I. **LOIS USUELLES**

1. : Dans chacune des situations suivantes, on vous demande de donner la loi de la variable X et de préciser les paramètres de cette loi.

   (a) Après avoir consciencieusement numérotés vos doigts de 1 à 10, vous en choisissez un au hasard. On note X le numéro du doigt choisi.
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

   (b) On note X le nombre de garçons d'une famille de 4 enfants.
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

   (c) On note X le nombre de voyelles dans un mot constitué de 8 lettres distinctes choisies au hasard dans l'alphabet (le mot n'a donc pas nécessairement de sens).
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

   (d) On forme un jury de 6 personnes choisies au hasard dans un groupe composé de 5 hommes et 4 femmes. On note X le nombre de femmes dans le jury.
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

   (e) Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On choisit un animal au hasard dans cet enclos et l'on note X le nombre de bosses de cet animal.
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

   (f) Peggy-Sue possède tous les exemplaires de Jeune & Jolie du numéro 1 au numéro 1000. Il n'y a qu'une chance sur un million de trouver un article de foot dans chaque numéro. Le frère de Peggy-Sue décide de les lire dans l'ordre. On note X le numéro du premier exemplaire où il trouve une information footballistique (avec $X = 0$ s'il n'en trouve pas).
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

   (g) On range au hasard 9 clés dans 3 tiroirs. On note X le nombre de clés dans le premier tiroir.
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

   (h) Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne. On note X le nombre de boules vertes obtenues.
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

   (i) Seul 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles et on note X de nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
   $\mathcal{U}(\ ,\ )$, $\mathcal{B}(\ ,\ )$, $\mathcal{H}(\ ,\ ,\ )$, autre loi

2. Convergence de l'hypergéométrique vers le binomial dans un cas simple.

   Un élevage comprend le même nombre n de souris mâles et de souris femelles. On prélève sans remise deux animaux. Calculer la probabilité p_n que le prélèvement soit constitué d'un mâle et d'une femelle. Montrer que cette probabilité tend bien vers la probabilité (qui ne dépend pas de n) que le prélèvement soit constitué d'un mâle et d'une femelle lors d'un tirage avec remise.

3. Convergence de l'hypergéométrique vers le binomial dans le cas général.

   (a) Rappeler pourquoi la probabilité d'avoir k boules du type 1 lors du tirage *simultané* de n boules dans une urne contenant N boules dont pN sont du type 1, et qN du type 2 vaut $p_N = \dfrac{\begin{pmatrix} pN \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} qN \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$.

   (b) On fixe p, rationnel de dénominateur a et de numérateur b; si N est multiple de a, pN (et qN) sont bien entiers.
   Montrer que lorsque l'entier K tend vers l'infini, la probabilité p_{Ka} tend vers $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$.
   (donc pour N grand, avec ou sans remise, c'est kif-kif).

4. Équivalence entre le tirage simultané et le tirage successif sans remise. Probabilité de succès à chaque étape.

   On considère une urne contenant N boules avec pN boules de type 1 et qN boules de type 2. On considère que tirer une boule de type 1 est un succès, (et une boule de type 2 est un échec). On note E l'ensemble des boules.

(a) On tire simultanément n boules au hasard ; rappeler quel est l'univers Ω correspondant à cette expérience, et la loi de la variable S donnant le nombre de succès.

(b) On effectue maintenant une succession de n tirages sans remise ; l'univers est donc $\Omega' = \{(x_1, ..., x_n) \in E^n$ / les x_k sont dis
On note X_k la variable qui vaut 1 si le k-ième tirage est un succès, 0, sinon. enfin, on pose $S_k = X_1 + ...X_k$.

i. Soit $k \in [|1, n-1|]$ et $l \in [|0, k|]$; montrer que $P(X_{k+1} = 1|S_k = l) = \dfrac{Np - l}{N - k}$.

ii. En déduire que $P(X_{k+1} = 1) = \dfrac{Np - E(S_k)}{N - k}$.

iii. En déduire par récurrence, que X_k suit une loi binomiale de paramètre p, ainsi que l'espérance de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$.

5. Calcul de l'espérance et de la variance de $\mathcal{H}(N, n, p)$.

On considère une urne contenant N boules avec pN boules de type 1 et qN boules de type 2. On considère que tirer une boule de type 1 est un succès, (et une boule de type 2 est un échec). On effectue une succession de n tirages sans remise ; On note X_k la variable qui vaut 1 si le k-ième tirage est un succès, 0, sinon.

(a) Montrer par un dénombrement que $P(X_k = 1) = p$.

(b) Montrer que pour $i \neq j$, $P(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1) = p\dfrac{Np - 1}{N - 1}$

(c) En déduire l'espérance et la variance de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$.

6. La loi multinomiale.

(a) Un cas particulier.
On lance $n(n+1)/2$ fois un dé à n faces identiques. Quelle est la probabilité que la face une sorte une fois, la face deux, deux fois,..., la face n, n fois ?

(b) On considère une expérience aléatoire à k résultats possibles, le résultat numéro i ayant une probabilité p_i de se réaliser.
On répète n fois cette expérience de manière indépendante, et on note X_i la variable aléatoire comptant le nombre de fois ou le résultat i a été réalisé durant ces n expériences.

i. Quelle loi suit X_i?

ii. Quelle loi de probabilité de $(X_1, ..., X_k)$ (autrement dit la probabilité $p_{n_1,...,n_k}$ de l'évènement $\{(X_1, ..., X_k) = (n_1, ..., n$

REP : $\dfrac{n!}{n_1!...n_k!} p_1^{n_1} ... p_k^{n_k}$.

(c) Décrire un exemple d'expérience aléatoire du type précédent avec une urne et des boules.

(d) Donner les espérance et variance de X_i, la covariance de (X_i, X_j).

7. On considère un ensemble de N jetons ayant deux formes possibles (rond ou carré), et deux couleurs possibles (bleu ou vert).

Il y a N_1 jetons ronds bleus, N_2 jetons ronds vert, N_3 jetons carrés bleus, N_4 jetons carrés verts ; on pose $p_i = \dfrac{N_i}{N}$.

On tire au hasard, AVEC REMISE, n jetons, et on note R le nombre de jetons ronds, et B le nombre de jetons bleus.

(a) Quelles sont les lois de R et B ?

(b) Montrer que $P(R = i, B = j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{n!}{k!\,(i-k)!\,(j-k)!\,(n-i-j+k)} p_1^k p_2^{i-k} p_3^{j-k} p_4^{n-i-j+k}$

II. COVARIANCE, INDÉPENDANCE.

8. Soient X une variable qui suit la loi uniforme sur $[[0, 3]]$ et $Y = (X - 1)^2$. Donner la loi conjointe et la covariance de (X, Y).

9. Soient X et Y deux variables aléatoires; montrer qu'elles sont non corrélées ssi $X + Y$ et $X - Y$ ont même variance.

10. On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite numérotée k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boule dans une boite. On note X le numéro de la boite et Y celui de la boule.

(a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

(b) En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme). Déterminer $E(Y)$ puis un équivalent de $E(Y)$ quand $n \to +\infty$.

11. Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ n évènements mutuellement indépendants. Quelle est la probabilité de leur réunion en fonction des $P(A_i)$?

12. : Montrer que si B est indépendant de A, et C indépendant de A, de B et de $A \cup B$, alors A, B, C sont mutuellement indépendants.

    Indication : il faut démontrer que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ à partir de $P(C \cap (A \cup B)) = P(C)P(A \cup B)$.

13. Soient A, B, C trois évènements deux à deux disjoints (ou incompatibles) de même probabilité . Montrer qu'il y a une valeur de p telle que $A \cup B, B \cup C, C \cup A$ sont deux à deux indépendants. Sont-ils alors mutuellement indépendants ?

14. Soient A, B, C trois évènements deux à deux disjoints de même probabilité, X un évènement de probabilité $q > 0$, disjoint des trois autres, $A' = A \cup X, B' = A \cup X, C' = C \cup X$

    (a) A quelle condition a-t-on (1) $P(A' \cap B' \cap C') = P(A')P(B')P(C')$?

    (b) A quelle condition a-t-on (2) $P(A' \cap B') = P(A')P(B')$?

    (c) En déduire un exemple simple où (1) est vraie, et (2) fausse, et un exemple où (2) est vraie et (1) fausse.

15. Est-il exact que si parmi 3 évènements chacun est indépendant de la réunion des deux autres, alors ces 3 évènements sont mutuellement indépendants ?

    REP : non, chercher un contre-exemple avec A', B', C' définis dans l'exercice précédent.

16. :

    Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau :

    (a)

$X\backslash Y$	0	1	2	loi de X
0	a	b	c	$a+b+c$
1	d	e	f	$d+e+f$
loi de Y	$a+d$	$b+e$	$c+f$	

    (b) Quel est la covariance de (X, Y) ?

    (c) Donner un exemple simple de valeurs où la covariance est nulle, mais où X et Y ne sont pas indépendantes.
    Conseil : prendre $c = 0$, et se débrouiller pour que $\{X = 0\}$ et $\{Y = 2\}$ ne soient pas indépendants.

17. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans I et f une fonction réelle injective sur I alors X et $f(X)$ ne sont pas indépendantes, sauf si X suit une loi du tout ou rien ($P(X = x) = 0$ ou 1).

18. Inégalité de Kosmanek.

    Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux variables X_A et X_B, et en déduire que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}$$

    Donner un exemple où $P(A \cap B) = \frac{1}{4} + P(A)P(B)$, et un exemple où $P(A)P(B) = \frac{1}{4} + P(A \cap B)$.

19. Loi faible des grands nombres.

    Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes de même espérance m et de même variance σ^2. On pose $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$ la moyenne des n premières variables.

    (a) Montrer que pour $\varepsilon > 0, P\left(\left|\overline{X_n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon}$ et en déduire la limite de cette quantité quand n tend vers l'infini. Interpréter.

(b) Application : on dispose d'une pièce de monnaie donnant pile avec probabilité p, p inconnu. Proposer une méthode permettant de donner une valeur approchée de p, notée $\widetilde{p}$, telle que la valeur réelle de p diffère de $\widetilde{p}$ de moins de 0,001 avec une probabilité supérieure à 0,999.

Réponse : lancer la pièce au moins un million de fois.

20. On doit expédier n objets de valeurs $x_1, ..., x_n$ dans un pays où la probabilité que le paquet arrive à bon port vaut p.

Soit X la valeur totale de l'envoi dans le cas où on envoie les n objets ensemble, et Y cette valeur quand on envoie les objets séparément. On demande les espérance et variance de X et Y.

REP : $E(X) = E(Y) = p\sum_{i=1}^{n} x_i$; $V(X) = p(1-p)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$; $V(X) = p(1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

21. : Calcul de l'indicateur d'Euler par une méthode probabiliste.

Soit $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ un entier > 0 décomposé en produit de facteurs premiers.

On tire au hasard un entier m entre 1 et n.

(a) Soit q un diviseur > 0 de n ; quelle est la probabilité que m soit un multiple de q ?

(b) Pour $i = 1..k$, soit A_i l'événement : $\{m$ est multiple de $p_i\}$; montrer que les A_i sont mutuellement indépendants.

(c) En utilisant le fait que les évènements contraires sont eux aussi indépendants, calculer la probabilité que m soit premier avec n.

(d) On appelle indicateur d'Euler de n et on note $\varphi(n)$ le nombre de nombres entre 1 et n premiers avec n ; montrer que

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) ... \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$$

Calculer $\varphi(100)$.