{bmatrix} 1 & .. & .. & 1 \\ .. & & & .. \\ .. & & & .. \\ 1 & . & . & 1 \end{bmatrix}$.

29. : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ vérifiant $f^3 = f$.

(a) Montrer que si $\ker(f - \lambda id_{\mathbb{E}})$ n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, $\lambda = 0, 1$ ou -1.

(b) Montrer que $\mathbb{E} = \ker(f - id_{\mathbb{E}}) \oplus \ker(f + id_{\mathbb{E}}) \oplus \ker f$; quelle est la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition ?

(c) En déduire que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^3 = A \Leftrightarrow A$ est semblable à une matrice du type....................................

(d) En déduire aussi que pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, $f^3 = f$ ssi f est le produit commutatif d'une projection et d'une symétrie.

30. Soient $F_1, F_2, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.

(a) Montrer que si les F_i sont non nuls, $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si

$$\forall\,(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_p}) \in F_1^* \times \cdots \times F_p^* \quad (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_p}) \text{ est libre.}$$

(b) Montrer que

$F_1 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si $\forall i \in [\,2, p\,]\quad F_i \cap \left(\sum\limits_{1 \leqslant j < i} F_j\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.