0) QUELQUES CALCULS PARADOXAUX

1. : Un exercice anti proportionnalité.

   (a) 100 g de produit requièrent un emballage pesant 10 g ; quel est le poids de l'emballage pour 200 g de produit ?

   (b) Un nénuphar qui double de taille tous les jours met 20 jours pour couvrir la surface d'un étang ; combien de temps mettront 2 nénuphars (qui ne se chevauchent pas) ?

   (c) Un caillou met 1 s pour tomber dans un puits de 10 m. Combien de temps mettra-t-il pour tomber dans un puits de 20 m ?
   Réponses :

	(a)	(b)	(c)
solution (erronée) par proportionnalité	$2 \times 10g = 20g$	$20/2 = 10$ jours	2 s
solution exacte	$2^{\frac{2}{3}} \times 10g \approx 15,9g$	$20 - 1 = 19$ jours	$\sqrt{2}$ s $\approx 1,4$ s

2. : Un exercice anti moyenne arithmétique.

   (a) Pierre fait une certaine distance en vélo à la vitesse v_1, puis la même distance à pied à la vitesse v_2. Quelle est la vitesse moyenne v ? Vérifier que v n'est pas la moyenne arithmétique de v_1 et v_2 mais qu'il existe une fonction f telle que $f(v)$ est la moyenne arithmétique de $f(v_1)$ et $f(v_2)$.

   (b) Pierre et Paul partent en même temps, l'un à pied à la vitesse v_1, l'autre en vélo à la vitesse v_2 ; Paul laisse son vélo et continue à pied ; quand Pierre trouve le vélo de Paul, il continue à vélo, et les deux arrivent en même temps. Quelle est la vitesse moyenne ?

1) INÉGALITÉS ET VALEURS ABSOLUES

3. : Montrer que la valeur absolue du produit de deux réels est inférieure ou égale à la moyenne de leurs carrés.

4. : Montrer pour a, b, c réels $\left\{\begin{array}{c} c = ab \\ 0 \leqslant a \leqslant b \end{array}\right. \Rightarrow a \leqslant \sqrt{c} \leqslant b$; à quoi ceci sert-il en arithmétique ?

5. : Compléter les trous :

$$\begin{array}{rcl}
\text{a) } \forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad x^2 = y^2 \boxed{} x = y \\
\text{b) } \forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad x^2 = y^2 \Leftrightarrow \left(x = y \boxed{}\right) \\
\text{c) } \forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad \sqrt{x} = y \boxed{} x = y^2 \\
\text{d) } \forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 \text{ et } \boxed{} \\
\text{e) } \forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad x = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \boxed{} \\
\text{f) } \forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad x^2 \leqslant y^2 \boxed{} 0 \leqslant x \leqslant y
\end{array}$$

6. : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x(\sqrt{x} + 3) = 4$.

7. : Pour x et $y \geqslant 0$, classer par ordre croissant $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\sqrt{x + y}$, et $2\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$.

8. : Vrai ou faux ?

   (a) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad |b|$ et $|d| \leqslant 1 \Longrightarrow |ab + cd| \leqslant |a + c|$

   (b) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad |b|$ et $|d| \leqslant 1 \Longrightarrow |ab + cd| \leqslant |a| + |c|$

9. Vrai ou faux ?
   $\forall a, b, c, d, a', b', c', d' > 0 \quad \dfrac{a}{b} < \dfrac{a'}{b'}$ et $\dfrac{c}{d} < \dfrac{c'}{d'} \Longrightarrow \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{a'+c'}{b'+d'}$?

10. a est un réel et n un entier naturel non nul ;

    (a) Montrer $|a| \geqslant 1 \Rightarrow \left|a^{n+1}\right| \geqslant |a^n| \geqslant 1$; que dire quand $|a| \leqslant 1$?

    (b) $I_n = \int_0^\pi \sin^n x dx$; comparer I_n et I_{n+1}.

11. : Tous les réels intervenant ici sont > 0 ; On suppose $a < bc$;
   (a) Montrer qu'il existe $a_1 < b$ et $a_2 < c$ tels que $a = a_1 a_2$.
   (b) Montrer qu'on peut choisir a_1 et a_2 ci-dessus de sorte que $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{c}{b}$, et qu'il y alors unicité de (a_1, a_2).

12. : Montrer que $||a| - |b|| \leqslant |a+b|$ (question de cours) puis $||a| - |b|| \leqslant |a+c| + |b+c|$.

13. : Montrer que $|\max(a,b) - \max(c,d)| \leqslant \max(|a-c|, |b-d|)$.

14. : Montrer, si possible sans passer par des encadrements, que si $|x-2| \leqslant \dfrac{1}{4}$ alors $\left|1 - \dfrac{x}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{8}, \left|1 - \dfrac{2}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{7}$ et $\left|x^2 - 4\right| \leqslant \dfrac{17}{16}$.

15. : Démontrer que pour n entier pair, $1 + x + x^2 + ... + x^n$ reste constamment > 0.

16. * : Le fisc égyptien.
   Pour le calcul des impots fonciers, le fisc égyptien utilisait la formule suivante pour l'aire d'un champ quadrilatéral (supposé convexe) : produit des moyennes des longueurs des côtés opposés . Etait-il gagnant ? Quels sont les quadrilatères pour lesquels la formule est exacte ?

2) PARTIES ENTIÈRES

Dans ces exercices, x, y, $x_1, ..., x_n$ désignent des réels.

17. * :
   (a) Vérifier que si n est entier, $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$ et $\text{frac}(x+n) = \text{frac}(x)$.
   (b) Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, avec égalité à gauche si $\text{frac}(x)+ \text{frac}(y) < 1$ et égalité à droite sinon.
   Indication : poser $x = n + u$ avec $n = \lfloor x \rfloor$ et $u = \text{frac}(x)$, et de même $y = m + v$.
   En déduire $\text{frac}(x) + \text{frac}(y) - 1 \leqslant \text{frac}(x+y) \leqslant \text{frac}(x) + \text{frac}(y)$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor \leqslant \left\lfloor \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor + n - 1$ et donner les cas d'égalité à gauche et à droite.
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \; n \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant n \lfloor x \rfloor + n - 1$ et donner les cas d'égalité à gauche et à droite.
   (e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

18. * :
   (a) Montrer les inégalités et donner les cas d'égalité à gauche et à droite.
      i. $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - 1 \leqslant \lfloor x - y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ (égalité à droite ssi $\text{frac}(x) \geqslant \text{frac}(y)$).
      ii. $\text{frac}(x) - \text{frac}(y) \leqslant \text{frac}(x-y) \leqslant \text{frac}(x) - \text{frac}(y) + 1$
   (b) Démontrer que $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ sauf si x est entier où alors $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$; en déduire $\text{frac}(-x) = 1 - \text{frac}(x)$ sauf si x est entier.
   (c) En déduire $\forall n \in \mathbb{Z}_- \quad n(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant n \lfloor x \rfloor$.

19. : Démontrer
   (a) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$ (séparer les cas $\text{frac}(x) < 1/2$ et $\text{frac}(x) \geqslant 1/2$);
   (b) En déduire le calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.
   (c) Généraliser (b) à la relation: $\lfloor nx \rfloor = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor (n \in \mathbb{N}^*)$.

20. * :

   (a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. (on verra que cela se traduit par $[x] \underset{x\to+\infty}{\sim} x$)

   (b) En déduire $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$. Tracer le graphe de $x \mapsto x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ entre -2 et 2 (justifier les constructions).

21. : Soient $x < y$ deux réels ; montrer que le nombre d'entiers strictement compris entre x et y est $\lceil y \rceil - \lfloor x \rfloor - 1$.

22. * : **La conversion Euros - Francs**
Soit a un réel > 1 ; on définit la fonction $franc$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $franc(x) =$arrondi$(ax) = \lfloor ax + 1/2 \rfloor$ et la fonction $euro$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $euro(x) =$arrondi$\left(\dfrac{x}{a}\right) = \left\lfloor \dfrac{x}{a} + 1/2 \right\rfloor$; lorsque $a = 6,55957$, $franc$ est la fonction de conversion euros-francs et $euro$ la fonction de conversion francs-euros, avec arrondi au franc ou à l'euro le plus proche.

   (a) Montrer que $euro \circ franc = id_{\mathbb{N}}$ mais que $franc \circ euro \neq id_{\mathbb{N}}$; montrer que

$$x - \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leqslant franc(euro(x)) \leqslant x + \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$$

   donner un exemple avec chacun des cas extrêmes.

   (b) Que peut-on dire de $euro \circ franc \circ euro$, de $franc \circ euro \circ franc$, de $(franc \circ euro)^2$?