

1. : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$.

2. :
- (a) Etudier la relation définie dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $(u_n) R (v_n) \Leftrightarrow (v_n - u_n)$ est bornée ; deux telles suites seront dites "presque égales".
 - (b) * Une suite est dite presque (dé)croissante si elle est presque égale à une suite (dé)croissante. Quelles sont les suites qui sont à la fois presque croissantes et presque décroissantes ?

3. : Démontrer que toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

Indication : poser $v_n = \max(u_n - u_{n-1}, 0)$, $w_n = \min(u_n - u_{n-1}, 0)$, $u_n^+ = u_0 + \sum_{k=1}^n v_k$ et $u_n^- = \sum_{k=1}^n w_k$.

CALCULS DE TERMES GENERAUX

4. : On pose $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$;

- (a) A l'aide de la fonction f déterminer des expressions sans \sum des sommes suivantes, pour $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1}, \sum_{k=1}^n kx^k, \sum_{k=0}^n (n-k)x^k, \sum_{k=1}^n k^2x^k$$

- (b) * Déterminer en fonction de f , $\sum_{k=1}^n k^p x^k$.

5. : Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = r u_{n-1} + n$, où $r \in \mathbb{R}$.

Calculer u_n en fonction de u_0, r et n . Compléter ce programme Maple de calcul de u_n :

$u := u_0$: for k to n dood :

6. Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{n}$;

- (a) Exprimer u_n en fonction de n et u_{n-1} ; sens de variation de (u_n) ?
- (b) En déduire u_n en fonction de n et u_0 .

7. : Visualiser les suites récurrentes $u_n = f(u_{n-1})$ suivantes ; étudier leur sens de variation pour $u_0 > 0$; calculer u_n en fonction de u_0 :

- (a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
- (b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

8. : On donne $u_0 > 0$ et $u_n = \lambda(u_{n-1})^a$ ($\lambda > 0$) ;

- (a) Calculer u_n en fonction de u_0 et n .
- (b) * Pour quelles valeurs de $u_0 > 0$, $\lambda > 0$ et a réel la limite de u_n est-elle infinie ? Nulle ? N'existe pas ?

9. : Une banque me prête un capital C au taux t annuel, que je rembourse en N années, avec des annuités x constantes.

- (a) Posons $C_0 = C$ et C_n le capital restant dû juste après avoir versé la n -ième annuité ; expliquer pourquoi $C_{n+1} = (1+t)C_n - x$.

(b) Calculer C_N et en déduire x en fonction de C , t , et N .

(c) Application numérique : $C = 10\,000$, $t = 10\%$, $N = 10$. Calculer le remboursement total et le "taux effectif global"

$$T = \frac{Nx}{C} - 1.$$

10. * : Est-il possible de ranger dans un carré de côté 1 tous les carrés de côté $1/n$ pour $n \geq 2$ sans que ces carrés ne se chevauchent ?

11. * : La suite d'Ackermann (comparer avec l'exercice 23 sur les récurrences).
 On définit la suite double A par

- $A(0, n) = n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- $A(m, 0) = 2$ pour $m \in \mathbb{N}$,
- $A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$ pour $m, n \geq 1$

(a) Calculer $A(1, n)$, $A(2, n)$, $A(3, n)$

(b) Calculer $A(4, 1)$, $A(4, 2)$, $A(4, 3)$ et $A(4, 4)$ (valeur approchée de cette dernière).

12. : Suites récurrentes linéaires doubles : autre méthode.

Considérons une suite complexe (u_n) vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout entier n .

(a) Montrer que si λ est solution de l'équation caractéristique (E) : $\lambda^2 = a\lambda + b$, alors la suite $(u_{n+1} - \lambda u_n)$ est géométrique de raison $a - \lambda$.

(b) Dans le cas où (E) a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 , déterminer $\lambda_1 + \lambda_2$ et calculer le terme général u_n en fonction de n, u_0, u_1, λ_1 et λ_2 en utilisant les deux suites géométriques $(u_{n+1} - \lambda_1 u_n)$ et $(u_{n+1} - \lambda_2 u_n)$.

(c) Dans le cas où (E) a une solution double $\lambda \neq 0$, montrer qu' $(\frac{u_n}{\lambda^n})$ est arithmétique et en déduire u_n .

13. : Montrer que les suites (u_n) réelles vérifiant $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont périodiques ; donner leur forme générale.

14. : On définit une suite (u_n) par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) u_k \end{cases}$$

(a) Calculer u_1, u_2, u_3 .

(b) Calculer $v_n = u_{n+1} - u_n$, puis $v_{n+1} - v_n$; en déduire une relation de récurrence linéaire double vérifiée par (u_n) et calculer u_n par la méthode du cours.

(c) On donne la suite de Fibonacci $\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$; exprimer u_n à l'aide de la suite de Fibonacci.

15. : On se donne $a \in \mathbb{C}$ et $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et on cherche toutes les suites $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$(E) : u_{n+1} - au_n = v_n$$

(a) Montrer que si (p_n) est une solution particulière de (E), on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à (p_n) la solution générale de $(E_{ssm}) : u_{n+1} - au_n = 0$.

(b) Applications

i. Résoudre $u_{n+1} = 2u_n + n$.

ii. Résoudre les suites arithmético-géométriques $u_{n+1} = au_n + b$ par cette méthode.

16. * : dit "problème de la mouche"

(a) un train part de A à la vitesse v_1 , à la rencontre d'un autre train partant de B à la vitesse v_2 . Une mouche part de $M_0 = A$ en même temps que le premier train, à la vitesse $v > v_1$ et $v > v_2$, se cogne contre le deuxième train en M_1 , repart en sens inverse à la vitesse v , se cogne en M_2 etc... Quelle distance L aura-t'elle parcourue lorsque les deux trains se rencontreront ? (on exprimera L en fonction de $l = AB$, de v, v_1 et v_2 .)

(b) On pose $l_n = M_n M_{n+1}$ et $L_n = l_0 + l_1 + \dots + l_n$. Vérifier que (l_{2p}) et (l_{2p+1}) sont géométriques. Calculer L_{2p} et L_{2p+1} , et vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = L$.

17. * : Existe-t-il une application f de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} telle que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (f \circ f)(n) = n + 1$?