I. QUELQUES CALCULS PARADOXAUX

1. : Un exercice anti règle de trois.

   (a) 100 g de produit requièrent un emballage pesant 10 g ; quel est le poids de l'emballage pour 200 g de produit ?

   (b) Un nénuphar qui double de taille tous les jours met 20 jours pour couvrir la surface d'un étang ; combien de temps mettront 2 nénuphars (qui ne se chevauchent pas) ?

   (c) Un caillou met 1 s pour tomber dans un puits de 10 m. Combien de temps mettra-t-il pour tomber dans un puits de 20 m ?
   Réponses :

	(a)	(b)	(c)
solution (erronée) par proportionnalité	$2 \times 10g = 20g$	$20/2 = 10$ jours	2 s
solution exacte	$2^{\frac{2}{3}} \times 10g \approx 15,9g$	$20 - 1 = 19$ jours	$\sqrt{2}$ s $\approx 1,4$ s

2. : Un exercice anti moyenne arithmétique.

   (a) Pierre fait une certaine distance en vélo à la vitesse v_1, puis la même distance à pied à la vitesse v_2. Quelle est la vitesse moyenne v ? Vérifier que v n'est pas la moyenne arithmétique de v_1 et v_2 mais qu'il existe une fonction f telle que $f(v)$ est la moyenne arithmétique de $f(v_1)$ et $f(v_2)$.

   (b) Pierre et Paul partent en même temps, l'un à pied à la vitesse v_1, l'autre en vélo à la vitesse v_2 ; Paul laisse son vélo et continue à pied ; quand Pierre trouve le vélo de Paul, il continue à vélo, et les deux arrivent en même temps. Quelle est la vitesse moyenne ?

II. INÉGALITES ET VALEURS ABSOLUES

3. : Montrer que la valeur absolue du produit de deux réels est inférieure ou égale à la moyenne de leurs carrés.

4. : Montrer pour a, b, c réels $\left\{\begin{array}{c} c = ab \\ 0 \leqslant a \leqslant b \end{array}\right. \Rightarrow a \leqslant \sqrt{c} \leqslant b$; à quoi ceci sert-il en arithmétique ?

5. : Compléter les trous :

$$\begin{array}{lcl}
\forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad x^2 = y^2 \boxed{} \; x = y \\
\forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad x^2 = y^2 \Leftrightarrow \left(x = y \boxed{}\right) \\
\forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad \sqrt{x} = y \boxed{} x = y^2 \\
\forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 \text{ et } \boxed{} \\
\forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad x = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \boxed{} \\
\forall x, y & \in & \mathbb{R} \quad x^2 \leqslant y^2 \boxed{} 0 \leqslant x \leqslant y
\end{array}$$

6. : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x\left(\sqrt{x} + 3\right) = 4$.

7. : Pour x et $y \geqslant 0$, classer par ordre croissant $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\sqrt{x + y}$, et $2\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$.

8. : Vrai ou faux ?

   (a) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad |b|$ et $|d| \leqslant 1 \Longrightarrow |ab + cd| \leqslant |a + c|$

   (b) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad |b|$ et $|d| \leqslant 1 \Longrightarrow |ab + cd| \leqslant |a| + |c|$

9. a est un réel et n un entier naturel non nul ;

   (a) Montrer $|a| \geqslant 1 \Rightarrow \left|a^{n+1}\right| \geqslant |a^n| \geqslant 1$; que dire quand $|a| \leqslant 1$?

   (b) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$; comparer I_n et I_{n+1}.

10. : Tous les réels intervenant ici sont > 0 ; On suppose $a < bc$;

   (a) Montrer qu'il existe $a_1 < b$ et $a_2 < c$ tels que $a = a_1 a_2$.

(b) Montrer qu'on peut choisir $a_1$et a_2 ci-dessus de sorte que $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{c}{b}$, et qu'il y alors unicité de (a_1,a_2).

11. : Montrer que $||a|-|b||\leqslant|a+b|$ (question de cours) puis $||a|-|b||\leqslant|a+c|+|b+c|$.

12. : Montrer que $|\max(a,b)-\max(c,d)|\leqslant\max(|a-c|,|b-d|)$.

13. : Montrer, si possible sans passer par des encadrements, que si $|x-2|\leqslant\dfrac{1}{4}$ alors $\left|1-\dfrac{x}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{8}$, $\left|1-\dfrac{2}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{7}$ et $\left|x^2-4\right|\leqslant\dfrac{17}{16}$.

14. : Démontrer que pour n entier pair $1+x+x^2+...+x^n$ reste constamment >0.

III. **PARTIES ENTIÈRES**

Dans ces exercices, x, y, $x_1,...,x_n$ désignent des réels.

15. * :

(a) Vérifier que si n est entier, $[n+x]=n+[x]$ et $\text{frac}(x+n)=\text{frac}(x)$.

(b) Démontrer que $[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1$, avec égalité à gauche si $\text{frac}(x)+\text{frac}(y)<1$ et égalité à droite sinon.
Indication : poser $x=n+u$ avec $n=[x]$ et $u=\text{frac}(x)$, et de même $y=m+v$.
En déduire $\text{frac}(x)+\text{frac}(y)-1\leqslant\text{frac}(x+y)\leqslant\text{frac}(x)+\text{frac}(y)$.

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[x_k]\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}x_k\right]\leqslant\sum_{k=1}^{n}[x_k]+n-1$ et donner les cas d'égalité à gauche et à droite.

(d) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $n[x]\leqslant[nx]\leqslant n[x]+n-1$ et donner les cas d'égalité à gauche et à droite.

(e) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $[x]=\left[\dfrac{[nx]}{n}\right]$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

16. * :

(a) Montrer les inégalités et donner les cas d'égalité à gauche et à droite.

i. $[x]-[y]-1\leqslant[x-y]\leqslant[x]-[y]$ (égalité à droite ssi $\text{frac}(x)\geqslant\text{frac}(y)$).

ii. $\text{frac}(x)-\text{frac}(y)\leqslant\text{frac}(x-y)\leqslant\text{frac}(x)-\text{frac}(y)+1$

(b) Démontrer que $[-x]=-[x]-1$ sauf si x est entier où alors $[-x]=-[x]$; en déduire $\text{frac}(-x)=1-\text{frac}(x)$ sauf si x est entier.

(c) En déduire $\forall n\in\mathbb{Z}_-\quad n([x]+1)\leqslant[nx]\leqslant n[x]$.

17. : Démontrer

(a) $[2x]=[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$ (séparer les cas $\text{frac}(x)<1/2$ et $\text{frac}(x)\geqslant1/2$);

(b) En déduire le calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\dfrac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]$.

(c) Généraliser (b) à la relation: $[nx]=\sum\limits_{k=0}^{n-1}[x+\dfrac{k}{n}]$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

18. * :

(a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$. (on verra que cela se traduit par $[x]\underset{x\to+\infty}{\sim}x$)

(b) En déduire $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$. Tracer le graphe de $x\mapsto x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ entre -2 et 2.

19. : Soient $x<y$ deux réels ; montrer que le nombre N d'entiers strictement compris entre x et y est $\overline{E}(y)-E(x)-1$.

20. * : **La conversion Euros - Francs**
Soit a un réel >1 ; on définit la fonction $franc$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par $franc(x)$ =arrondi$(ax) = [ax + 1/2]$ et la fonction $euro$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par $euro(x)$ =arrondi$(\frac{x}{a}) = [\frac{x}{a} + 1/2]$; lorsque $a = 6,55957$, $franc$ est la fonction de conversion euros-francs et $euro$ la fonction de conversion francs-euros, avec arrondi au franc ou à l'euro le plus proche.

(a) Montrer que $euro \circ franc = id_{\mathbb{Z}}$ mais que $franc \circ euro \neq id_{\mathbb{Z}}$; montrer que

$$x - \left[\frac{a+1}{2}\right] \leqslant franc(euro(x)) \leqslant x + \left[\frac{a+1}{2}\right]$$

; donner un exemple avec chacun des cas extrêmes.

(b) Que peut-on dire de $euro \circ franc \circ euro$, de $franc \circ euro \circ franc$, de $(franc \circ euro)^2$?