VII. **LOIS DE COMPOSITIONS ET STRUCTURES**

1. : Remplir le tableau suivant :

ensemble	opération	commutative ?	associative ?	distributive sur ?	elt. neutre	{elts symétrisables}	groupe ?
$\mathbb{C}$	$+$						
$\mathbb{C}$	$-$						
$\mathbb{C}$	$\times$						
$\mathbb{C}^*$	$\div$						
$\mathbb{R}_+$	$\wedge$						
$\overline{\mathbb{R}}$	min						
$\overline{\mathbb{R}}$	max						
$\mathbb{N}$	$+$						
$\mathbb{N}$	pgcd						
$\mathbb{N}$	ppcm						
$\mathcal{P}(\mathbb{E})$	$\cap$						
$\mathcal{P}(\mathbb{E})$	$\cup$						
$\mathcal{P}(\mathbb{E})$	$\setminus$						
$\mathcal{P}(\mathbb{E})$	Δ						
$\mathbb{E}^{\mathbb{E}}$	$\circ$						
$\mathbb{E}$	$x * y = x$						
$\mathbb{E}_3$	$\wedge$						
$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$\times$						

2. : Soit $*$ une loi associative. Montrer que e est neutre ssi e est simplifiable et $e * e = e$.

3. : On dira qu'une loi est "ascommative" si elle vérifie

$$\forall x, y, z \in E \quad (x * y) * z = (y * z) * x$$

(a) Que peut-on dire d'une loi ascommative qui possède un élément neutre ?

(b) Vérifier que la loi définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(a, b) * (c, d) = (bc, 0)$ est ascommative, mais ni associative, ni commutative.

4. : Soit f une application d'un ensemble $\mathbb{E}$ non vide dans lui même ; Montrer que

(a) f est simplifiable à gauche pour $\circ$ dans $\mathbb{E}^{\mathbb{E}}$ ssi f est injective.

(b) f est simplifiable à droite pour $\circ$ dans $\mathbb{E}^{\mathbb{E}}$ ssi f est surjective.
Ceci démontre donc que f est simplifiable ssi elle est symétrisable pour $\circ$.

5. * : Démontrer par des raisonnements par récurrence à partir des définitions données dans le cours la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{N}$.

6. : Déterminer toutes les parties finies de $\mathbb{C}$ qui sont stables pour la mutiplication.

7. : Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Dénombrer dans $\mathbb{E}$:

   (a) les lois de composition internes.
   (b) les lois commutatives.
   (c) les lois admettant un élément neutre.
   (d) les lois commutatives admettant un élément neutre.
   (e) * les lois admettant un élément neutre et telles que tout élément admet un symétrique unique.
   Rep : (e) : $n!\,(n-1)^{(n-1)(n-2)}$

8. :

   (a) Montrer que dans $\mathbb{R}_+$, la loi $*$ définie par $x * y = |x - y|$ est commutative, possède un élément neutre et qu'elle est telle que tout élément possède un unique symétrique, mais que $(\mathbb{R}_+, *)$ n'est pas un groupe.
   (b) Cette table définit-elle un groupe ?

$*\nearrow$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	d	b	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	e	b
d	d	b	c	a	e

   (c) Trouver une loi associative, mais non commutative et sans élément neutre.
   (d) Trouver une loi dans un ensemble $\mathbb{E}$ telle que tout élément soit simplifiable, associative, ayant un élément neutre mais qui ne confère pas à $\mathbb{E}$ la structure de groupe.

9. * : Soit $*$ une loi de composition dans $\mathbb{E}$ associative, ayant un élément neutre e. Pour $a \in \mathbb{E}$, on pose :

$$f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ x \mapsto a * x \end{array} \right| \text{ et } g : \left| \begin{array}{c} \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ x \mapsto x * a \end{array} \right|$$

   (a) Montrer que f est injective ssi a est simplifiable à gauche, et que f est surjective ssi a possède un symétrique à droite ; que dire de similaire pour g ?
   (b) On suppose de plus $\mathbb{E}$ est fini. Déduire de (a) qu'alors sont équivalentes les propositions suivantes
      i. a possède un symétrique à droite
      ii. a simplifiable à droite
      iii. a possède un symétrique à gauche
      iv. a simplifiable à gauche
      v. a possède un symétrique
      vi. a simplifiable.
      Indication : commencer par montrer $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$
   (c) Que peut-on donc dire de $(\mathbb{E}, *)$ si E est fini et si tout élément de $\mathbb{E}$ est simplifiable pour $*$?
   (d) En déduire qu'une partie stable finie d'un groupe, contenant l'élément neutre e, en est un sous-groupe.

10. : Dans $E =]-1, 1[$ on pose $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

   (a) Montrer que $x * y \in E$ (indication : $a \in E \iff a^2 < 1$)
   (b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.
   (c) * Montrer que $(E, *)$ est isomorphe à un groupe bien connu.

11. : Un produit semi-direct de deux groupes.
On définit dans $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ l'opération $*$ par $(x, y) * (x', y') = (xx', y + xy')$. Que peut-on dire de la structure de $(E, *)$?

12. * : Soit $\mathbb{E}$ un ensemble, et $*$ une opération dans $\mathbb{E}$. On définit $\overline{*}$ par $x \overline{*} y = y * x$,

   (a) Montrer que $(\mathbb{E}, \overline{*})$ peut ne pas être isomorphe à $(\mathbb{E}, *)$.
   (b) Montrer que si $(\mathbb{E}, *)$ est un groupe, alors $(\mathbb{E}, \overline{*})$ est isomorphe à $(\mathbb{E}, *)$.

13. : Montrer qu'un groupe fini d'ordre pair possède au moins un élément unipotent, autre que l'élément neutre.
(L'ordre d'un groupe est le nombre de ses éléments, et x est unipotent si $x^2 = e$).

14. * : $*$ est une opération associative dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E} \neq \emptyset$. On suppose que pour tout $a, b \in \mathbb{E}$, les équations $a * x = b$ et $y * a = b$ admettent chacune au moins une solution (en x et y respectivement).
Montrer que $(\mathbb{E}, *)$ est un groupe.

15. :

   (a) Montrer qu'un anneau est intègre ssi ses éléments non nuls sont tous réguliers pour la multiplication.
   (b) En utilisant (9. (b)) montrer que dans un anneau fini, un élément est régulier ssi il est inversible. Que peut-on donc dire d'un anneau intègre fini ?

16. : Montrer que si dans un anneau A un élément a possède un *unique* inverse à droite b, alors b est aussi inverse à gauche de a.

17. : On considère le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; montrer que $\mathcal{A}$ est stable pour l'addition et la multiplication, que $(\mathcal{A}, +_A, \times_A)$ est un anneau, mais que pourtant $\mathcal{A}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ au sens donné dans le cours.

18. : Soient a et b deux réels ; on augmente (algébriquement) une somme S d'un pourcentage a (c'est-à dire que S devient $S' = S + aS$) puis on augmente S' d'un pourcentage b (elle devient S'') ; on note $a * b$ le pourcentage d'augmentation faisant passer directement de S à S''.

   (a) Calculer $a * b$; que valent $(10\%) * (10\%)$ et $(10\%) * (-10\%)$?
   (b) Montrer l'associativité, déterminer un élément neutre.
   (c) Etudier l'existence d'un symétrique pour $a \in \mathbb{R}$; quel est le symétrique de 10% ?
   (d) Montrer que $G = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ est une partie stable pour $*$ et que $(G, *)$ est un groupe commutatif.
   (e) On pose $a \dot{+} b = a + b + 1$; montrer que $\left(\mathbb{R}, \dot{+}, * \right)$ est un corps commutatif.

19. : Déterminer tous les corps $\mathbb{K}$ tels que $\forall x \in \mathbb{K}^* \;\; x^{-1} = x$.