II. 1) NOTATIONS $\sum$ ET $\prod$

1. : Sommes des puissances p-ièmes des n premiers entiers.

   Posons : $a_n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$; $c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$; $d_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$.

   (a) En remarquant que $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$, montrer que $c_{n+1} = c_n + 3b_n + 3a_n + n + 1$; en déduire la valeur de b_n.

   (b) Montrer de même que $d_{n+1} = d_n + 4c_n + 6b_n + 4a_n + n + 1$; en déduire la valeur de c_n.
   $\left[\text{Rep : } b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ c_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2\right]$

   (c) * Généralisation : si $S_n^p = \sum_{k=0}^{n} k^p$, montrer la formule de récurence de Pascal (1654) :

$$(p+1)\, S_n^p = (n+1)^{p+1} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_n^k.$$

   (d) * Calculer $d_n = S_n^4$ et vérifier que $d_n = (6a_n - 1)\, b_n/5$.

2. : Remplir le tableau après avoir calculé les sommes correspondantes :

$a_{i,j} =$	1	i	j	$i+j$	ij
$\sum_{1\leqslant i,\ j\leqslant n} a_{i\ j} =$					
$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i\ j} =$					

3. :

   (a) Calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} \min(i,j)$.

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} \max(i,j)$, puis celle de $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} |i-j|$.

4. * Inégalité de Tchebychev :

   (a) Montrer que

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

   (b) En déduire que si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n}$$

   (autrement dit, lorsque deux séries de n nombres sont rangés dans l'ordre croissant, le produit de leurs moyennes est inférieur ou égal à la moyenne de leurs produits)

5. * :

   (a) Démontrer l'identité de Lagrange :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

   (b) En déduire que le produit de 2 sommes de 2 carrés (parfaits) est encore une somme de 2 carrés, et que plus généralement, le produit de 2 sommes de n carrés est une somme de .... carrés.

(c) En déduire, pour $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $\overrightarrow{v} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)}$$

A quelle CNS portant sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ a-t-on égalité entre les deux membres de cette égalité ?

6. * : Inégalité entre écart-type et écart moyen.

(a) Montrer que si $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2$.

Indication : partir de $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = 0$.

(b) En déduire que si σ est l'écart-type de la série de nombres $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et σ' son écart-moyen, alors $\sigma \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}}\sigma'$.

Rappel : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - m)^2}{n}}$ et $\sigma' = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k - m|}{n}$, où m est la moyenne arithmétique des a$_k$.

7. * : Encadrement de Gauss de la factorielle :

(a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $n! = \prod\limits_{\substack{i+j=n+1 \\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{ij}$

(b) Montrer que si $i \geqslant 1$ et $j \geqslant 1$, alors $i + j - 1 \leqslant ij \leqslant \left(\dfrac{i+j}{2}\right)^2$.

(c) En déduire l'encadrement : $n^{\frac{n}{2}} \leqslant n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

8. * : Un encadrement de $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$:

(a) Montrer que :

$$\frac{\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} k}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{4^n}$$

(b) En déduire que pour $n \geqslant 1$: $\dfrac{4^n}{2n} \leqslant \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \leqslant \dfrac{4^n}{2}$.

II 2)3) **RÉCURRENCES, BINÔME**

9. (inégalité de Bernoulli) : Montrer que si $x \geqslant -1$, alors pour tout n entier naturel, $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

(a) Par récurrence.

(b) En utilisant la formule du binôme, uniquement pour $x \geqslant 0$.

(c) En utilisant la formule de Bernoulli, uniquement pour $x \geqslant 0$.

(d) Proposez une quatrième méthode.

10. : On donne $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$; conjecturer une formule pour la dérivée n-ième $f^{(n)}(x)$ et la montrer par récurrence.

11. : Partant de $u_0 = 1$, calculer u_1, u_2, u_3 puis conjecturer une formule pour u_n et la démontrer par récurrence, dans les cas suivants :

   (a) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$

   (b) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$

   (c) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$

12. (nombres de Catalan) : On pose $C_0 = 1$ et $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

   (a) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

   (b) Montrer par récurrence simple que $C_n \geqslant 2^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 0$.

   (c) * Montrer par récurrence forte que $C_n \geqslant 3^{n-2}$ pour tout $n \geqslant 0$.

   (d) * Tenter de montrer par une récurrence similaire à celle de c) $C_n \geqslant 4^{n-2}$ pour tout $n \geqslant 0$. A quel endroit ceci échoue-t-il ? Pourquoi est-il heureux que cette démonstration échoue ?

13. * : Variantes de raisonnements par récurrence.

   Parmi les énoncés suivants, lesquels permettent d'en déduire que P_n est vraie pour tout naturel n ?

   (a) P_0 est vraie et pour tout naturel n, $P_n \Rightarrow (P_{2n}$ et $P_{2n+1})$.

   (b) P_0 et P_1 sont vraies et pour tout naturel $n \geqslant 1$, $P_n \Rightarrow (P_{2n}$ et $P_{2n+1})$.

   (c) P_0 , P_1, P_2 sont vraies et pour tout naturel $n \geqslant 2$, $P_n \Rightarrow (P_{2n}$ et $P_{2n+1})$.

   (d) P_1 est vraie, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $P_n \Rightarrow P_{n-1}$ et pour tout naturel n, $P_n \Rightarrow P_{2n}$ (récurrence de Cauchy).

   (e) P_0 et P_1 sont vraies et pour tout naturel $n \geqslant 1$, $P_{2n} \Rightarrow (P_{2n-1}$ et $P_{2n+1})$.

14. :

   (a) Vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   (b) Conjecturer une formule générale pour $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{p}} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+p-1)$, où p est un naturel donné, et la montrer par récurrence.

   (c) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

   (d) Écrire $\dfrac{S_n}{p!}$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{\ldots}{\ldots}$; en déduire une deuxième façon de calculer S_n.

   REM : écrite sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{p}} = \frac{n^{\overline{p+1}}}{(p+1)!}$, la formule du b) est facile à retenir !

15. :

   (a) Déterminer un diviseur commun > 1 aux nombres $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$ (pour $n \geqslant 1$).

   (b) Déterminer un diviseur commun > 1 aux nombres $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ (pour $n \geqslant 1$).

16. * : n droites sont situées dans un plan, sans que deux d'entre elles ne soient parallèles ni trois d'entre elles concourantes ; déterminer le nombre de régions déterminées par ces n droites.

17. * : Inégalité de convexité.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et vérifiant
$$\forall x_1, x_2 \in I \ \forall t \in [0,1] \quad f\left((1-t)\,x_1 + tx_2\right) \leqslant (1-t)\,f\left(x_1\right) + tf\left(x_2\right)$$
(définition d'une fonction convexe).
Montrer par récurrence que pour toute suite de n nombres $(t_1, ..., t_n)$ positifs ou nuls de somme égale à 1 et toute suite $(x_1, ..., x_n)$ de n réels appartenant à I
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f\left(x_i\right)$$

18. * : Inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique.
    (a) Montrer que si n réels positifs ont un produit égal à 1, alors l'un d'entre eux est $\leqslant 1$ et un autre est $\geqslant 1$; montrer que ces deux nombres x et y vérifient alors $x + y \geqslant 1 + xy$.
    (b) Montrer par récurrence sur n que si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont n réels positifs de produit égal à 1, alors leur somme est $\geqslant n$.
    (c) En déduire que si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont n réels positifs, $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

19. * : Inégalité de Tchebychev généralisée (cf ex 4).
Montrer que si $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ sont deux suites croissantes de n réels, et $(t_1, ..., t_n)$ une suite de n réels positifs ou nuls de somme égale à 1, alors
$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i b_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i a_i b_i$$
(Commencer par le cas $n = 2$ puis procéder par récurrence).

20. * : Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 à partir duquel tout entier peut s'écrire sous la forme $5a + 7b$ avec a, b entiers naturels.

21. * : Dans un polyèdre convexe à $n \geqslant 4$ faces, montrer que le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets plus $n - 2$ (cette identité s'appelle la *relation d'Euler*).

22. * : Une drôle de façon de définir la multiplication, l'exponentiation etc...
On définit $f_n(a,b)$ pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} f_1(a,b) = a + b \\ f_n(a,1) = a \text{ pour tout entier } n \geqslant 2,\ a \geqslant 1 \\ f_n(a,b) = f_{n-1}\left(a,\ f_n(a, b-1)\right) \text{ pour tout entier } a \geqslant 1, b \geqslant 2, n \geqslant 2 \end{cases}$$
Calculer $f_2(a,b)$, $f_3(a,b)$, $f_4(a,b)$, $f_5(a,2)$, $f_n(2,2)$, $f_5(3,3)$.

23. : Calculer 3^5 en base 2 en utilisant la formule du binôme.

24. : Montrer que pour n entier $\geqslant 1$, $(n+1)^n \geqslant 2n^n$.

25. : Somme alternée partielle d'une ligne du triangle de Pascal.
Montrer la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$ (pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$)
    (a) En partant de $\binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1}$ et en itérant.
    (b) Par récurrence sur n.
    (c) Par récurrence sur p, avec la convention que si $p \geqslant n$, $\binom{n-1}{p} = 0$.

26. :

(a) Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ en transformant l'expression $k \binom{n}{k}$ de sorte que le nombre situé avant le coefficient binomial ne dépende pas de k.

(b) Calculer $\sum_{k=p}^{n} k \binom{k-1}{p-1}$, pour $n \geqslant p$.

27. : Calculer à l'aide de la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^n$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$

(c) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$

(d) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

28. * :

(a) Calculer le coefficient de x^k dans $(1+x)^{p+q}$ puis dans $(1+x)^p (1+x)^q$; en déduire la *formule de convolution,* ou *de Van der Monde* : $\sum_{i+j=k} \binom{p}{i} \binom{q}{j} = \binom{p+q}{k}$; la vérifier pour $k = 2, p = 3, q = 4$.

(b) Que retrouve-t-on pour $p = q = k = n$?

(c) Montrer que plus généralement, le produit scalaire de la ligne p par la ligne q du triangle de Pascal est égal à $\binom{p+q}{p}$.

(d) Déduire de la formule de convolution la formule : $\sum_{i+j=k} i \binom{p}{i} \binom{q}{j} = p \binom{p+q-1}{k-1}$ (utiliser $i \binom{p}{i} = p \binom{p-1}{i-1}$) ; en déduire que $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}$.

29. *: Calculer $\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} \binom{n-j}{j-i}$ en utilisant la formule de convolution, exercice précédent.

30. * : Formule de convolution, preuve par récurrence. On admet dans cet exercice que si l'on pose $\binom{b}{a} = 0$ pour tous entiers a, b ne vérifiant pas $0 \leq a \leq b$, la relation de Pascal $\binom{b+1}{a} = \binom{b}{a} + \binom{b}{a-1}$ est valable pour tous les entiers a, b.

(a) On demande de démontrer par récurrence sur n que pour tous entiers naturels m, p :

$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m-n}{p-k}$$

(b) Retrouver la formule $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

(c) Vérifier que la formule du a. est bien équivalente à la formule de convolution (exercice 28).

31. * : Trouver une formule issue de l'égalité triviale : $(1+2x)^n = (1+x+x)^n$.

32. * : Que vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k$? Que peut on en déduire ?

33. : Donner la valeur du coefficient de x^{2n} dans $\left(x^2-1\right)^{2n}$, puis dans $(x-1)^{2n}(x+1)^{2n}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2$.

34. * : On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n}$; en utilisant la relation de Pascal, montrer que $S_{n+1} = 2\left(S_n + \frac{1}{2}\binom{2n+1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(S_{n+1} - \binom{2n+2}{n+1}\right)$; simplifier cette relation entre S_{n+1} et S_n et en déduire la valeur de S_n.

35. * : Puissances factorielles descendantes et formule de Van der Monde :

    (a) Étant donné un réel x et un entier $n \geqslant 1$, on note $x^{\underline{n}}$ et on lit "x puissance n descendant" le nombre $x(x-1)..(x-n+1)$, avec pour convention $x^{\underline{0}} = 1$; montrer que
    $$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{n-k}}\, y^{\underline{k}}$$

    (b) Définir de même les puissances factorielles montantes. A t-on la même pseudo-formule du binôme ?

36. * : Démontrer que pour $n \geqslant 1$, $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{2n}}$.
    [En fait, la meilleure majoration est : $\binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, mais cela nécessite des techniques d'analyse].

37. * : Démontrer par récurrence sur k, que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k$.

38. * : Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n,p} = \frac{(2n)!\,(2p)!}{n!p!\,(n+p)!}$.

    (a) Calculer $u_{n+1,p} + u_{n,p+1}$ et en déduire que $u_{n,p}$ est entier pour tout n et pour tout p.

    (b) En déduire que $\binom{n+p}{n}$ divise $\binom{2n}{n} \times \binom{2p}{p}$.

39. * : Soit $P(n,p)$ un énoncé dépendant de deux variables entières naturelles.

    (a) Je sais que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, si $P(n,p)$ est vrai alors $P(n+1,p)$ est vrai aussi. Quelles propriétés supplémentaires me suffit–il d'avoir pour être sûr que $P(n,p)$ est vrai pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$?

    (b) Même question, lorsque je sais que si pour $n, p \geqslant 1$ $P(n-1,p)$ et $P(n,p-1)$ sont vrais simultanément, alors $P(n,p)$ est vrai.

    (c) Je sais que $K_n^0 = K_0^p = 1$ pour tout n et p dans $\mathbb{N}$.
    Je sais aussi que $K_n^p = K_{n-1}^p + K_n^{p-1}$ pour tout n et p dans $\mathbb{N}$.
    Que vaut K_n^p ?

40. * : Étudier le triangle infini

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5}
\end{array}$$

II. 4) FORMULE DE BERNOULLI

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \ ; \ a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k}b^k \text{ pour } n \text{ impair}$$

41. :

(a) Montrer que pour $0 < x < y$ réels, on a :

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} < \frac{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}}{y-x} < \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

(b) Interpréter graphiquement ces inégalités (considérer la courbe de la fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$)

(c) Généraliser.

42. n est un entier $\geqslant 1$.

(a) Montrer que si $a \geqslant b \geqslant 0$ alors $a^n - b^n \geqslant nb^{n-1}(a-b)$.

(b) * : En déduire que si $(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ est solution de l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$, alors x et y sont $\geqslant n$ (en réalité, cette équation n'a jamais de solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$ pour $n \geqslant 3$, mais la démonstration en est beaucoup, beaucoup plus difficile...).

43. :

(a) Montrer que la différence de deux puissances de 10 est toujours divisible par 9.

(b) En déduire que si l'on effectue une permutation sur les chiffres d'un nombre (par exemple, on écrit 1327 à la place de 7312), l'erreur que l'on commet est toujours divisible par 9.

44. Montrer que si n n'est pas premier, le nombre qui s'écrit $\underbrace{1...1}_{n\times 1}$ en base a (a entier $\geqslant 2$) n'est pas premier.

45. : Montrer que si n n'est pas une puissance de 2, le nombre qui s'écrit $1\underbrace{00...00}_{(n-1)\times 0}1$ en base a (a entier $\geqslant 2$) n'est pas premier.