

MATRICES

1. : Calculer si c'est possible :

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}^2$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. :

(a) Une matrice carrée A est dite triangulaire supérieure lorsque :

$$i > j \Rightarrow A(i, j) = 0.$$

Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure, et déterminer les termes diagonaux de ce produit. Que peut-on dire de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures ? Quelle est sa dimension ?

(b) Même question pour les matrices triangulaires inférieures.

3. :

(a) Calculer $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$ pour n entier ≥ 1 .

(b) Où est l'erreur dans le calcul suivant ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & n-1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & n \\ n & n^2 - n + 1 \end{bmatrix}}$$

4. Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent.

(a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ A et B^k commutent. En déduire que tout polynôme en A commute avec tout polynôme en B .

(b) Montrer que si B est inversible, A et B^{-1} commutent.

(c) Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; déterminer une matrice B qui commute avec A et qui n'est pas un polynôme en A .

5. : Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; on demande de déterminer une matrice carrée telle que le produit (à gauche ou à droite, c'est à vous de le déterminer) de cette matrice avec A ait pour résultat d'

(a) Échanger les lignes i et j de A .

(b) Échanger les colonnes i et j de A .

(c) Ajouter à la ligne i de A le produit par λ de la ligne j .

(d) Ajouter à la colonne i de A le produit par λ de la colonne j .

6. :
- (a) Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. A quelle condition les produits AB et BA sont ils simultanément possibles ? Comment sont alors les deux matrices produits ?
- (b) Vérifier que le produit $A^t A$ est toujours possible, et donner la particularité de cette matrice produit. Quelle particularité supplémentaire a la diagonale de $A^t A$, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

7. :
- (a) Soit X une matrice colonne $\in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; montrer que si ${}^t X X$ (qui est un élément de K) est non nul, la matrice carrée $I_n - \frac{2}{{}^t X X} X^t X$ a un carré égal à I_n .
- (b) Montrer que si $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$X^t X = Y^t Y \Leftrightarrow Y = \pm X$$

8. : Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices symétriques.
- (a) Donner un exemple où AB n'est pas symétrique.
- (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B (ne faisant pas intervenir de transposition), pour que le produit AB soit encore symétrique. Que dire de $AB + BA$ et $AB - BA$?
- (c) Les puissances successives de A sont elles symétriques ?
- (d) Si A est inversible, A^{-1} est elle symétrique ?

9. : Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) ;$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) ; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{K}) ;$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Rep : } A^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 4 & -12 & 5 \\ -15 & 60 & -60 \\ 12 & -54 & 60 \end{bmatrix} ; \quad B^{-1} = \frac{1}{3} \overline{B}.$$

10. * : Soit $A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1,n}(\mathbb{K})$

- (a) On pose $A_n = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n}}$: définir $a_{i,j}$.

- (b) Calculer par récurrence $A_n A_{n-1} \dots A_1$.
- (c) Montrer que $[1 \ 1 \ \dots \ 1] A_n = 2 [1 \ 1 \ \dots \ 1]$.
- (d) Dédurre des questions (b) et (c), en calculant $[1 \ 1 \ \dots \ 1] A_n A_{n-1} \dots A_1$ de deux façons différentes, que $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.
- (e) Calculer ${}^t A_1 \dots {}^t A_n A_n \dots A_1$ de deux façons différentes, et retrouver ainsi une relation classique entre coefficients binomiaux.
11. : Soit $E \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de projecteur ($E^2 = E$) différente de I_n ; on note \mathcal{A} l'ensemble des matrices de la forme EAE avec $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$;
- (a) Montrer que \mathcal{A} est un sous-groupe additif de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ stable pour la multiplication et possédant un élément neutre pour la multiplication (c'est donc un anneau), mais que ce n'est pas un sous-anneau de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec la définition donnée dans le cours.
- (b) Déterminer \mathcal{A} pour $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
12. * : Soit G l'ensemble des matrices du type : $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $a \in \mathbb{K}$.
- (a) Montrer que (G, \times) est un groupe isomorphe à un groupe connu.
Rappel : Si (G_0, \times) est un groupe, $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi quelconque et φ un morphisme de G_0 vers E , alors $\varphi(G_0)$ est un groupe, et si φ est injective, $\varphi(G_0)$ est isomorphe à G .
- (b) En déduire A^n ($n \in \mathbb{Z}$).
13. * : Montrer que l'ensemble des matrices $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) est un corps isomorphe à \mathbb{C} .
Rappel : Si K est un corps, $(E, +, \times)$ un ensemble muni de deux lois quelconques, et φ un morphisme non nul de K dans E , alors $\varphi(K)$ est un corps isomorphe à K .
14. * : Le corps des quaternions.
 Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on pose $Q(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$
- (a) Montrer que $Q(a, b) + Q(c, d)$ et $Q(a, b)Q(c, d)$ sont encore de la forme $Q(u, v)$.
- (b) Montrer que si $(a, b) \neq (0, 0)$, $Q(a, b)$ est inversible et que $Q(a, b)^{-1}$ est encore de la forme $Q(u, v)$.
- (c) L'ensemble des *quaternions* est $\mathbb{H} = \{Q(a, b) / a, b \in \mathbb{C}\}$ (\mathbb{H} est l'initiale de Hamilton, qui a découvert cet ensemble) ; montrer que \mathbb{H} est un sous-anneau de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ et que c'est même un corps contenant comme sous-corps le corps isomorphe à \mathbb{C} de l'exercice précédent.
- (d) Montrer que \mathbb{H} est aussi un sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$; en donner une \mathbb{R} -base de la forme (I_2, J, K, L) .
- (e) Montrer que les éléments de la \mathbb{R} -base, et leurs opposés forment un groupe à huit éléments pour la multiplication ; c'est le *groupe quaternionique*.
15. : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée nilpotente ; c'est-à-dire : $\exists m \in \mathbb{N} \quad A^{m+1} = 0_n$.
 On pose : $e^A = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} A^p$ avec la convention $A^0 = I_n$ (remarquer que cette somme n'est qu'en apparence infinie, puisque $A^p = 0_n$ pour $p \geq m + 1$.)
- (a) Calculer e^{0_n} et $e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$.
- (b) On suppose que A et B sont nilpotentes et **commutent** ; démontrer que $e^{A+B} = e^A e^B$.
- (c) En déduire que e^A est inversible. Quelle est son inverse ?
16. : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle :

$$i \geq j \Rightarrow A(i, j) = 0.$$

- (a) Montrer que $A^n = 0_n$ (on pourra raisonner en termes d'endomorphismes).
 (b) Montrer qu'on a le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures à diagonale nulle.

Remarque : ces résultats sont à retenir, ils sont souvent utiles.

17. :
- (a) Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que A est non inversible si et seulement s'il existe $X \neq O_{n,1}$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = O_{n,1}$.
 (b) Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$
 i. Montrer en utilisant (a) que B non inversible, implique AB non inversible.
 ii. En déduire que A non inversible, implique AB non inversible.
 iii. En déduire qu'un produit de matrices carrées est inversible si et seulement si les facteurs du produit sont inversibles. (Remarque : ceci pouvait aussi se déduire de l'exercice 22 sur les applications linéaires).
 (c) Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.
 (d) On suppose que $A, B, C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $ABC = I_n$. Déterminer l'inverse de B en fonction de A et C .
 (e) * Soit $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_2$. A-t-on nécessairement $AB = I_3$? Donner un exemple.

18. : Matrices simplifiables et matrices inversibles.

- (a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible est simplifiable (ou régulière).
 (b) Considérons maintenant $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible. Montrer en utilisant le résultat de 17. (a) qu'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = O_n$; en déduire que A n'est pas simplifiable.
 (c) Que conclut-on de (a) et (b) ?

19. : Même thème, par une autre méthode ; pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ on considère l'application f_A (resp g_A) de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même qui à X fait correspondre AX (resp. XA).

- (a) Montrer A simplifiable ssi f_A et g_A injectives.
 (b) Montrer A inversible ssi f_A et g_A surjectives (cf exercice 4. sur les lois de composition)
 (c) En déduire A simplifiable ssi A inversible.

20. : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$;

- (a) Montrer que A^p est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
 (b) Montrer que si β est non nul, A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n .
 (c) Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geq 2$. Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.
 (d) Application 2 : montrer que si $n = 2$, pour toute matrice A , A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2 , et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant (b).

21. (généralisation de l'exercice précédent).

Soit A une matrice carrée d'ordre n ; on suppose que A^q ($q \geq 1$) est une combinaison linéaire de $A^{q-1}, A^{q-2} \dots$ et I_n :
 $A^q = \alpha_{q-1}A^{q-1} + \dots + \alpha_0 I_n$;

- (a) Montrer que A^p est également une combinaison linéaire de $A^{q-1}, A^{q-2} \dots$ et I_n pour tout $p \geq q$.
 (b) Montrer que si α_0 est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de $A^{q-1}, A^{q-2} \dots$ et I_n .
 (c) Montrer que si $q = n^2$, pour toute matrice A , A^q est toujours une combinaison linéaire de $A^{q-1}, A^{q-2} \dots$ et I_n (le théorème de Cayley-Hamilton qui sera vu l'année prochaine prouvera qu'on peut même prendre $q = n$).

22. : Soit A la matrice

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{K}) \text{ de terme général } A(i, j) = \binom{j}{i},$$

pour i et $j \in [0, n]$ (avec la convention classique : $i > j \Rightarrow \binom{j}{i} = 0$).

(a) Écrire A et l'inverser pour $n = 2$ et 3 .

(b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant A pour matrice canonique ; calculer $f(X^j)$ puis $f(P)$ pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

(c) En déduire l'inverse de A (méthode à retenir) ; montrer que $A^{-1} = JAJ$ où $J = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots)$.

(d) * Déterminer la matrice $B = {}^tAA$ en utilisant la formule de convolution sur les coefficients du binôme :

$$\sum_{i+j=k} \binom{p}{i} \binom{q}{j} = \binom{p+q}{k}$$

(cf. exercice 27 sur les coefficients binomiaux) et déduire de ce qui précède une expression de B^{-1} .

23. : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que A puisse se mettre sous la forme $A = I_n - N$ avec N matrice nilpotente d'indice de nilpotence $p+1$ (c'est-à-dire que $N^{p+1} = 0_n$ et $N^p \neq 0_n$).

(a) Calculer $A \sum_{k=0}^p N^k$ (on rappelle que $N^0 = I_n$).

(b) En déduire que A est inversible et donner l'expression de son inverse (ce résultat est une version matricielle de la formule : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$).

(c) Appliquer à $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

24. :

(a) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; rappeler pourquoi il existe $P \in GL_4(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_3(\mathbb{K})$ telles que :

$$Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Déterminer l'un de ces couples (P, Q) .

Méthode : déterminer une base (X_3, X_4) de $\ker A$; compléter en une base (X_1, X_2, X_3, X_4) de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{K})$; déterminer une base (AX_1, AX_2, Y_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{K})$; P a pour colonnes X_1, X_2, X_3, X_4 et Q a pour colonnes AX_1, AX_2, Y_3 .

Réponse : $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ par exemple.

25. Soit p un projecteur et s une symétrie d'un e.v. de dimension finie ; montrer que $\text{trace}(p) = \text{rg}(p)$, et que $\text{trace}(s) = \text{rg}(s + id) - \text{rg}(s - id)$.

26. :

(a) Soit $f \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$; montrer que $f^2 = \lambda f \Leftrightarrow$ il existe une base où la matrice de f est $\text{diag}(\lambda, \dots, \lambda, 0, \dots, 0)$ (indication : commencer par le cas $\lambda = 1$).

(b) En déduire que pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $A^2 = \lambda A \Leftrightarrow A$ est semblable à une matrice du type.....

(c) Peut-on faire $\lambda = 0$ dans l'énoncé ci-dessus ?

(d) Appliquer b) à $A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

27. : soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ vérifiant $f^3 = f$.

(a) Montrer que si $\ker(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{E}})$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, $\lambda = 0, 1$ ou -1 .

(b) Montrer que $\mathbb{E} = \ker(f - \text{id}_{\mathbb{E}}) \oplus \ker(f + \text{id}_{\mathbb{E}}) \oplus \ker f$; quelle est la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition ?

(c) En déduire que pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $A^3 = A \Leftrightarrow A$ est semblable à une matrice du type.....

(d) En déduire aussi que pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, $f^3 = f$ ssi f est le produit commutatif d'une projection et d'une symétrie.

28. Soient F_1, F_2, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} .

(a) Montrer que si les F_i sont non nuls, $F_1 + \dots + F_p$ est directe si et seulement si

$$\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) \in F_1^* \times \dots \times F_p^* \quad (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) \text{ est libre.}$$

(b) Montrer que

$$F_1 + \dots + F_p \text{ est directe si et seulement si } \forall i \in [2, p] \quad F_i \cap \left(\sum_{1 \leq j < i} F_j \right) = \{\vec{0}\}.$$