

1. **POLYNOMES**

2. : Montrer que $P_n \stackrel{def}{=} (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\cdots(1+X^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k$

- (a) Par récurrence.
 (b) En multipliant P_n par $X-1$.

3. Soit A un polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$; on considère l'ensemble $F = A \cdot \mathbb{K}[X]$ des multiples de A (attention : ne pas confondre avec $\text{vect}(A)$). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}[X]$.

4. : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; que dire de P dans les cas suivants ?

- (a) $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$ (à l'infini)
 (b) la fonction polynôme associée à P est périodique de période T .
 (c) $P(X+1) = P(X)$
 (d) $P(X+1) = -P(X)$

5. : Soit A, B , et P trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg P \geq 1$. Montrer que :

$$A(P) = B(P) \Rightarrow A(X) = B(X)$$

Indication : montrer que la famille $(1, P, \dots, P^n)$ est libre.

6. : Pourquoi les fonctions suivantes ne sont-elles pas polynomiales ?

$$\begin{array}{l} a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array} \right. ; b : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{|x|} \end{array} \right. ; c : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right. \\ d : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{array} \right. ; e : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \end{array} \right. ; f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{array} \right. \end{array}$$

7. :

(a) Déterminer les racines de $P_n = \sum_{k=0}^n \left((-1)^k \frac{\prod_{q=0}^{k-1} (X-q)}{k!} \right) = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2} - \dots + (-1)^n \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$

(par convention $\prod_{q=0}^{-1} (X-q) = 1$) ; en déduire la factorisation de $P_n(X)$.

- (b) Calculer $P_n(0)$ et $P_n(n+1)$.
 (c) Montrer que $P_n(n+1-X) = (-1)^n P_n(X)$; que ceci signifie-t-il pour la courbe de la fonction associée à P_n ?

8. : Les polynômes d'interpolation de Lagrange :

(a) On donne $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ avec $x_1 \neq x_2$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{K}$. On pose alors :

$$L(X) = \frac{X-x_2}{x_1-x_2} y_1 + \frac{X-x_1}{x_2-x_1} y_2$$

Vérifier que $L(x_1) = y_1$ et $L(x_2) = y_2$.

(b) Généralisation :

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tous distincts et $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

Déterminer un polynôme L de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $L(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Montrer l'unicité de L .

(c) Corollaire :

Démontrer que si \mathbb{K} est fini, alors $\mathbb{K}[x] = \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ autrement dit que toute application de \mathbb{K} vers \mathbb{K} est polynomiale.

9. : Montrer que les racines de $1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$ sont simples.

10. : Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(X) + P(X+1) \end{cases}$

(a) Montrer que φ est bijective, en utilisant le fait qu'un certain système est de Cramer.

(b) Calculer $\varphi^{-1}(2)$; $\varphi^{-1}(2X)$; $\varphi^{-1}(2X^2)$.

11. * : Algorithme de Horner :

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $P = \sum_{k=1}^n a_k x^k$, et $x \in \mathbb{K}$. On pose $b_n = a_n$ puis par récurrence descendante sur $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $b_{k-1} = xb_k + a_{k-1}$.

(a) Montrer que $b_n X^{n-1} + b_{n-1} X^{n-2} + \dots + b_2 X + b_1$ et b_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division de P par $X - x$.

(b) Que vaut par conséquent b_0 ?

(c) Comparer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer b_0 par cette méthode avec le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

REM 1 : on présente habituellement les calculs sous la forme :

a_n	a_{n-1}	a_0
$b_n = a_n$	$b_{n-1} = xb_n + a_{n-1}$	b_0

REM 2 : le calcul de $P(x)$ par cette méthode correspond à l'écriture, appelée forme de Horner du polynôme :

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + a_n x)))$$

12. * : Autour des nombres algébriques :

On dit qu'un nombre complexe est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers.

(a) Vérifier que tout rationnel, $\sqrt{2}, i$ sont algébriques ; mais on démontre que π et e ne le sont pas (on dit qu'ils sont "transcendants").

(b) Montrer que si x est algébrique, alors

$-x$ est algébrique

$x + r$ est algébrique pour tout $r \in \mathbb{Q}$

rx est algébrique pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$

$\frac{1}{x}$ est algébrique (si $x \neq 0$).

(c) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, $2 \cos \frac{\pi}{9}$ sont algébriques.

(d) On peut montrer, (par des techniques d'algèbre linéaire) que si x et y sont algébriques, alors $x + y$ et xy le sont aussi. Admettant ce résultat, que peut-on dire de la structure de l'ensemble des nombres algébriques muni de l'addition et de la multiplication ?

13. * : Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Montrer que si $P(\sqrt{2}) = 0$, alors $P(-\sqrt{2}) = 0$ et donc P est divisible par $X^2 - 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

(b) En déduire que si $P(1 + \sqrt{2}) = 0$ alors $P(1 - \sqrt{2}) = 0$.

14. * : À l'équation différentielle **(E)** : $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, on associe le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$,

et pour l'expression $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$, on note plus simplement $P[y]$.

Ainsi **(E)** s'écrit aussi : $P[y] = f(x)$

(a) i. Calculer $P[e^{\lambda x}]$, et en déduire une solution particulière de " $P[y] = e^{\lambda x}$ " lorsque $P(\lambda) \neq 0$.

ii. Montrer que $P[xe^{\lambda x}] = (P(\lambda)x + P'(\lambda))e^{\lambda x}$ et en déduire une solution particulière de " $P[y] = e^{\lambda x}$ " lorsque λ est racine simple de P .

iii. Généraliser au cas où λ est racine d'ordre k de P .

15. * : Déterminer tous les automorphismes de l'anneau $\mathbb{C}[X]$, c'est-à-dire les bijections ϕ de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même vérifiant, pour tous P, Q de $\mathbb{C}[X]$

$$\phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q) \text{ et } \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q)$$

16. : Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ (ordre indifférent).

$$X^3 - 1 \quad ; \quad X^3 + 1 \quad ; \quad X^4 - 1 \quad ; \quad X^4 + 1 \quad ; \quad X^4 + X^2 + 1 \quad ; \quad X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \quad ; \\ X^{12} - 1 \quad ; \quad X^6 + 1 \quad .$$

17. :

(a) Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2X^n \cos(2n\theta) + 1$.

$$\text{rep : } \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos \left(2\theta + 2k \frac{\pi}{n} \right) X + 1 \right)$$

(b) Substituer 1 à l'indéterminée X dans l'égalité obtenue et en déduire que $\sin n\theta = \pm 2^{n-1} \sin \theta \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\theta + \frac{k\pi}{n} \right)$, puis que

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

En déduire la valeur de $\sin 1^\circ \sin 2^\circ \dots \sin 89^\circ \sin 90^\circ$ (cf. exercice 3. des fonctions circulaires).

18. :

(a) Calculer $(1-j)(1-j^2)$ et $(2-j)(2-j^2)$

(b) Soit $P = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ exprimée avec $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

(c) Calculer $(1-u)(1-u^2) \cdots (1-u^{n-1})$ et $(2-u)(2-u^2) \cdots (2-u^{n-1})$. Vérifier le calcul de la première question.

(d) En remarquant que $\sin \frac{k\pi}{n} = -\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2i} (1-u^k)$, retrouver la formule

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

19. : Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ un polynôme à coefficients réels. Supposant que P possède une racine $z_1 \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \notin \mathbb{R}$ et $|z_1| \neq 1$, trouver les trois autres racines de P dans \mathbb{C} autres que z_1 , en fonction de z_1 .

20. : Soit $f \in \mathbb{C}[z]$ de degré n .

(a) Montrer que si $n \geq 1$ alors f est surjective.

(b) Montrer que si $n \geq 2$ alors f n'est pas injective.

(c) Montrer que ces résultats sont faux pour $f \in \mathbb{R}[x]$.

21. * : Localisation des racines complexes.

D'après le théorème de D'Alembert, on sait qu'un polynôme à coefficients complexes possède n racines complexes, mais le théorème ne dit pas où elles se trouvent !

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes ($a_n = 1$), z l'une de ses racines, et

$$A = \max_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

(a) Montrer que $|z|^n \leq A \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k$.

(b) En déduire que $|z| \leq A + 1$ (les images des racines se trouvent donc toutes dans le disque de centre O et de rayon $A + 1$).

- (c) Déterminer par exemple un majorant du module des racines de $(2+i)X^3 - 7iX^2 + (9i-2)X - 3i$; puis déterminer exactement ces racines, et le maximum de leur module ; comparer avec le majorant obtenu précédemment.

22. : Les polynômes réels de signe constant.

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} P(x) \geq 0$.

- (a) Montrer que si P n'a pas de racine complexe non réelle, alors $\exists Q \in \mathbb{R}[X] / P = Q^2$.
 (b) Montrer que si P n'a pas de racine réelle, alors $\exists A, B \in \mathbb{R}[X] / P = A^2 + B^2$.
 (c) Que peut-on donc dire dans le cas général ?

23. : Les polynômes réels de signe constant, autre formulation.

- (a) Montrer que le produit de deux sommes de deux carrés de polynômes est une somme de deux carrés de polynômes.
 (b) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} P(x) \geq 0$.
 i. Montrer que ses racines réelles sont d'ordre pair.
 ii. Ecrire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans \mathbb{R} et montrer en utilisant a) que $\exists A, B \in \mathbb{R}[X] / P = A^2 + B^2$.

24. : Résoudre dans \mathbb{C}^3 :
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

25. : Soit x, y, z tels que :
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7 \end{cases} .$$

 Calculer $x^4 + y^4 + z^4$ et $x^5 + y^5 + z^5$.

26. : Déterminer les racines du polynôme $18X^3 + 81X^2 - 44X + 5$ sachant que l'une est le double de l'autre.

27. : Soit $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$.

- (a) Déterminer les racines complexes de P_n ; donner sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Réponse : $P_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + i \cot \frac{k\pi}{n} \right)$

- (b) Calculer la somme des racines de P_n , le produit de ses racines, la somme du carré de ses racines.

- (c) En déduire que si $n = 2p + 1$, $\prod_{k=1}^p \tan \left(k \frac{\pi}{n} \right) = \sqrt{n}$ et $\sum_{k=1}^p \cot^2 \left(k \frac{\pi}{n} \right) = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

28. Dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que :

- (a) $P = X^3 + pX + q$ possède une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Première méthode : écrire que P et P' ont une racine commune.

Deuxième méthode : écrire (après justification) que $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = 0$, où a, b, c sont les racines de P .

maple : `simplify((a-b)^2*(b-c)^2*(c-a)^2, {a+b+c=s1, a*b+b*c+c*a=s2, a*b*c=s3})`;

- (b) * $Q = X^5 + pX^2 + q$ possède une racine multiple si et seulement si $q(3125q^3 + 108p^5) = 0$.

29. * : Soit $P = X^3 + pX^2 + qX + r \in \mathbb{C}[X]$

- (a) Prouver que P a une racine égale à la somme des autres si et seulement si $p^3 - 4pq + 8r = 0$; quelles sont alors ces racines ?
 (b) Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que P ait ses racines en progression arithmétique.
 (c) Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que P ait ses racines en progression géométrique.

30. * : Soit $P = \sum_{k=1}^n a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré n ; notons z_1, \dots, z_p ses racines, z_i étant d'ordre α_i .

(a) Montrer que $\sum_{k=1}^p \alpha_k z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$;

Désignons par M_i l'image de z_i dans le plan ; le barycentre des (M_i, α_i) est un point que nous noterons G_P .

(b) Démontrer que si $n \geq 2$, $G_P = G_{P'}$.

(c) En déduire que G_P est l'image de l'unique racine de $P^{(n-1)}$.

(d) Etudier l'exemple : $P = (3+i)X^4 - 3(3+2i)X^3 - 10(1+i)X^2 - (5+6i)X + 1+i$.

31. * : Résolution de l'équation du troisième degré.

(a) Suppression du terme en X^2 .

Montrer que l'on peut toujours trouver un réel d tel que le polynôme à coefficients réels $X^3 + aX^2 + bX + c$ s'écrive $Y^3 + pY + q$, avec $Y = X - d$.

(b) Montrer que si $p \neq 0$ et $\Delta = 4p^3 + 27q^2 \neq 0$, on peut trouver 4 complexes $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, tels que $X^3 + pX + q = \alpha(X + \lambda)^3 - \beta(X + \mu)^3$.

On trouvera $\lambda + \mu = \frac{3q}{p}$, $\lambda\mu = -\frac{p}{3}$, $\alpha = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$, $\beta = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$.

(c) Résoudre avec cette méthode les équations $2x^3 + 6x^2 - 9 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $x^3 = 15x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ (on donne $(2+i)^3 = 2 + 11i$).

(d) Montrer que si $\Delta > 0$, le polynôme réel $X^3 + pX + q$ possède trois racines distinctes, dont l'une est réelle et les deux autres complexes conjuguées, et que si $\Delta < 0$, il possède trois racines réelles distinctes.

FRACTIONS RATIONNELLES

GÉNÉRALITÉS

32. : Soient P_1, P_2, Q_1, Q_2 des polynômes vérifiant : $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$, avec Q_1 et Q_2 polynômes unitaires de même degré.

A-t-on nécessairement $Q_1 = Q_2$?

33. ** :

(a) Montrer que les relations : $\begin{cases} P_0 = 1, P_1 = X \\ \forall n \geq 1 & P_n^2 + X^2 = 1 + P_{n-1}P_{n+1} \end{cases}$ définissent une unique suite de fractions rationnelles.

(b) Montrer qu'en fait les P_n sont des polynômes.

(c) Reconnaître enfin ces polynômes (avec preuve).

34. ** : les séries formelles

$K^{\mathbb{N}}$ muni des opérations $(a_k) + (b_k) = (a_k + b_k)$ et $(a_k)(b_k) = (c_k)$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ est noté $K[[X]]$ et ses éléments sont appelés des séries formelles, ou polynômes illimités.

(a) Montrer que $K[[X]]$ est un anneau commutatif intègre dont $K[X]$ est un sous-anneau et justifier l'écriture $S = (a_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$.

(b) Montrer que $S = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ est inversible dans $K[[X]]$ ssi $a_0 \neq 0$; donner par exemple les inverses de $1 - X$, de $1 - X - X^2$ et $1 + X + X^2$.

(c) Montrer que toute fraction rationnelle F non nulle de degré $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme $F = X^n S$ où S est une série formelle inversible.

(d) Si S est une série formelle non inversible, montrer qu'on peut poser $e^S = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{S^k}{k!}$; montrer la relation $e^{S+T} = e^S e^T$.

DÉCOMPOSITIONS EN ÉLÉMENTS SIMPLES

35. : Écrire les fractions rationnelles suivantes comme somme de leur partie entière et de leurs parties polaires dans $\mathbb{K}[X]$.

(a)
$$\frac{X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 3}{X^3 + X^2 - X - 1}$$

(b)
$$\frac{X^2 + 3X + 1}{X^4 + 2X^3 + X^2}$$

(c)
$$\frac{X^5 + 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X + 1}{X^6 + X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + X}$$

Indication : il y a six coefficients indéterminés ; 3 se trouvent par la méthode classique, et pour les 3 autres, multiplier par X^3 et égaliser les parties entières des deux membres.

(d)
$$\frac{1}{(X-a)^2(X-b)} (a \neq b).$$

(e)
$$\frac{n!}{X(X+1)(X+2)\dots(X+n)} \text{ (qu'obtient-on de beau en faisant } X := 1 \text{ ?)}$$

(f)
$$\frac{(X+1)^n}{X^n} ; \frac{X^n}{(X-1)^n}.$$

(g)
$$\frac{1}{X(X-1)^3} ; \frac{1}{X(X-1)^n}.$$

36. : Écrire les fractions rationnelles suivantes comme somme de leur partie entière et de leurs parties polaires dans $\mathbb{C}[X]$.

(a)
$$\frac{1}{(X^2+1)^2}$$

(b)
$$\frac{1}{X^n-1}, \frac{X^n+1}{X^n-1} \text{ (utiliser la formule } a_1 = \frac{A(x_0)}{B'(x_0)})$$

(c)
$$\frac{1}{X(X^n-1)}.$$

37. :

(a) Montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{4}$ et $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{5}{9}$.

(b) Montrer que $\sum_{n=2}^N \frac{n}{n^2-1} = h_N - \frac{3}{4} + o(1)$ où $h_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$; en déduire $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1}$;

(c) Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)^2}$, sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Réponses : 3.a. $X+1 + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}$; 3.b. $\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}$;

3.e : $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{X+k}$ 3.g : $\frac{(-1)^n}{X} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(X-1)^k}$; 4.b $\frac{1}{n} \sum_{u^n=1} \frac{u}{X-u}$, $1 + \frac{2}{n} \sum_{u^n=1} \frac{u}{X-u}$. 4.c : $\frac{1}{n} \sum_{u^n=1} \frac{1}{X-u} - \frac{1}{X}$.