

## GÉNÉRALITÉS

1. :
- Soit  $(u_n)$  une suite ne prenant que les valeurs 0 ou 1 dont la limite est 0 ; démontrer en utilisant la définition de la limite que  $u_n = 0$  à partir d'un certain rang.
  - Démontrer plus généralement qu'une suite qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs et qui est convergente est constante à partir d'un certain rang.
2. :
- Démontrer que si les deux sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  d'une suite réelle  $(u_n)$  ont la même limite  $l$ , alors  $(u_n)$  a pour limite  $l$ .
  - A-t-on la même conclusion si on suppose que les deux sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{3n})$  de la suite  $(u_n)$  ont la même limite  $l$  ?
  - Que peut-on dire si on suppose que les trois sous-suites  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  de la suite  $(u_n)$  ont chacune une limite ?
3. \* :
- Montrer que si, dans la définition de la convergence vers  $l$  d'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ , on intervertit le deuxième et le troisième quantificateur, ce qui donne :
 
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_1 \quad \exists n \geq n_1 \quad |u_n - l| < \varepsilon$$
 on obtient la condition :
 
$$">(u_n) \text{ possède une sous-suite convergeant vers } l".$$
 REM : ceci est donc la définition de : " $l$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ ".
  - Montrer qu'une suite réelle est non majorée si et seulement si elle possède une sous-suite de limite  $+\infty$ .
  - Montrer qu'une suite réelle tend vers  $+\infty$  si et seulement si elle ne possède pas de sous-suite majorée.
4. \* : Montrer, par l'absurde, que la suite  $(\sin n)$  est divergente ; indication : considérer les sous-suites  $(\sin(n+1))$  et  $(\sin(2n))$ , et utiliser  $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$  pour obtenir une contradiction.
5. : Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (pour vrai : démontrer, et pour faux : donner un contre-exemple).
- Si  $\lim u_n = 0$  alors  $\lim (u_n v_n) = 0$ .
  - Si  $\lim (u_n v_n) = 0$  alors  $\lim u_n = 0$  ou  $\lim v_n = 0$ .
  - Si  $\lim (u_n + v_n) = +\infty$  alors  $\lim u_n = +\infty$  ou  $\lim v_n = +\infty$ .
  - Si  $(u_n)$  est une suite strictement décroissante à termes positifs ou nuls, alors  $\lim u_n = 0$ .
  - Si  $\lim u_n = 0$  et si  $(u_n)$  est une suite à termes positifs ou nuls, alors  $(u_n)$  est décroissante à partir d'un certain rang.
  - Si  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $nu_n \rightarrow +\infty$
  - Si  $u_n > 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $(u_n)^n \rightarrow +\infty$
  - Si  $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ , alors  $(u_n)$  est convergente.
  - Si pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} = 0$  alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n,1} + u_{n,2} + \dots + u_{n,k}) = 0$ .
  - Si pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n,1} + u_{n,2} + \dots + u_{n,n}) = 0$ .
6. \* : Suite de l'exercice précédent :
- Si  $(u_n)$  est convergente, alors  $(|u_n|)$  est convergente.
  - Réciproque de l'assertion précédente.
  - Si  $u_n \leq v_n \leq w_n$ ,  $\lim u_n = 0$  et  $\lim w_n = 1$ , alors  $\lim v_n \in [0, 1]$ .

- (d) Si  $(u_n)$  est convergente alors  $\forall p \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- (e) Réciproque de l'assertion précédente.
- (f) Si  $(u_n)$  n'est pas majorée, alors  $u_n \rightarrow +\infty$ .
- (g) Réciproque de l'assertion précédente.
- (h) Si  $\lim u_n = +\infty$  alors  $(u_n)$  est croissante à partir d'un certain rang.
- (i) Si  $(u_n)$  n'est pas majorée, alors il existe une suite extraite de  $(u_n)$  de limite  $+\infty$ .
- (j) Réciproque de l'assertion précédente.
- (k) Si  $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$ , alors  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .
- (l) Réciproque de (k).
- (m) Si  $(u_n)$  et  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  sont bornées, alors  $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$ , équivaut à  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .
- (n) Si  $(u_{n+1} - u_n)$  est monotone, alors  $(u_n)$  aussi à partir d'un certain rang.
- (o) Si  $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$ , et si  $(u_n)$  est bornée, alors  $(u_n)$  est convergente.

7. : Déterminer la limite des suites de terme général  $u_n$  suivantes en utilisant le théorème des gendarmes :

(a)  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}$

(b)  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

(c)  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n+k}}$

(d)  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+k}$

(e)  $u_n = \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{n!}$

(f)  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$

8. :

- (a) Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs dans  $[0, 1]$  et telles que  $\lim u_n v_n = 1$ . Que peut-on dire de  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ?
- (b) Soit  $(u_n)$  une suite à termes  $> 0$  monotone ; montrer que si  $\lim \frac{u_{n+2}}{u_n} = 1$  alors  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .

9. \* :

- (a) Montrer que l'équation  $x^n = x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1$  possède une unique solution  $x_n \in \mathbb{R}_+$  (REM :  $x_2$  est le nombre d'or,  $x_3$  celui d'argent,  $x_4$  celui de bronze... Les  $x_n$  ont donc été décrétés "nombres métalliques").
- (b) Etudier la suite  $(x_n)$ .

10. : On donne deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  à termes strictement positifs et convergeant toutes les deux vers 0.

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{u_n - v_p}{u_n + v_p} \right)$  et de  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - v_p}{u_n + v_p} \right)$  ? Pourquoi est-ce étonnant ?

11. \* : Autour du lemme de Césaro.

- (a) Montrer que si  $\lim u_n = 0$ , alors  $\lim \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = 0$ .
- (b) Montrer que la réciproque de l'assertion précédente est fautive.
- (c) Dédurre du (a) que si  $\lim u_n = l \in \mathbb{C}$  alors  $\lim \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = l$  (lemme de Césaro).

- (d) Dédurre du (a) que si  $\lim (u_n - u_{n-1}) = a \neq 0$  alors  $u_n \sim na$  (propriété appelée *lemme de l'escalier* : si la hauteur des marches tend vers  $a$  alors la hauteur totale d'un escalier de  $n$  marches équivaut à  $na$ ).
- (e) En déduire que si  $(u_n)$  est à termes strictement positifs, et si  $\lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = a > 0$  alors  $\lim \sqrt[n]{u_n} = a$  (c'est la comparaison des critères de D'Alembert et de Cauchy).
- (f) Dédurre de (a) que si  $\lim u_n = 0$  et  $(v_n)$  est bornée, alors  $\lim \frac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1}{n} = 0$ .
- (g) En déduire que si  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$  et  $\lim v_n = l' \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim \frac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1}{n} = ll'$ .

12. \* : lemme de Césaro à l'infini.

- (a) Montrer que si  $\lim u_n = +\infty$ , alors  $\lim \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = +\infty$ , mais que la réciproque est fautive.
- (b) Montrer que par contre, si  $\lim u_n = +\infty$ , on n'a pas forcément  $\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \sim u_n$  ; on donnera un exemple où  $\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \sim ku_n$  avec  $k \neq 1$ , un exemple où  $\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \ll u_n$ , et un exemple où  $\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \gg u_n$ .

13. \* : On pose  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  ; montrer SANS UTILISER LE FAIT QUE CES SUITES SONT CONVERGENTES, que  $\lim (v_n - u_n) = 0$ .

### SUITES MONOTONES

Remarque : dans les exercices suivants, lorsqu'on demande de calculer un nombre  $a$  à  $10^{-2}$  près, on cherche un entier  $N$  tel que  $N10^{-2} - 0,01 \leq a \leq N10^{-2} + 0,01$  ; tout encadrement de largeur  $\leq 0,01$  permet de déterminer un tel encadrement.

Par exemple,  $1,49877 \leq a \leq 1,50354$  permet d'écrire :  $1,49 \leq a \leq 1,51$ , que l'on note :  $a = 1,50 \pm 10^{-2}$ .

Notons qu'il n'y a pas unicité de l'écriture :  $a = 1,54426$  peut, à  $10^{-2}$  près, s'écrire  $a = 1,54 \pm 10^{-2}$  ou  $a = 1,55 \pm 10^{-2}$ .

Il n'existe pas de largeur minimale d'encadrement permettant de déterminer pour tout  $a$  un encadrement du type :  $N10^{-2} \leq a \leq N10^{-2} + 0,01$ .

Par exemple, si  $a = 1,500001$ , seul un encadrement de largeur  $\leq 10^{-6}$  permettra de déterminer à coup sur si  $a \geq 1,5$ .

14. : On pose  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

- (a) Pour  $k \geq 1$ , montrer que :  $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$  et en déduire un encadrement de  $\frac{1}{k}$  pour  $k \geq 2$  puis de  $h_n$ .
- (b) On pose  $u_n = h_{2n} - h_n$  ; montrer que  $(u_n)$  est convergente de limite  $\in [1/2, 1]$ .
- (c) Grâce à l'encadrement du (a), déterminer un encadrement de  $u_n$  et en déduire sa limite.

15. :

- (a) On pose  $r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .
- Montrer que  $\lim r_n = +\infty$ , sans utiliser  $h_n$ .
  - Montrer que pour  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ , soit en utilisant une méthode d'intégration, soit en utilisant la quantité conjuguée de  $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ .
  - En déduire un encadrement de  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  puis de  $r_n$  ; montrer par exemple que  $18 \leq r_{100} \leq 20$ .
  - Déterminer un équivalent de  $r_n$ .
- (b) Généralisation :  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  avec  $0 < \alpha < 1$ .

- i. Montrer que  $\lim s_n = +\infty$ , sans utiliser  $h_n$ .  
 ii. Démontrer que pour  $k \geq 1$

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

en déduire un encadrement de  $\frac{1}{k^\alpha}$  pour  $k \geq 2$ , puis de  $s_n$  et donner enfin un équivalent de  $s_n$  ; montrer le développement :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + O(1)$ .

- iii. Donner par exemple un encadrement de  $s_{10}$ , pour  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

16. :

(a) On pose  $q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

- i. Pour  $k \geq 2$ , vérifier  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$   
 ii. Montrer que  $(q_n)$  est convergente de limite  $q$  vérifiant  $1,5 \leq q \leq 2$ .  
 iii. Déterminer, en utilisant (i), un encadrement de  $q_N - q_n$  pour  $N \geq n > 0$  et en déduire :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n+1} \leq q - q_n \leq \frac{1}{n}$$

- iv. Calculer  $q$  à  $10^{-2}$  près.

Sur casio : SUM(SEQ(1/X,X,1,n))

- v. On démontrera ultérieurement que  $q = \frac{\pi^2}{6}$  ; admettant ce résultat, déduire de (iii) le développement :

$$\pi^2 = 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{6}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(b) Généralisation : On pose  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  avec  $\alpha > 1$ .

- i. Pour  $k \geq 2$ , montrer que  $\frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^\alpha} \right)$ .  
 ii. Montrer que  $(s_n)$  est convergente ; soit  $s$  sa limite.  
 iii. Déterminer, en utilisant (i), un encadrement de  $s_N - s_n$  pour  $N \geq n > 0$  et en déduire un encadrement de  $s - s_n$  similaire à celui de a.(iii).

17. :  $f$  est une fonction continue, positive et décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

(a) Vérifier que pour  $k \geq 1$ ,  $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$ .

(b) On pose  $u_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$  ; montrer que  $(u_n)$  converge vers  $l \in [0, f(1)]$ .

(c) Application 1 : montrer que  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$  converge vers  $\gamma \in [0, 1]$  ; en déduire le développement :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ .

(d) Application 2 :  $w_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  ; montrer que  $(w_n)$  converge vers  $R \in [1, 2]$  ; en déduire le développement :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - R + o(1)$ .

18. \* : Quelques séries à signes alternés.

On rappelle que  $h_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \varepsilon_N$  avec  $\lim \varepsilon_N = 0$ .

(a) Déterminer la valeur de la somme infinie :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

(b) Déterminer maintenant la valeur de la somme infinie :

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3}}_{2 \text{ impairs}} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}_{2 \text{ impairs}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11}}_{2 \text{ impairs}} - \frac{1}{6} \dots$$

Qu'y a-t-il de paradoxal dans ce résultat ?

19. \* : Soit  $(u_n)$  une suite réelle ; on pose  $u_n^- = \inf_{p \geq n} u_p$ .

(a) Justifier que la suite  $(u_n^-)$  possède toujours une limite ; cette limite est appelée limite inférieure de la suite  $(u_n)$  :

$$\underline{\lim}(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \inf_{p \geq n} u_p \right).$$

(b) Définir de la même façon la limite supérieure d'une suite réelle après avoir justifié son existence.

(c) Montrer que  $(u_n)$  possède une limite ssi  $\underline{\lim}(u_n) = \overline{\lim}(u_n)$ .

(d) Montrer que la limite de toute sous-suite de  $(u_n)$  est comprise entre  $\underline{\lim}(u_n)$  et  $\overline{\lim}(u_n)$ , et que  $\underline{\lim}(u_n)$  et  $\overline{\lim}(u_n)$  sont eux-mêmes limites de sous-suites de  $(u_n)$ .

20. \* : Etudier la suite récurrente définie par 
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_n = \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

21. \* : **Le surplomb de dominos**

Soit  $(A_n)$  une suite de points sur une droite. On pose  $G_n = \text{Isobar}(A_1, \dots, A_n)$ . On suppose que  $\overrightarrow{G_n A_{n+1}} = \vec{u}$  (vecteur constant).

(a) Faire une figure en construisant  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . (prendre  $\|\vec{u}\|$  assez grand).

(b) Démontrer que  $\overrightarrow{A_n A_{n+1}} = \frac{\vec{u}}{n}$ .

(c) En déduire que  $A_1 A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

(d) On empile des dominos au bord d'une table de façon à obtenir le surplomb maximal. Calculer en fonction du nombre  $n$  de dominos (chacun de longueur  $l$ ), ce surplomb maximal. Calculer le plus petit  $n$  à partir duquel ce surplomb est supérieur à  $2l$ .

### SUITES ADJACENTES

22. : On pose  $v_n = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$  et  $u_n = \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - \ln n$ .

(a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

(b) Calculer à  $10^{-2}$  près leur limite commune  $\gamma$  (constante d'Euler).

(c) En déduire le développement :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$

23. : On pose  $u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  et  $v_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

(a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes de limite commune  $R$  que l'on calculera à  $10^{-1}$  près.

(b) En déduire le développement :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - R + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .

24. Soit  $f$  une fonction continue décroissante positive sur  $[1, +\infty[$  ; on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n f(k)$  ; soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[1, +\infty[$ .

- (a) Montrer que si  $F$  possède une limite finie  $l$  en  $+\infty$  alors les suites  $(u_n)$  et  $(v_n) = (u_n + l - F(n))$  sont adjacentes.
- (b) Application aux séries de Riemann : montrer que si  $\alpha > 1$  alors la somme  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  possède une limite finie  $S$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et que  $S = S_n + O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$ .

25. : Moyenne arithmético-géométrique de deux réels  $a$  et  $b > 0$ ,  $a \leq b$  ;

- (a) Montrer que  $a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ .

Soient  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , puis pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- (b) Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes ; la limite commune est par définition la moyenne *arithmético-géométrique* de  $a$  et  $b$ .

Indication :  $b_n - a_n \leq \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ .

- (c) Calculer la moyenne arithmético-géométrique de 1 et 2 à  $10^{-8}$  près.

Programme sur TI ou Casio :

1  $\rightarrow$  A

2  $\rightarrow$  B

Lbl 1

$\sqrt{(A*B)} \rightarrow C$

$(A+B)/2 \rightarrow B$

C  $\rightarrow$  A

If B-A > 10<sup>-8</sup>

Then

Goto 1

End (EndIf pour Casio)

Disp A,B

- (d) \* Calculer  $b_n^2 - a_n^2$  en fonction de  $b_{n-1}$  et  $a_{n-1}$  et en déduire que si  $\varepsilon_n = b_n - a_n$ ,  $2\varepsilon_n a_n + \varepsilon_n^2 = \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{4}$  puis que

$$\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{8a} \leq \frac{(b-a)^{2^n}}{(8a)^n}.$$

26. \* : La moyenne arithmético-harmonique :

Pour  $0 < a \leq b$  on pose  $m(a, b) = \frac{a+b}{2}$  et  $h(a, b) = \frac{1}{m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}$  (moyenne *harmonique* de  $a$  et  $b$ )

- (a) Montrer que  $a \leq h(a, b) \leq m(a, b) \leq b$  et que  $h(a, b).m(a, b) = ab$ .

- (b) On pose  $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{n+1} = h(a_n, b_n) \\ b_{n+1} = m(a_n, b_n) \end{cases}$ .

Montrer que ces deux suites sont adjacentes ; soit  $l(a, b)$  la limite commune.

- (c) Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N} a_n b_n = ab$ ; que vaut donc  $l(a, b)$ ? (la moyenne "arithmético-harmonique" n'est donc autre que la moyenne géométrique!).

- (d) Déterminer une relation de récurrence simple vérifiée par  $(b_n)$  (de la forme  $b_{n+1} = f(b_n)$ ) et comparer avec la méthode de Héron (exercice 40).

27. \* Algorithme de Borchardt : soient  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  avec  $0 < a \leq b$ , puis pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

(bien noter le  $a_{n+1} b_n$  au lieu du  $a_n b_n$ ).

(a) Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes de même limite, que l'on notera  $l$ .

(b) On pose  $q_n = \frac{a_n}{b_n}$  ; vérifier que  $q_{n+1} = \sqrt{\frac{1+q_n}{2}}$ .

(c) En déduire que si  $\alpha = \arccos \frac{a}{b}$ ,  $a_n = b_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$ , puis que  $b_n = b_0 \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$ .

(d) En déduire que  $l = b_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}$  et que  $b_n - a_n \sim b_0 \frac{\alpha \sin \alpha}{2^{2n+1}}$

28. \* Algorithme de Borchartdt, bis : soient  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  avec  $0 < a \leq b$ , puis pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ et } a_{n+1} = \sqrt{a_n b_{n+1}}$$

(bien noter les subtiles différences entre les exercices 26, 27 et 28 !).

(a) Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes de même limite, que l'on notera  $l$ .

(b) On pose  $q_n = \frac{b_n}{a_n}$  ; vérifier que  $q_{n+1} = \sqrt{\frac{1+q_n}{2}}$ .

(c) En déduire que si  $\alpha = \operatorname{argch} \frac{b}{a}$ ,  $b_n = a_n \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2^n}$ , puis que  $a_n = a \frac{\operatorname{sh} \alpha}{2^n \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2^n}}$ .

(d) En déduire que  $l = a \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\operatorname{argch} \frac{b}{a}}$ .

(e) Montrer que si on part de  $a_0 = \sqrt{ab}$ ,  $b_0 = \frac{a+b}{2}$  au lieu de  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , alors  $l = \frac{b-a}{\ln b - \ln a} =$  *moyenne logarithmique* de  $a$  et  $b$ .

29. \* : Soit  $x \in \mathbb{R}$  ; on pose  $x_n = 10^{-n} [10^n x]$  et  $y_n = x_n + 10^{-n}$ .

(a) Déterminer  $(x_n)$  et  $(y_n)$  pour  $x = 9,898$ .

(b) Prouver que  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont adjacentes de limite  $x$ .

30. \* : Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite décroissante de réels convergeant vers 0. On pose

$$S_n = u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n+1} u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} u_k$$

(a) Vérifier que  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(S_{2n-1})_{n \geq 1}$  sont adjacentes et que donc  $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} u_k$  existe.

(b) Montrer que  $|S - S_n| \leq u_{n+1}$  et que  $S - S_n$  est du signe de  $(-1)^n$ .

Remarque : ces résultats constituent le théorème dit des séries *alternées* (car  $S_n$  est alternativement au dessous et au dessus de  $S$ ).

(c) Déterminer à  $10^{-2}$  près  $S = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  et  $T = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

(on montre qu'en fait  $S = \ln 2$  et  $T = \frac{\pi}{4}$ ).

31. :

(a) Montrer que si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites à termes  $> 0$  vérifiant :

$(u_n)$  croissante,  $(v_n)$  décroissante, et  $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ ,

alors  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

(b) Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  et  $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  ;

indication : étudier les fonctions  $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  et  $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ , ou bien montrer que  $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}}$

et utiliser l'inégalité de Bernoulli (exercice 11 récurrences).

i. Quelle valeur approchée de  $e$  obtient-on en calculant  $u_{1000}$  et  $v_{1000}$  ?

32. : Montrer que les suites suivantes sont adjacentes (on pourra utiliser 31. a)) :

$u_n = \sqrt{n} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$  et  $v_n = \sqrt{n+1} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$  ; admettant avoir démontré que la limite commune est  $1/\sqrt{\pi}$ , en déduire un encadrement de  $\binom{2n}{n}$  ; quelle approximation de  $\binom{100}{50}$  cet encadrement fournit-il ?

Rep :  $1,01 \cdot 10^{29} \pm 0,01 \cdot 10^{29}$

33. : Soit  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  ; montrer que les suites suivantes sont adjacentes (on pourra utiliser 31. a)) :

$$u_n = n \sin \frac{\theta}{n}, v_n = n \tan \frac{\theta}{n}.$$

34. \* : Montrer que les suites suivantes sont adjacentes et donner une valeur approchée de leur limite à  $10^{-2}$  près.

(a)  $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}}$  et  $v_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}}}}$ . Indication : on pourra montrer en utilisant  $n$  quantités conjuguées, que  $v_n - u_n \leq \frac{n}{2^{n-1} \sqrt{(n-1)!}}$ .

35. \* : Démonstration partielle de la formule de Stirling.

(a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$  est convergente de limite  $l$  non nulle, en montrant que  $(u_n)$  et  $(v_n) = \left(\frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n+1}}\right)$  sont des suites adjacentes.

(b) En déduire un équivalent de  $n!$  (on démontrera grâce aux intégrales de Wallis que  $l = \sqrt{2\pi}$ ).

### APPLICATIONS DU THÉORÈME DE BOLZANO WEIERSTRASS

36. \* : Montrer que le théorème de Bolzano Weierstrass est vrai pour les suites complexes.

37. \* : **Le critère de Cauchy**

**Definition 1** On dit que  $(u_n)$  est une suite de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n, p \geq n_1 \quad |u_n - u_p| < \varepsilon$$

L'exercice a pour but de démontrer que toute suite de nombres complexes est convergente ssi elle est de Cauchy (on dit qu'elle "vérifie le critère de Cauchy").

(a) Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

(b) Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

(c) En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass complexe (ex. précédent), montrer qu'une suite de Cauchy est convergente.

(d) Démontrer à l'aide du critère de Cauchy qu'étant donné une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ , si la suite de terme général  $t_n = \sum_{k=1}^n |u_k|$  est convergente, alors la suite de terme général  $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$  est aussi convergente.

38. \* :

- (a) Montrer qu'une suite réelle bornée est divergente si et seulement si elle possède deux sous-suites convergentes vers des limites distinctes.
- (b) Montrer qu'une suite réelle est divergente de deuxième espèce (autrement dit : n'a pas de limite, ni finie, ni infinie) si et seulement si elle possède deux sous-suites ayant des limites distinctes.
- (c) Étendre le (a) aux suites complexes.

### SUITES RÉCURRENTES

39. : On considère la suite récurrente définie par son premier terme  $u_0$  et la relation  $u_n = f(u_{n-1})$  où  $f(x) = ax(4-x)$ .

- (a) cas  $a = \frac{1}{2}$ ,  $u_0 = 1$  ; construire les premiers termes de la suite dans une figure, puis l'étudier.
- (b) cas  $a = \frac{3}{4}$ ,  $u_0 = 2$  ; construire les premiers termes de la suite dans une figure, puis l'étudier.

Indication :  $f(f(x)) - x = -\frac{x}{64}(3x-8)^3$ .

- (c) cas  $a = 1$  ; que se passe-t-il pour  $u_0 = 3$  ? Et pour  $u_0 = 3,1$  ? (On ne demande pas d'étude précise mais de construire les premiers termes de la suite). Commenter les figures ci-dessous.

40. Etudier la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$ ,  $u_n = 1 - u_{n-1}^2$ .

- (a) Indication :  $f(f(x)) - x = x(x-1)(x-a)(x+1/a)$  avec  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

41. : Méthode de Héron pour calculer une racine carrée.

Soit  $a$  un réel  $> 1$ .

- (a) Montrer que si  $x$  est un réel  $> 0$ ,  $x < \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{a}{x} > \sqrt{a}$ .
- (b) Étudier la suite récurrente (appelée la suite de Héron) définie par  $u_0 = a$ ,  $u_n = \frac{1}{2} \left( u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}} \right)$  après avoir fait une figure.
- (c) On pose  $v_n = \frac{a}{u_n}$  ; étudier  $(v_n)$  et montrer que  $(u_n - v_n) \leq \frac{1}{2} (u_{n-1} - v_{n-1})$ .
- (d) Déterminer par cette méthode une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-5}$  près.

(e) \* On pose  $U_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \left( = \frac{\sqrt{a} - v_n}{\sqrt{a} + v_n} \right)$  ; calculer  $U_n$  en fonction de  $U_{n-1}$  et en déduire  $U_n = (U_0)^{2^n}$  puis en déduire que  $u_n - \sqrt{a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{a}\varepsilon^{2^n}$  avec  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}$  (ceci explique la convergence très rapide de  $(u_n)$ ).

(f) \* Vérifier que  $U_n = \frac{\sqrt{a} - v_n}{\sqrt{a} + v_n} = \frac{u_n - v_n}{u_n + v_n + 2\sqrt{a}}$  ; en déduire  $\sqrt{a} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{a}\varepsilon^{2^n}$  et  $u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4\sqrt{a}\varepsilon^{2^n}$ .

42. :

(a) Etudier la suite récurrente (faire une figure) :  $u_0 = \frac{1}{2}$ ,  $u_n = u_{n-1} - u_{n-1}^2$ .

(b) Montrer que  $\lim \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} = 1$  et en déduire, en admettant le lemme de l'escalier (exercice 11. (d)) que  $u_n \sim \frac{1}{n}$ .

43. :

(a) Etudier la suite récurrente (faire une figure) :  $u_0 = 1$  et  $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}$ .

(b) Montrer que  $u_n^2 - u_{n-1}^2 \rightarrow 2$  et en déduire, en admettant le lemme de l'escalier (exercice 11. (c)), que  $u_n \sim \sqrt{2n}$ .

(c) Autre méthode évitant le recours au lemme de l'escalier : Montrer que  $2 \leq u_k^2 - u_{k-1}^2 \leq 2 + u_k - u_{k-1}$  ; sommer ces inégalités pour  $k$  allant de 1 à  $n$  ; en déduire que  $1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_{n-1}}$  et conclure.

44. \* : Étudier la suite définie par :

$$\begin{aligned} 1. u_0 &= a \in \mathbb{C} \\ 2. u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \end{aligned}$$

### COMPARAISON DES SUITES

45. : Vrai ou faux ?

(a) Soient  $(u_n), (u'_n), (v_n)$  des suites réelles vérifiant :  $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0, v_n > 0 \\ u_n \sim u'_n \end{array} \right.$  ; alors  $u_n + v_n \sim u'_n + v_n$ .

(b) Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow a$ , alors  $u_n \sim u_0 a^n$ .

(c) Si  $\frac{u_n}{u_{n-1}} \sim v_n$  alors  $u_n \sim u_{n-3} v_{n-2} v_{n-1} v_n$ .

(d) Si  $\frac{u_n}{u_{n-1}} \sim v_n$  alors  $u_n \sim u_0 v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n$ .

(e) Si  $\lim n u_n = 1$  alors  $\lim n u_{n+1} = 1$ .

(f) Si  $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0, v_n > 0 \\ u_n \ll v_n \end{array} \right.$  et  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors  $f(u_n) \ll f(v_n)$ .

46. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à termes  $> 0$  ; Montrer que

$$\begin{aligned} u_n &= o(v_n) \Leftrightarrow \forall \lambda > 0 \quad u_n < \lambda v_n \quad \text{APCR} \\ u_n &= O(v_n) \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \quad u_n < \lambda v_n \quad \text{APCR} \\ u_n &\sim v_n \Leftrightarrow \forall \lambda > 1 \quad \forall \mu \in ]0, 1[ \quad \mu v_n < u_n < \lambda v_n \quad \text{APCR} \end{aligned}$$

47. :

(a) Classer par ordre croissant pour la relation  $\ll$ .

$$(\sqrt{n})^n ; 2^{n^2} ; (2n)^n ; n^{2^n} ; n\sqrt{n} ; \left(\frac{n}{2}\right)^n ; n^{2n} ; n^n .$$

- (b) Comparer  $\left(\frac{n}{2}\right)^n$  et  $n!$  pour la relation  $\ll$  (indication : poser  $u_n = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$  et déterminer  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ) ; en déduire la comparaison de  $n^{2n}$  et  $(2n)!$ .
- (c) Introduire  $n!$  et  $(2n)!$  dans la liste du (a).
48. \* : Comparer  $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^n$  et  $n!$  ( $\alpha > 0$ ) pour la relation  $\ll$ .
49. : Montrer que si  $\lim u_n = 0$  et  $\lim v_n = 0$  alors  $(\sin u_n - \sin v_n) \sim (u_n - v_n)$  et  $(e^{u_n} - e^{v_n}) \sim (u_n - v_n)$ .
50. \* : Aire d'un disque et aire des polygones réguliers inscrits et circonscrits.
- (a) Montrer qu'un triangle isocèle de côté  $a$ , de hauteur  $h$  et d'angle au sommet  $\theta$  a pour aire  $\frac{1}{2}a^2 \sin \theta = h^2 \tan \frac{\theta}{2}$ .
- (b) Soit  $D$  un disque de rayon  $R$  ; montrer que l'aire d'un polygone régulier inscrit à  $n$  côtés vaut  $S_n = \frac{n}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{n}\right) R^2$  et déterminer de même l'aire  $S'_n$  d'un polygone régulier circonscrit à  $n$  côtés.
- (c) Montrer que  $\lim S_n$  et  $\lim S'_n$  sont bien égales à ce que l'on souhaite et déterminer un équivalent simple de  $S'_n - S_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
51. : Déterminer un équivalent simple pour chacune des suites ci-après, puis leur limite si elle existe.
- (a)  $u_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
- (b)  $u_n = \sum_{k=0}^n k$
- (c)  $u_n = \binom{n}{k}$  ( $k$  étant fixé)
- (d)  $u_n = (n+1)^p - (n-1)^p$  ( $p$  étant fixé)
- (e)  $u_n = (n+1)^p - n^{p-1}(p+n)$  ( $p$  étant fixé)
- (f)  $u_n = \sqrt{2n^2+n} - n$
- (g)  $u_n = \sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n}$
- (h)  $u_n = \sqrt{2n^2+n} - \sqrt{n}$
- (i)  $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$
- (j)  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$
- (k)  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n\sqrt{n}}$
- (l)  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$
- (m)  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n^2}$
- (n)  $u_n = (\ln n)^4 - \frac{n}{(\ln n)^2}$
- (o)  $u_n = 3^{\ln n} - n^2$
- (p)  $u_n = 2^{n+1} - 2^n$
- (q)  $u_n = 2^{n^2+n} - 2^{n^2}$
- (r)  $u_n = (\sqrt{n})^n + n^{\sqrt{n}} + n^{\frac{n}{2}}$
- (s)  $u_n = (2^n)^n + 2^{n^2} + (4^n)^2$
- (t)  $u_n = (2n)! - n^n$
- (u)  $u_n = (n+1)^n$
- (v)  $u_n = (n-1)^n$
- (w)  $u_n = (n+1)^n - n^n$

$$(x) \quad u_n = (n+1)^n - en^n$$

Réponses : a.  $\sqrt{n}$  ; b.  $\frac{n^2}{2}$  ; c.  $\frac{n^k}{k!}$  ; d.  $2pn^{p-1}$  ; e.  $\frac{p(p-1)}{2}n^{p-2}$  ; f.  $(\sqrt{2}-1)n$  ; g.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  ; h.  $\sqrt{2}n$  ; i.  $\frac{1}{n^2}$  ; j.  $-\frac{1}{n^2}$  ; k.  $\frac{1}{n\sqrt{n}}$  ; l.  $-\frac{1}{n^3}$  ; m.  $-\frac{2}{n^2}$  ; n.  $-\frac{n}{(\ln n)^2}$  ; o.  $-n^2$  ; q.  $2^{n^2+n}$  ; r.  $2n^{\frac{n}{2}}$  ; s.  $2 \cdot 2^{n^2}$  ; t.  $(2n)!$  ; u.  $en^n$  ; v.  $\frac{1}{e}n^n$  ; w.  $(e-1)n^n$ .