POLYNÔMES

1. : Montrer que $P_n \overset{def}{=} (1+X)\left(1+X^2\right)\left(1+X^4\right)\cdots\left(1+X^{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k$
   (a) Par récurrence.
   (b) En multipliant P_n par $X-1$.

2. Soit A un polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$; on considère l'ensemble $\mathcal{M}_A = A.\mathbb{K}[X]$ des multiples de A (attention : ne pas confondre avec $vect(A)$). Montrer que $\mathcal{M}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un supplémentaire de $\mathcal{M}_A$ dans $\mathbb{K}[X]$.

3. : Soit A, B, et P trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg P \geqslant 1$. Montrer que :
$$A(P) = B(P) \Rightarrow A(X) = B(X)$$
   Indication : montrer que la famille $(1, P, ..., P^n)$ est libre.

4. : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; que dire de P dans les cas suivants ?
   (a) $P(0) = P(1) = P(2) = ...$ (à l'infini)
   (b) la fonction polynôme associée à P est périodique de période T.
   (c) $P(X+1) = P(X)$
   (d) $P(X+1) = -P(X)$

5. : Pourquoi les fonctions suivantes ne sont-elles pas polynomiales ?
$$f_1 : \left|\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |x|\end{array}\right. ;\ f_2 : \left|\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt{|x|}\end{array}\right. ;\ f_3 : \left|\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^x\end{array}\right.$$
$$f_4 : \left|\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \cos x\end{array}\right. ;\ f_5 : \left|\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}\end{array}\right. ;\ f_6 : \left|\begin{array}{c}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto \bar{z}\end{array}\right.$$

6. :
   (a) Déterminer les racines de $P_n = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k \frac{\prod_{q=0}^{k-1}(X-q)}{k!}\right) = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2} - ... + (-1)^n \frac{X(X-1)...(X-n+1)}{n!}$
   (par convention $\prod_{q=0}^{-1}(X-q) = 1$) ; en déduire la factorisation de $P_n(X)$.
   (b) Calculer $P_n(0)$ et $P_n(n+1)$.
   (c) Montrer que $P_n(n+1-X) = (-1)^n P_n(X)$; que ceci signifie-t-il pour la courbe de la fonction associée à P_n?

7. : Les polynômes d'interpolation de Lagrange :
   (a) On donne $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ avec $x_1 \neq x_2$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{K}$. On pose alors :
$$L(X) = \frac{X-x_2}{x_1-x_2}y_1 + \frac{X-x_1}{x_2-x_1}y_2$$
   Vérifier que $L(x_1) = y_1$ et $L(x_2) = y_2$.
   (b) Généralisation :
   Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$ tous distincts et $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{K}$.
   Déterminer un polynôme L de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $L(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [|\ 1, n\ |]$
   Montrer l'unicité de L.

(c) Soit P un polynôme et L le polynôme de Lagrange défini par $L(x_i) = P(x_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L n'est autre que le reste de la division euclidienne de P par $(X - x_1) \dots (X - x_n)$.

(d) Corollaire :
Démontrer que si $I \subset \mathbb{K}$ est fini, alors $\mathcal{P}(I, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^I$ autrement dit que toute application de I vers $\mathbb{K}$ est polynomiale.

8. : Montrer que les racines de $1 + X + \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ sont simples.

9. : Soit $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(X) + P(X+1) \end{array} \right.$

(a) Montrer que φ est bijective, en utilisant le fait qu'un certain système est de Cramer.

(b) Calculer $\varphi^{-1}(2) ; \varphi^{-1}(2X) ; \varphi^{-1}(2X^2)$.

10. Interprétation du reste de la division euclidienne.
Soit A un polynôme et a et b deux éléments distincts de K ;

(a) Soit R le reste de la division euclidienne de A par $B = (X - a)^2 (X - b)$. Montrer que $R(a) = A(a)$, $R'(a) = A'(a)$ et $R(b) = A(b)$; montrer l'unicité d'un polynôme S de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant $S(a) = A(a)$, $S'(a) = A'(a)$ et $S(b) = A(b)$.

(b) * Généraliser la propriété précédente.

11. * : Algorithme de Horner :
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et $x \in \mathbb{K}$. On pose $b_n = a_n$ puis par récurrence descendante sur $k \in [\![1; n]\!]$, $b_{k-1} = x b_k + a_{k-1}$.

(a) Montrer que $b_n X^{n-1} + b_{n-1} X^{n-2} + \cdots + b_2 X + b_1$ et b_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division de P par $X - x$.

(b) Que vaut par conséquent b_0 ?

(c) Comparer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer b_0 par cette méthode avec le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.
REM 1 : on présente habituellement les calculs sous la forme :

a_n	a_{n-1}	....	a_0
$b_n = a_n$	$b_{n-1} = x b_n + a_{n-1}$	....	b_0

REM 2 : le calcul de $P(x)$ par cette méthode correspond à l'écriture, appelée forme de Horner du polynôme :

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots\dots\dots + x(a_{n-1} + a_n x)))$$

12. * : Autour des nombres algébriques :
On dit qu'un nombre complexe est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers.

(a) Vérifier que toute racine d'un polynôme à coefficients *rationnels* est algébrique.

(b) Vérifier que tout rationnel, $\sqrt{2}, i$ sont algébriques ; mais on démontre que π et e ne le sont pas (on dit qu'ils sont "transcendants").

(c) Montrer que si x est algébrique, alors
$-x$ est algébrique
$x + r$ est algébrique pour tout $r \in \mathbb{Q}$
rx est algébrique pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$
$\dfrac{1}{x}$ est algébrique (si $x \neq 0$).

(d) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, $2 \cos \dfrac{\pi}{9}$ sont algébriques.

(e) Que resterait-il à démontrer pour pouvoir affirmer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres algébriques est un sous-corps de $\mathbb{C}$?

13. * Suite du 12.
Les espaces vectoriels ici considérés sont à coefficients rationnels. Soit x un complexe.
   (a) Montrer que x est algébrique ssi $F_x = Vect\left(\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Vect\left(1, x, ..., x^n\right)$ est de dimension finie.
   (b) Soient x et y deux nombres algébriques ; montrer que $F_{x+y} = Vect\left(\left(x^i y^j\right)_{i,j\in\mathbb{N}}\right)$; en déduire que $x+y$ est algébrique.
   (c) Montrer que xy est algébrique.

14. : Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Montrer que si $P\left(\sqrt{2}\right) = 0$, alors $P\left(-\sqrt{2}\right) = 0$ et que donc P est divisible par $X^2 - 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) En déduire que si $P\left(1+\sqrt{2}\right) = 0$ alors $P\left(1-\sqrt{2}\right) = 0$.

15. * : À l'équation différentielle (**E**) : $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, on associe le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$,
et pour l'expression $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$, on note plus simplement $P[y]$.
Ainsi (**E**) s'écrit aussi : $P[y] = f(x)$
   (a) i. Calculer $P\left[e^{\lambda x}\right]$, et en déduire une solution particulière de " $P[y] = e^{\lambda x}$ " lorsque $P(\lambda) \neq 0$.
      ii. Montrer que $P\left[xe^{\lambda x}\right] = \left(P(\lambda)x + P'(\lambda)\right)e^{\lambda x}$ et en déduire une solution particulière de "$P[y] = e^{\lambda x}$" lorsque λ est racine simple de P.
      iii. Généraliser au cas où λ est racine d'ordre k de P.

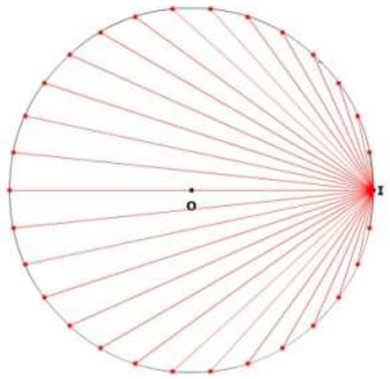
16. * : Déterminer tous les automorphismes de l'anneau $\mathbb{C}[X]$, c'est-à dire les bijections ϕ de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même vérifiant, pour tous P, Q de $\mathbb{C}[X]$
$$\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q) \text{ et } \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q)$$

17. : Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ (ordre indifférent).
$$X^3-1 \ ; X^3+1 \ ; X^4-1 \ ; X^4+1 \ ; X^4+X^2+1 \ ; X^4+X^3+X^2+X+1 \ ; \\ X^{12}-1 \ ; X^6+1 \ .$$

18. :
   (a) Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2X^n \cos(2n\theta) + 1$.
   rep : $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(2\theta + 2k\frac{\pi}{n}\right)X + 1\right)$
   (b) Substituer 1 à l'indéterminée X dans l'égalité obtenue et en déduire que $\sin n\theta = \pm 2^{n-1}\sin\theta \prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$, puis que
$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$
   En déduire la valeur de $\sin 1° \sin 2° ... \sin 89° \sin 90°$ (cf. exercice 3. des fonctions circulaires).

19. :
   (a) Calculer $(1-j)\left(1-j^2\right)$ et $(2-j)\left(2-j^2\right)$
   (b) Soit $P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ exprimée avec $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
   (c) Calculer $(1-u)\left(1-u^2\right)\cdots\left(1-u^{n-1}\right)$ et $(2-u)\left(2-u^2\right)\cdots\left(2-u^{n-1}\right)$. Vérifier le calcul de la première question.

(d) On considère un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Montrer que le produit des longueurs des $n-1$ segments joignant un sommet aux autres sommets est égal à n.



20. * : Application de l'exercice 19.

(a) En remarquant que $\sin \dfrac{k\pi}{n} = -\dfrac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2i}\left(1-u^k\right)$, démontrer la formule :

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

21. : Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ un polynôme à coefficients réels. Supposant que P possède une racine $z_1 \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \notin \mathbb{R}$ et $|z_1| \neq 1$, trouver les trois autres racines de P dans $\mathbb{C}$ autres que z_1, en fonction de z_1.

22. : Soit $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ de degré n.

(a) Montrer que si $n \geqslant 1$ alors f est surjective.

(b) Montrer que si $n \geqslant 2$ alors f n'est pas injective.

(c) Montrer que ces résultats sont faux pour $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

23. * : Localisation des racines complexes.
D'après le théorème de D'Alembert, on sait qu'un polynôme à coefficients complexe possède n racine complexes, mais le théorème ne dit pas où elles se trouvent !
Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme *unitaire* de degré n à coefficients complexes ($a_n = 1$), z l'une de ses racines, et $A = \displaystyle\max_{k=0}^{n-1} |a_k|$

(a) Montrer que $|z|^n \leqslant A\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k$.

(b) En déduire que $|z| \leqslant A+1$ (les images des racines se trouvent donc toutes dans le disque de centre O et de rayon $A+1$).

(c) Déterminer par exemple un majorant du module des racines de $(2+i)\,X^3 - 7iX^2 + (9i-2)\,X - 3i$; puis déterminer exactement ces racines, et le maximum de leur module ; comparer avec le majorant obtenu précédemment.

24. : Les polynômes réels de signe constant.
Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \geqslant 0$.

(a) Montrer que si P n'a pas de racine complexe non réelle, alors $\exists Q \in \mathbb{R}[X]\ /\ P = Q^2$.

(b) Montrer que si P n'a pas de racine réelle, alors $\exists A, B \in \mathbb{R}[X]\ /\ P = A^2 + B^2$.

(c) Que peut-on donc dire dans le cas général ?

25. : Les polynômes réels de signe constant, autre formulation.

(a) Montrer que le produit de deux sommes de deux carrés de polynômes est une somme de deux carrés de polynômes.

(b) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geqslant 0$.

i. Montrer que ses racines réelles sont d'ordre pair.

ii. Ecrire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$ et montrer en utilisant a) que $\exists A, B \in \mathbb{R}[X] \ / \ P = A^2 + B^2$.

26. : Résoudre dans $\mathbb{C}^3$: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.

27. : Soit x, y, z tels que : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7 \end{cases}$.

Calculer $x^4 + y^4 + z^4$ et $x^5 + y^5 + z^5$.

28. : Déterminer les racines du polynôme $18X^3 + 81X^2 - 44X + 5$ sachant que l'une est le double de l'autre.

29. : Soit $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$.

(a) Déterminer les racines complexes de P_n ; donner sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Réponse : $P_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + i \cot \dfrac{k\pi}{n} \right)$

(b) Calculer la somme des racines de P_n, le produit de ses racines, la somme du carré de ses racines.

(c) En déduire que si $n = 2p+1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \tan\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \sqrt{n}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \cot^2\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

30. :

(a) Montrer que dans $\mathbb{C}[X]$, $P = X^3 + pX + q$ possède une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Indication : écrire que P et P' ont une racine commune.

(b) * Montrer que $Q = X^5 + pX^2 + q$ possède une racine multiple si et seulement si $q\left(3125q^3 + 108p^5\right) = 0$.

31. Soient a, b, c les racines de $P = X^3 + pX + q$; on demande de calculer $\Delta = (a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2$ en fonction de p et q.

Indication : calculer $P'(a) P'(b) P'(c)$.

Pour avoir la réponse avec maple : eliminate({ (a - b)^2* (b - c)^2 *(c - a)^2 =0, a + b + c =0, a*b + b*c + c*a =p, a *b*c = -q}, {a, b, c}).

Comparer avec 30 a).

32. * : Soit $P = X^3 + pX^2 + qX + r \in \mathbb{C}[X]$

(a) Prouver que P a une racine égale à la somme des autres si et seulement si $p^3 - 4pq + 8r = 0$; quelles sont alors ces racines ?

(b) Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que P ait ses racines en progression arithmétique.

(c) Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que P ait ses racines en progression géométrique.

33. * : Soit $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré n ; notons $z_1, ..., z_p$ ses racines, z_i étant d'ordre α_i.

(a) Montrer que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k z_k = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$;

Désignons par M_i le point-image de z_i dans le plan ; le barycentre des (M_i, α_i) est un point que nous noterons G_P.

(b) Démontrer que si $n \geqslant 2$, $G_P = G_{P'}$.

(c) En déduire que G_P est le point-image de l'unique racine de $P^{(n-1)}$.

(d) Etudier l'exemple : $P = (3+i)X^4 - 6(1+2i)X^3 + 7(-1+3i)X^2 + 8(2-i)X - 2(3+i)$.

34. : Etude du polynôme du 3ème degré réduit.

(a) Montrer que si $\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$, le polynôme réel $X^3 + pX + q$ possède trois racines distinctes, dont l'une est réelle et les deux autres complexes non réelles conjuguées, et que si $\Delta < 0$, il possède trois racines réelles distinctes.

(b) On se place dans le cas où $\Delta > 0$; soit a la racine réelle et u et $\overline{u}$ les racines non réelles ; montrer que $\operatorname{Re}(u) = -\dfrac{a}{2}$ et $|u| = \sqrt{p + a^2}$.

35. * : Résolution de l'équation du troisième degré.

(a) Suppression du terme en X^2.
Montrer que l'on peut toujours trouver un réel d tel que le polynôme à coefficients réels $X^3 + aX^2 + bX + c$ s'écrive $Y^3 + pY + q$, avec $Y = X - d$.

(b) Montrer que si $p \neq 0$ et $\Delta = 4p^3 + 27q^2 \neq 0$, on peut trouver 4 complexes $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, tels que $X^3 + pX + q = \alpha (X + \lambda)^3 - \beta (X + \mu)^3$.
On trouvera $\lambda + \mu = \dfrac{3q}{p}, \lambda\mu = -\dfrac{p}{3}, \alpha = \dfrac{\mu}{\mu - \lambda}, \beta = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$.

(c) Résoudre avec cette méthode les équations $2x^3 + 6x^2 - 9 = 0, x \in \mathbb{R}$ et $x^3 = 15x + 4, x \in \mathbb{R}$ (on donne $(2+i)^3 = 2 + 11i$).

36. Les sommes de Newton.

Soit $x_1, ..., x_n$ des scalaires. On cherche des relations reliant les sommes de Newton $s_p = \sum_{k=1}^{n} x_k^p$ aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, ..., \sigma_n$ des x_k ; on notera P le polynôme $(X - x_1) ... (X - x_n)$.

(a) Montrer que si $p \geqslant n$, alors $s_p = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sigma_k s_{p-k}$.

(b) * : Montrer que si $1 \leqslant p \leqslant n$, alors $s_p = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \sigma_k s_{p-k} + (-1)^p p\sigma_p$.

Indication : effectuer la division euclidienne de P par $X - x_k$ et regarder le coefficient de X^{p-1} dans $\sum_{k=1}^{p} \dfrac{P}{X - x_k} = P'$.

(c) Par exemple, pour $n = 3$, utiliser ces formules pour calculer s_1, s_2, s_3, s_4, en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

FRACTIONS RATIONNELLES

GÉNÉRALITÉS

37. : Soient $P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2$ des polynômes vérifiant : $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$, avec Q_1 et Q_2 polynômes unitaires de même degré. A-t-on nécessairement $Q_1 = Q_2$?

38. * :

(a) Montrer que $\mathbb{F} = \{F \in \mathbb{K}(X)\ /\ \deg F < 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}(X)$; en déterminer un supplémentaire simple dans $\mathbb{K}(X)$.

(b) Idem avec $\mathbb{G} = \{F \in \mathbb{K}(X)\ /\ \deg F \leqslant 0\}$.

DÉCOMPOSITIONS EN ÉLÉMENTS SIMPLES

39. : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{K}[X]$.

(a) $\dfrac{X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 3}{X^3 + X^2 - X - 1}$

(b) $\dfrac{X^2 + 3X + 1}{X^4 + 2X^3 + X^2}$

(c) $\dfrac{X^5+2X^4+2X^3-X^2+3X+1}{X^6+X^5-2X^4-2X^3+X^2+X}$

(d) $\dfrac{1}{(X-a)^2(X-b)}(a \neq b)$.

(e) $\dfrac{n!}{X(X+1)(X+2)...(X+n)}$(qu'obtient-on de beau en faisant $X := 1$?)

(f) $\dfrac{(X+1)^n}{X^n}$; $\dfrac{X^n}{(X-1)^n}$.

(g) $\dfrac{1}{X(X-1)^3}$; $\dfrac{1}{X(X-1)^n}$.

40. : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$.

(a) $\dfrac{1}{X^n-1}, \dfrac{X^n+1}{X^n-1}$ (utiliser la formule $a_1 = \dfrac{A(x_0)}{B'(x_0)}$)

(b) $\dfrac{1}{X(X^n-1)}$.

41. :

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{4}$ et $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n^2}{(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{5}{9}$.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{n^2-1} = h_N - \frac{3}{4} + o(1)$ où $h_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{n^2-1}$;

(c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)^2}$, sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Réponses : 39.a. $X+1+\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{1}{(X+1)^2}$; 39.b. $\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{1}{(X+1)^2}$; 39.c : $\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{(X-1)^2}+\dfrac{1}{(X+1)^3}$

39.e : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{X+k}$ 39.g : $\dfrac{(-1)^n}{X}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(X-1)^k}$;

40.a $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{u^n=1}\frac{u}{X-u}, 1+\frac{2}{n}\sum_{u^n=1}\frac{u}{X-u}$.40 .b : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{u^n=1}\frac{1}{X-u}-\frac{1}{X}$.