SENS DE VARIATION, SUITES BORNÉES

1. : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$.

2. :

   (a) Étudier la relation définie dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $(u_n)\ R\ (v_n) \Leftrightarrow (v_n - u_n)$ est bornée ; deux telles suites seront dites "presque égales".

   (b) * Une suite est dite presque (dé)croissante si elle est presque égale à une suite (dé)croissante. Quelles sont les suites qui sont à la fois presque croissantes et presque décroissantes ?

3. : Démontrer que toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

   Indication : poser $v_n = \max(u_n - u_{n-1}, 0)$, $w_n = \min(u_n - u_{n-1}, 0)$, $u_n^+ = u_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ et $u_n^- = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$.

   CALCULS DE TERMES GÉNÉRAUX

4. : On pose $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$;

   (a) A l'aide de la fonction f déterminer des expressions sans $\sum$ des sommes suivantes, pour $x \neq 1$:

   $$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}, \sum_{k=1}^{n} kx^k, \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, x^k, \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$$

   (b) * Déterminer en fonction de f , $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p x^k$.

   Pour cela, on démontrera que pour tout p il existe des nombres $\alpha_1, .., \alpha_p$ tels que $k^p = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i k\,(k-1)\,..(k-i+1)$ pour tout entier k.

   Ces nombres, appelés nombres de Stirling, ne sont pas à calculer.

5. : Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = r\,u_{n-1} + n$, où $r \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer u_n en fonction de u_0, r et n (on pourra utliser la fonction f de l'exercice précédent).

   (b) Compléter ce programme python de calcul de u_n utilisant la formule de récurrence.

   ```
   u = .....;n=.....
   for k in ..............:
   ...............
   ```

   (c) Déterminer la suite v_n de la forme $an + b$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = r\,v_{n-1} + n$.

   Vérifier de $(u_n - v_n)$ est géométriqu de raison r et en déduire de nouveau u_n en fonction de u_0, r et n.

6. Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n + \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k}{n}$;

   (a) Exprimer u_n en fonction de n et u_{n-1} pour $n \geqslant 2$; sens de variation de (u_n) ?

   (b) En déduire u_n en fonction de n et u_0 pour $n \geqslant 2$.

7. : Visualiser les suites récurrentes $u_n = f(u_{n-1})$ suivantes ; étudier leur sens de variation pour $u_0 > 0$; calculer u_n en fonction de u_0 :

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

8. : On donne $u_0 > 0$ et $u_n = \lambda\,(u_{n-1})^a \quad (\lambda > 0)$;

   (a) Calculer u_n en fonction de u_0 et n.

   (b) * Pour quelles valeurs de $u_0 > 0$, $\lambda > 0$ et a réel la limite de u_n est-elle infinie ? Nulle ? N'existe pas ?

9. : Relation entre taux et annuité, méthode n° 1.

   (a) Une banque me prête un capital C au taux t annuel, que je rembourse en N années, avec des annuités x constantes.

   (b) Décomposons le capital C en N parties $C = C_1 + ... + C_N$, C_n étant la partie du capital qui comptera dans le n-ième remboursement. Justifier que $C_n = \frac{x}{(1+t)^n}$ et en déduire x en fonction de C, t, et N (expression sans somme).

   (c) Application numérique 1: $C = 100\,000$, $t = 3\%$, $N = 20$. Calculer le remboursement total et le "taux effectif global" $T = \dfrac{Nx}{C} - 1$.

   (d) Application numérique 2 : un organisme de crédit propose une formule 10+1 : on verse chaque année un dixième de la somme prêtée, ceci onze fois. Calculer cette fois le taux t.

10. : Relation entre taux et annuité, méthode n° 2.

    Une banque me prête un capital C au taux t annuel, que je rembourse en N années, avec des annuités x constantes.

    (a) Posons $R_0 = C$ et R_n le capital restant dû juste après avoir versé la n-ième annuité ; expliquer pourquoi $R_{n+1} = (1+t)\,R_n - x$, et calculer R_n.

    (b) En exprimant R_N, calculer x en fonction de C, t, et N.

    (c) Faire les applications numériques de l'exercice précédent.

11. * : Est-il possible de ranger dans un carré de côté 1 tous les carrés de côté $1/n$ pour $n \geqslant 2$ sans que ces carrés ne se chevauchent ?

12. * : La suite d'Ackermann (comparer avec l'exercice 23 sur les récurrences).
    On définit la suite double A par

    - $A\,(0,n) = n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$,
    - $A\,(m,0) = 2$ pour $m \in \mathbb{N}$,
    - $A\,(m,n) = A\,(m-1, A\,(m,n-1))$ pour m, $n \geqslant 1$

    (a) Calculer $A\,(1,n)\,,\ A\,(2,n)\,,\ A\,(3,n)\,, A\,(4,n)$; valeur approchée de $A(4,3)$.

    (b) Calculer $A\,(5,1)$; exprimer $A\,(5,2)$.

13. : Suites récurrentes linéaires doubles : autre méthode.

    Considérons une suite complexe (u_n) vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout entier n.

    (a) Montrer que si λ est solution de l'équation caractéristique (E) : $\lambda^2 = a\lambda + b$, alors la suite $(u_{n+1} - \lambda u_n)$ est géométrique de raison $a - \lambda$.

    (b) Dans le cas où (E) a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2, déterminer $\lambda_1 +\ \lambda_2$ et calculer le terme général u_n en fonction de n, u_0, u_1, λ_1 et λ_2 en utilisant les deux suites géométriques $(u_{n+1} - \lambda_1 u_n)$ et $(u_{n+1} - \lambda_2 u_n)$.

    (c) Dans le cas où (E) a une solution double $\lambda \neq 0$, montrer qu'$\left(\dfrac{u_n}{\lambda^n}\right)$ est arithmétique et en déduire u_n.

14. : Montrer que les suites (u_n) *réelles* vérifiant $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont périodiques ; donner leur forme générale.

15. : On définit une suite (u_n) par $\left\{ \begin{array}{c} u_0 = 1 \\ u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k)\,u_k \end{array} \right.$

    (a) Calculer u_1, u_2, u_3.

(b) Calculer $v_n = u_{n+1} - u_n$, puis $v_{n+1} - v_n$; en déduire une relation de récurrence linéaire double vérifiée par (u_n) et calculer u_n par la méthode du cours.

(c) On donne la suite de Fibonacci $\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$; exprimer u_n à l'aide de la suite de Fibonacci.

16. : On se donne $a \in \mathbb{C}$ et $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et on cherche toutes les suites $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$(E) : u_{n+1} - au_n = v_n$$

(a) Montrer que si (p_n) est une solution particulière de (E) , on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à (p_n) la solution générale de (E_{ssm}) : $u_{n+1} - au_n = 0$.

(b) Applications

i. Résoudre $u_{n+1} = 2u_n + n$.

ii. Résoudre les suites arithmético-géométriques $u_{n+1} = au_n + b$ par cette méthode.

17. * : dit “problème de la mouche”

(a) un train part de A à la vitesse v_1, à la rencontre d'un autre train partant de B à la vitesse v_2. Une mouche part de $M_0 = A$ en même temps que le premier train, à la vitesse $v > v_1$ et $v > v_2$, se cogne contre le deuxième train en M_1, repart en sens inverse à la vitesse v, se cogne en M_2 etc... Quelle distance L aura-t'elle parcourue lorsque les deux trains se rencontreront ? (on exprimera L en fonction de $l = AB$, de v, v_1 et v_2.)

(b) On pose $l_n = M_nM_{n+1}$ et $L_n = l_0 + l_1 + \cdots + l_n$. Vérifier que (l_{2p}) et (l_{2p+1}) sont géométriques. Calculer L_{2p} et L_{2p+1}, et vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = L$.

18. * : Existe-t-il une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (f \circ f)(n) = n + 1$?