GÉNÉRALITÉS

1. :

   (a) Soit (u_n) une suite ne prenant que les valeurs 0 ou 1 dont la limite est 0 ; démontrer en utilisant la définition de la limite que $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

   (b) Soit (u_n) une suite convergente ne prenant que les valeurs 0 ou 1 ; démontrer que (u_n) est constante égale à 0 ou 1 à partir d'un certain rang.

   (c) Démontrer plus généralement qu'une suite qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs et qui est convergente est constante à partir d'un certain rang.

2. :

   (a) Démontrer que si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) d'une suite réelle (u_n) ont la même limite l, alors (u_n) a pour limite l.

   (b) A-t-on la même conclusion si on suppose que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{3n}) de la suite (u_n) ont la même limite l ?

   (c) Que peut-on dire si on suppose que les trois sous-suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) de la suite (u_n) ont chacune une limite ?

3. * :

   (a) Montrer que si, dans la définition de la convergence vers l d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on intervertit le deuxième et le troisième quantificateur, ce qui donne :

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall n_1 \ \ \exists n \geqslant n_1 \ / \ \ |u_n - l| < \varepsilon$$

   on obtient la condition :

   " (u_n) possède une sous-suite convergeant vers l".

   REM : ceci est donc la définition de : "l est une valeur d'adhérence de (u_n)".

   (b) Montrer qu'une suite réelle est non majorée si et seulement si elle possède une sous-suite de limite $+\infty$.

   (c) Montrer qu'une suite réelle tend vers $+\infty$ si et seulement si elle ne possède pas de sous-suite majorée.

4. * : Montrer, par l'absurde, que la suite $(\sin n)$ est divergente ; indication : considérer diverses sous-suites de $(\sin n)$ pour obtenir une contradiction.

5. : Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (pour vrai : démontrer, et pour faux : donner un contre-exemple).

   (a) Si $\lim u_n = 0$ alors $\lim (u_n v_n) = 0$.

   (b) Si $\lim (u_n v_n) = 0$ alors $\lim u_n = 0$ ou $\lim v_n = 0$.

   (c) Si $\lim (u_n + v_n) = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$ ou $\lim v_n = +\infty$.

   (d) Si (u_n) est une suite strictement décroissante à termes positifs ou nuls, alors $\lim u_n = 0$.

   (e) Si $\lim u_n = 0$ et si (u_n) est une suite à termes positifs ou nuls, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

   (f) Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $nu_n \to +\infty$

   (g) Si $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)^n \to +\infty$

   (h) Si $u_{n+1} - u_n \to 0$, alors (u_n) est convergente.

   (i) Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,k} = 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n,1} + u_{n,2} + \cdots + u_{n,k}) = 0$.

   (j) Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,k} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n,1} + u_{n,2} + \cdots + u_{n,n}) = 0$.

6. * : Suite de l'exercice précédent :

   (a) Si (u_n) est convergente, alors $(|u_n|)$ est convergente.

(b) Réciproque de l'assertion précédente.
(c) Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim u_n = 0$ et $\lim w_n = 1$, alors $\lim v_n \in [0,1]$.
(d) Si (u_n) est convergente alors $\forall p \in \mathbb{N}\ \ u_{n+p} - u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
(e) Réciproque de l'assertion précédente.
(f) Si $\lim (u_{2n} - u_n) = 0$ et (u_n) croissante alors (u_n) est convergente.
(g) Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \to +\infty$.
(h) Réciproque de l'assertion précédente.
(i) Si $\lim u_n = +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
(j) Si (u_n) n'est pas majorée, alors il existe une suite extraite de (u_n) de limite $+\infty$.
(k) Réciproque de l'assertion précédente.
(l) Si $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
(m) Réciproque de (l).
(n) Si (u_n) et $\left(\dfrac{1}{u_{n,}}\right)$ sont bornées, alors $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$, équivaut à $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
(o) Si $(u_{n+1} - u_n)$ est monotone, alors (u_n) aussi à partir d'un certain rang.
(p) Si $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$, et si (u_n) est bornée, alors (u_n) est convergente.

7. : Déterminer la limite des suites de terme général u_n suivantes en utilisant le théorème des gendarmes :

(a) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2 + k}$
(b) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$
(c) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\sqrt{n + k}}$
(d) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n + k}$
(e) $u_n = \dfrac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{n!}$
(f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

8. :

(a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ et telles que $\lim u_n v_n = 1$. Que peut-on dire de (u_n) et (v_n) ?
(b) Soit (u_n) une suite à termes > 0 monotone ; montrer que si $\lim \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = 1$ alors $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

9. * :

(a) Montrer que l'équation $x^n = x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$ possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$ (REM : x_2 est le nombre d'or, x_3 celui d'argent, x_4 celui de bronze... Les x_n ont donc été décrétés "nombres métalliques").
(b) Etudier la suite (x_n) .

10. : On donne deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs et convergeant toutes les deux vers 0.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{u_n - v_p}{u_n + v_p} \right)$ et de $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - v_p}{u_n + v_p} \right)$? Pourquoi est-ce étonnant ?

11. * : Autour du lemme de Césaro.

(a) Montrer que si $\lim u_n = 0$, alors $\lim \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = 0$.

(b) Montrer que la réciproque de l'assertion précédente est fausse.

(c) Déduire du (a) que si $\lim u_n = l \in \mathbb{C}$ alors $\lim \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = l$ (*lemme de Césaro*).

(d) Déduire du (a) que si $\lim (u_n - u_{n-1}) = a \neq 0$ alors $u_n \sim na$ (propriété appelée *lemme de l'escalier* : si la hauteur des marches tend vers a alors la hauteur totale d'un escalier de n marches équivaut à na).

(e) En déduire que si (u_n) est à termes strictement positifs, et si $\lim \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = a > 0$ alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = a$ (c'est la comparaison des critères de D'Alembert et de Cauchy).

(f) Déduire de (a) que si $\lim u_n = 0$ et (v_n) est bornée, alors $\lim \dfrac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1}{n} = 0$.

(g) En déduire que si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim \dfrac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1}{n} = ll'$.

12. * : Lemme de Césaro à l'infini.

(a) Montrer que si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = +\infty$, mais que la réciproque est fausse.

(b) Montrer que par contre, si $\lim u_n = +\infty$, $\dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ et (u_n) ne sont pas forcément du même ordre : on donnera un exemple où $\dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \sim \alpha\, u_n$, et un exemple où $\dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} << u_n$.

13. * : On pose $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$; montrer SANS UTILISER LE FAIT QUE CES SUITES SONT CONVERGENTES, que $\lim (v_n - u_n) = 0$.

SUITES MONOTONES

Remarque : dans les exercices suivants, lorsqu'on demande de calculer un nombre a à 10^{-2} près, on cherche un entier N tel que $N10^{-2} - 0,01 \leqslant a \leqslant N10^{-2} + 0,01$; tout encadrement de largeur $\leqslant 0,01$ permet de déterminer un tel encadrement.
Par exemple, $1,49877 \leqslant a \leqslant 1,50354$ permet d'écrire : $1,49 \leqslant a \leqslant 1,51$, que l'on note : $a = 1,50 \pm 10^{-2}$.

Notons qu'il n'y a pas unicité de l'écriture : $a = 1,54426$ peut, à 10^{-2} près, s'écrire $a = 1,54 \pm 10^{-2}$ ou $a = 1,55 \pm 10^{-2}$.
Il n'existe pas de largeur minimale d'encadrement permettant de déterminer pour tout a un encadrement du type : $N10^{-2} \leqslant a \leqslant N10^{-2} + 0,01$.
Par exemple, si $a = 1,500001$, seul un encadrement de largeur $\leqslant 10^{-6}$ permettra de déterminer à coup sur si $a \geqslant 1,5$.

14. : On pose $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

(a) Pour $k \geqslant 1$, montrer que : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ et en déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k}$ pour $k \geqslant 2$, et un encadrement de h_n.

(b) On pose $u_n = h_{2n} - h_n$; montrer que (u_n) est convergente de limite $\in [1/2, 1]$.

(c) Grâce à l'encadrement de $1/k$ du (a), déterminer un encadrement de u_n et en déduire sa limite.

15. :

(a) On pose $r_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

i. Montrer que $\lim r_n = +\infty$, sans utiliser h_n.

ii. Montrer que pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$, soit en utilisant une méthode d'intégration, soit en utilisant la quantité conjuguée de $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

iii. En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ puis de r_n ; montrer par exemple que $18 \leqslant r_{100} \leqslant 20$.

iv. Déterminer un équivalent de r_n.

(b) Généralisation : $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

i. Montrer que $\lim s_n = +\infty$, sans utiliser h_n.

ii. Démontrer que pour $k \geqslant 1$

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

en déduire un encadrement de $\frac{1}{k^\alpha}$ pour $k \geqslant 2$, puis de s_n et donner enfin un équivalent de s_n ; montrer le développement : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + O(1)$.

iii. Donner par exemple un encadrement de s_{10}, pour $\alpha = \frac{1}{3}$.

16. :

(a) On pose $q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

i. Pour $k \geqslant 2$, vérifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

ii. Montrer que (q_n) est convergente de limite q vérifiant $1,5 \leqslant q \leqslant 2$.

iii. Déterminer, en utilisant (i), un encadrement de $q_N - q_n$ pour $N \geqslant n > 0$ et en déduire :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant q - q_n \leqslant \frac{1}{n}$$

iv. Calculer q à 10^{-2} près.
Sur casio : SUM(SEQ(1/X ^2,X,1,n))

v. On démontrera ultérieurement que $q = \frac{\pi^2}{6}$; admettant ce résultat, déduire de (iii) le développement : $\pi^2 = 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{6}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.

(b) Généralisation : On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

i. Pour $k \geqslant 2$, montrer que $\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)$.

ii. Montrer que (s_n) est convergente ; soit s sa limite.

iii. Déterminer, en utilisant (i), un encadrement de $s_N - s_n$ pour $N \geqslant n > 0$ et en déduire un encadrement de $s - s_n$ similaire à celui de a.(iii).

17. : f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

(a) Vérifier que pour $k \geqslant 1$, $f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \geqslant f(k+1)$.

(b) On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$; montrer que (u_n) converge vers $l \in [0, f(1)]$.

(c) Application 1 : montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$ converge vers $\gamma \in [0,1]$; en déduire le développement : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

(d) Application 2 : $w_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; montrer que (w_n) converge vers $R \in [1,2]$; en déduire le développement : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - R + o(1)$.

18. * : Quelques séries à signes alternés.

    On rappelle que $h_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \varepsilon_N$ avec $\lim \varepsilon_N = 0$.

    (a) Déterminer la valeur de la somme infinie :

    $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$$

    (b) Déterminer maintenant la valeur de la somme infinie :

    $$\underbrace{1 + \frac{1}{3}}_{\text{2 impairs}} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}_{\text{2 impairs}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11}}_{\text{2 impairs}} - \frac{1}{6} ...$$

    Qu'y a-t-il de paradoxal dans ce résultat ?

19. * : Soit (u_n) une suite réelle ; on pose $u_n^- = \inf_{p \geqslant n} u_p$.

    (a) Justifier que la suite (u_n^-) possède toujours une limite ; cette limite est appelée limite inférieure de la suite (u_n) : $\underline{\lim}\,(u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{p \geqslant n} u_p \right)$.

    (b) Définir de la même façon la limite supérieure d'une suite réelle après avoir justifié son existence.

    (c) Montrer que (u_n) possède une limite ssi $\underline{\lim}\,(u_n) = \overline{\lim}\,(u_n)$.

    (d) Montrer que la limite de toute sous-suite de (u_n) est comprise entre $\underline{\lim}\,(u_n)$ et $\overline{\lim}\,(u_n)$, et que $\underline{\lim}\,(u_n)$ et $\overline{\lim}\,(u_n)$ sont eux-mêmes limites de sous-suites de (u_n) .

20. * : Etudier la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_n = \dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 1 \end{cases}$

21. * : **Le surplomb de dominos**

    Soit (A_n) une suite de points sur une droite. On pose G_n =Isobar$(A_1, ..., A_n)$.

    $(\overrightarrow{OG}_n = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA}_1 + ... + \overrightarrow{OA}_n\right))$.On suppose que $\overrightarrow{G_n A_{n+1}} = \overrightarrow{u}$ (vecteur constant).

    (a) Faire une figure en construisant A_1, A_2, A_3, A_4. (prendre $\|\overrightarrow{u}\|$ assez grand).

    (b) Démontrer que $\overrightarrow{A_n A_{n+1}} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{n}$.

    (c) En déduire que $A_1 A_n \underset{n \to \infty}{\to} +\infty$.

    (d) On empile des dominos au bord d'une table de façon à obtenir le surplomb maximal. Calculer en fonction du nombre n de dominos (chacun de longueur l), ce surplomb maximal. Calculer le plus petit n à partir duquel ce surplomb est supérieur à $2l$.

SUITES ADJACENTES

22. : On pose $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ et $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \ln n$.

    (a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

    (b) Calculer à 10^{-2} près leur limite commune γ (constante d'Euler) .

    (c) En déduire le développement : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$

23. : On pose $u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $v_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

    (a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes de limite commune R que l'on calculera à 10^{-1} près.

(b) En déduire le développement : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - R + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

24. Soit f une fonction continue décroissante positive sur $[1, +\infty[$; on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$; soit F une primitive de f sur $[1, +\infty[$.

 (a) Montrer que si F possède une limite finie l en $+\infty$ alors les suites (u_n) et $(v_n) = (u_n + l - F(n))$ sont adjacentes.

 (b) Application aux séries de Riemann : montrer que si $\alpha > 1$ alors la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ possède une limite finie S quand n tend vers $+\infty$ et que $S = S_n + O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

25. : Moyenne arithmético-géométrique de deux réels a et $b > 0$, $a \leqslant b$;

 (a) Montrer que $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$.
 Soient $a_0 = a$, $b_0 = b$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

 (b) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes ; la limite commune est par définition la moyenne *arithmético-géométrique* de a et b.
 Indication : $b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$.

 (c) Calculer la moyenne arithmético-géométrique de 1 et 2 à 10^{-8} près.
 Programme sur TI ou Casio :

```
1→ A
2→ B
Lbl 1
√(A*B)→ C
(A+B)/2→ B
C→ A
If B-A >10 ^(-8)
Then
Goto 1
End (EndIf pour Casio)
Disp A,B
```

 (d) * Calculer $b_n^2 - a_n^2$ en fonction de b_{n-1} et a_{n-1} et en déduire que si $\varepsilon_n = b_n - a_n$, $2\varepsilon_n a_n + \varepsilon_n^2 = \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{4}$ puis que $\varepsilon_n \leqslant \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{8a} \leqslant 8a\left(\frac{b-a}{8a}\right)^{2^n}$. Calculer par exemple le nombre d'itérations suffisantes pour calculer la moyenne arithmético-géométrique de 1 et 2 à 10^{-100} près.

26. * : La moyenne arithmético-harmonique :
 Pour $0 < a \leqslant b$ on pose $m(a, b) = \frac{a+b}{2}$ et $h(a, b) = \frac{1}{m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}$ (moyenne *harmonique* de a et b)

 (a) Montrer que $a \leqslant h(a, b) \leqslant m(a, b) \leqslant b$ et que $h(a, b).m(a, b) = ab$.

 (b) On pose $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{n+1} = h(a_n, b_n) \\ b_{n+1} = m(a_n, b_n) \end{cases}$.
 Montrer que ces deux suites sont adjacentes ; soit $l(a, b)$ la limite commune.

 (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n b_n = ab$; que vaut donc $l(a, b)$? (la moyenne "arithmético-harmonique" n'est donc autre que la moyenne géométrique !).

(d) Déterminer une relation de récurrence simple vérifiée par (b_n) (de la forme $b_{n+1} = f(b_n)$) et comparer avec la méthode de Héron (exercice 41).

27. * Algorithme de Borchardt : soient $a_0 = a$, $b_0 = b$ avec $0 < a \leqslant b$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

(bien noter le $a_{n+1}b_n$ au lieu du a_nb_n).

(a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite, que l'on notera l.

(b) On pose $q_n = \frac{a_n}{b_n}$; vérifier que $q_{n+1} = \sqrt{\frac{1+q_n}{2}}$.

(c) En déduire que si $\alpha = \arccos \frac{a}{b}$, $a_n = b_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$, puis que $b_n = b_0 \dfrac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$.

(d) En déduire que $l = b_0 \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}$ et que $(b_n - a_n) \sim b_0 \dfrac{\alpha \sin \alpha}{2^{2n+1}}$.

(e) Que vaut donc $\frac{1}{l}$ si $a = 1/2, b = 1/\sqrt{2}$?

28. * Algorithme de Borchardt, bis : soient $a_0 = a$, $b_0 = b$ avec $0 < a \leqslant b$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ et } a_{n+1} = \sqrt{a_nb_{n+1}}$$

(bien noter les subtiles différences entre les exercices 25, 27 et 28 !).

(a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite, que l'on notera l.

(b) On pose $q_n = \frac{b_n}{a_n}$; vérifier que $q_{n+1} = \sqrt{\frac{1+q_n}{2}}$.

(c) En déduire que si $\alpha = \mathrm{argch}\frac{b}{a}$, $b_n = a_n \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2^n}$, puis que $a_n = a \dfrac{\mathrm{sh}\alpha}{2^n \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2^n}}$.

(d) En déduire que $l = a\dfrac{\mathrm{sh}\alpha}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arg\mathrm{ch}\frac{b}{a}}$ et que $(b_n - a_n) \sim a \dfrac{\alpha \ \mathrm{sh}\ \alpha}{2^{2n+1}}$.

(e) Montrer que si on part de $a_0 = \sqrt{ab}$, $b_0 = \dfrac{a+b}{2}$ au lieu de $a_0 = a$, $b_0 = b$, alors $l = \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$ = *moyenne logarithmique* de a et b.

29. * : Soit $x \in \mathbb{R}$; on pose $x_n = 10^{-n}[10^n x]$ et $y_n = x_n + 10^{-n}$.

(a) Déterminer (x_n) et (y_n) pour $x = 9,898$.

(b) Prouver que (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x.

30. : Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels convergeant vers 0. On pose

$$S_n = u_1 - u_2 + ... + (-1)^{n+1} u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k$$

(a) Vérifier que $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et que donc $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} u_k$ existe.

(b) Montrer que $|S - S_n| \leqslant u_{n+1}$ et que $S - S_n$ est du signe de $(-1)^n$.
Remarque : ces résultats constituent le théorème dit des séries *alternées* (car S_n est alternativement au dessous et au dessus de S).

(c) Déterminer à 10^{-2} près $S = 1-1/2+1/3-1/4+\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $T = 1-1/3+1/5-1/7+\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ (on montre qu'en fait $S = \ln 2$ et $T = \frac{\pi}{4}$).

31. :

(a) Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes > 0 vérifiant :
(u_n) croissante, (v_n) décroissante, et $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$,
alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) Montrer que les suites suivantes sont adjacentes : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Indication : étudier les fonctions $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ et $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$, ou bien montrer que $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}}$ et utiliser l'inégalité de Bernoulli (exercice 13 récurrences).

(c) Quelle valeur approchée de e obtient-on en calculant u_{1000} et v_{1000} ?

(d) Vérifier que $u_n^{v_n} = v_n^{u_n}$ avec u_n et v_n rationnels.

32. : Montrer que les suites suivantes sont adjacentes (on pourra utiliser 31. a)) :
$u_n = \sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ et $v_n = \sqrt{n+1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$; admettant avoir démontré que la limite commune est $1/\sqrt{\pi}$, en déduire un encadrement de $\binom{2n}{n}$; quelle approximation de $\binom{100}{50}$ cet encadrement fournit-il ?
Rep : $1,01.10^{29} \pm 0,01.10^{29}$

33. : Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$; montrer que les suites suivantes sont adjacentes (on pourra utiliser 31. a)) :
$u_n = n\sin\frac{\theta}{n}, v_n = n\tan\frac{\theta}{n}$.

34. * : Montrer que les suites suivantes sont adjacentes et donner une valeur approchée de leur limite à 10^{-2} près.

(a) $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ et $v_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}}$.
Indication : on pourra montrer en utilisant n quantités conjuguées, que $v_n - u_n \leqslant \frac{n}{2^{n-1}\sqrt{(n-1)!}}$.

35. * : Démonstration partielle de la formule de Stirling.

(a) Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ est convergente de limite l non nulle, en montrant que (u_n) et $(v_n) = \left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n+1}}\right)$ sont des suites adjacentes.

(b) En déduire un équivalent de $n!$ (on démontrera grâce aux intégrales de Wallis que $l = \sqrt{2\pi}$).

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE BOLZANO WEIERSTRASS

36. : Démontrer que de toute suite complexe, on peut extraire une sous suite convergente, sachant que de toute suite réelle, on peut extraire une sous suite convergente.

37. * : **Le critère de Cauchy.**

Definition 1 *On dit que* (u_n) *est une suite de Cauchy lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n, p \geqslant n_1 \quad |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$$

L'exercice a pour but de démontrer que toute suite de nombres complexes est convergente ssi elle est de Cauchy (on dit qu'elle "vérifie le critère de Cauchy").

(a) Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

(b) Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

(c) En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass complexe (ex. précédent), montrer qu'une suite de Cauchy est convergente.

(d) Démontrer à l'aide du critère de Cauchy qu'étant donné une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, si la suite de terme général $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |u_k|$ est convergente, alors la suite de terme général $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ est aussi convergente.

38. * :

(a) Montrer qu'une suite réelle bornée est divergente si et seulement si elle possède deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes.

(b) Montrer qu'une suite réelle est divergente de deuxième espèce (autrement dit : n'a pas de limite, ni finie, ni infinie) si et seulement si elle possède deux sous-suites ayant des limites distinctes.

(c) Étendre le (a) aux suites complexes.

SUITES RÉCURRENTES

39. : On considère la suite récurrente définie par son premier terme u_0 et la relation $u_n = f(u_{n-1})$ où $f(x) = ax(4-x)$.

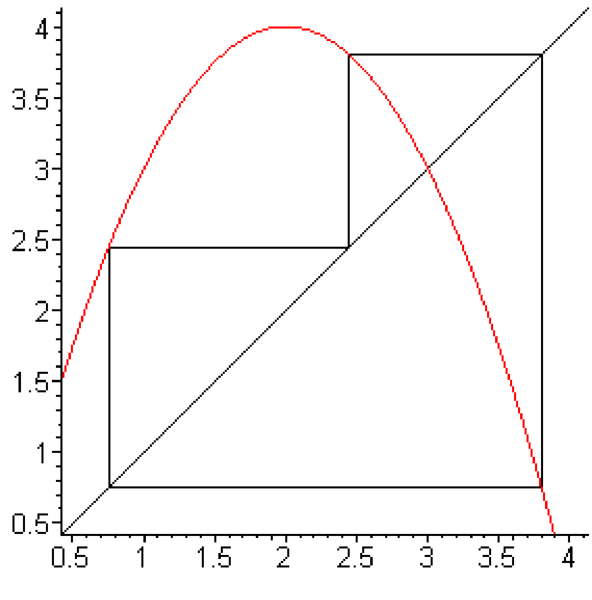
(a) Cas $a = \frac{1}{2}, u_0 = 1$; construire les premiers termes de la suite dans une figure, puis l'étudier.

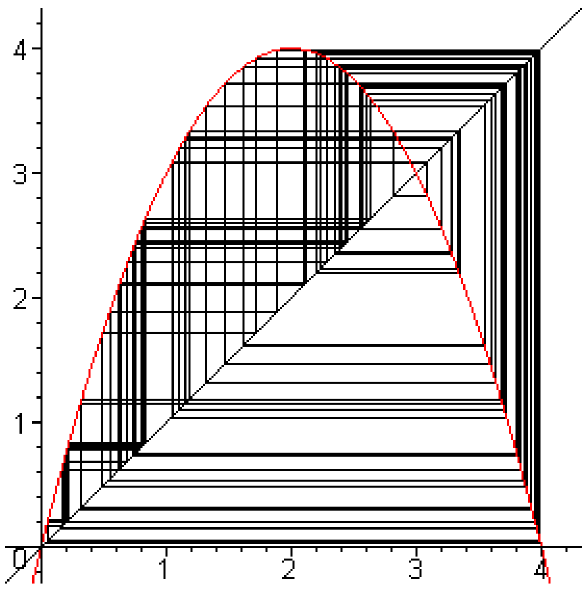
(b) Exceptionnellement on peut calculer u_n dans le cas précédent : vérifier que $1 - \frac{u_n}{2} = \left(1 - \frac{u_{n-1}}{2}\right)^2$, et en déduire u_n en fonction de n.

(c) Cas $a = \frac{3}{4}, u_0 = 2$; construire les premiers termes de la suite dans une figure, puis l'étudier.

Indication : $f(f(x)) - x = -\frac{x}{64}(3x-8)^3$.

(d) Cas $a = 1$; que se passe-t-il pour $u_0 = 3$? Et pour $u_0 = 3,1$? (On ne demande pas d'étude précise mais de construire les premiers termes de la suite). Commenter les figures ci-dessous.





40. Etudier la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_n = 1 - u_{n-1}^2$.

(a) Indication : $f(f(x)) - x = x(x-1)(x-a)(x+1/a)$ avec $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

41. : Méthode de Héron pour calculer une racine carrée.

(Héron d'Alexandrie, mathématien grec du Ier siècle après J.C. ; mais la méthode était connue des Babyloniens).
Soit a un réel >1.

(a) Montrer que si x est un réel > 0, $x < \sqrt{a} \Leftrightarrow \dfrac{a}{x} > \sqrt{a}$.

(b) Étudier la suite récurrente (appelée la suite de Héron) définie par $u_0 = a$, $u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{a}{u_{n-1}}\right)$ après avoir fait une figure.

(c) On pose $v_n = \dfrac{a}{u_n}$; étudier (v_n).

(d) Déterminer par cette méthode une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

(e) Montrer que $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2}(u_{n-1} - v_{n-1})$ et en déduire un majorant de $u_n - v_n$.

nous allons mainetenant obtenir un meilleur majorant.

(f) * On pose $U_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \left(= \dfrac{\sqrt{a} - v_n}{\sqrt{a} + v_n}\right)$; calculer U_n en fonction de U_{n-1} et en déduire $U_n = (U_0)^{2^n}$ puis en déduire que $u_n - \sqrt{a} \leqslant (a + \sqrt{a})\,\varepsilon^{2^n}$ avec $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$ et $\sqrt{a} - v_n \leqslant (2\sqrt{a})\,\varepsilon^{2^n}$. Donner enfin un majorant de $u_n - v_n$.

(g) * Pour obtenir $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près, pour quelle valeur de n suffit-il de calculer u_n et v_n.?

42. :

(a) Etudier la suite récurrente (faire une figure) : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_n = u_{n-1} - u_{n-1}^2$.

(b) Montrer que $\lim \left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}\right) = 1$ et en déduire, en admettant le lemme de l'escalier (exercice 11. (d)) que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

43. :

(a) Etudier la suite récurrente (faire une figure) : $u_0 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}}$.

(b) Montrer que $u_n^2 - u_{n-1}^2 \to 2$ et en déduire, en admettant le lemme de l'escalier (exercice 11. (d)), que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

(c) Autre méthode évitant le recours au lemme de l'escalier : Montrer que $2 \leqslant u_k^2 - u_{k-1}^2 \leqslant 2 + u_k - u_{k-1}$; sommer ces inégalités pour k allant de 1 à n ; en déduire que $1 - \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{2n}{u_n^2} \leqslant 1 - \dfrac{1}{u_{n^2}}$ et conclure.

44. * : Étudier la suite définie par :

$$\begin{aligned} 1.\ u_0 &= a \in \mathbb{C} \\ 2.\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \end{aligned}$$

COMPARAISON DES SUITES

45. :

(a) Classer par ordre croissant pour la relation << .
$(\sqrt{n})^n$; 2^{n^2} ; $(2n)^n$; n^{2^n} ; $n^{\sqrt{n}}$; $\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$; n^{2n} ; n^n .

(b) Comparer $\left(\frac{n}{2}\right)^n$ et $n!$ pour la relation $<<$ (indication : poser $u_n = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$ et déterminer $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$) ; en déduire la comparaison de n^{2n} et $(2n)!$.

(c) Introduire $n!$ et $(2n)!$ dans la liste du (a).

46. Vrai ou faux ?

(a) Soient (u_n), (u'_n), (v_n) des suites réelles vérifiant : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0, v_n > 0 \\ u_n \sim u'_n \end{cases}$; alors $u_n + v_n \sim u'_n + v_n$.

(b) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to a$, alors $u_n \sim u_0 a^n$.

(c) Si $\frac{u_n}{u_{n-1}} \sim v_n$ alors $u_n \sim u_{n-3} v_{n-2} v_{n-1} v_n$.

(d) Si $\frac{u_n}{u_{n-1}} \sim v_n$ alors $u_n \sim u_0 v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n$

(e) Si $\lim n u_n = 1$ alors $\lim n u_{n+1} = 1$.

(f) Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0, v_n > 0 \\ u_n << v_n \end{cases}$ et f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $f(u_n) << f(v_n)$.

47. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes > 0 ; Montrer que

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & o(v_n) \Leftrightarrow \forall \lambda > 0 \quad u_n \leqslant \lambda v_n \quad \text{APCR} \\ u_n & = & O(v_n) \Leftrightarrow \exists\, \lambda > 0 \quad u_n \leqslant \lambda v_n \quad \text{APCR} \\ u_n & \sim & v_n \Leftrightarrow \forall\, \lambda > 1 \quad \forall \mu \in]0,1[\quad \mu v_n \leqslant u_n \leqslant \lambda v_n \quad \text{APCR} \end{array}$$

48. * : Comparer $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^n$ et $n!$ $(\alpha > 0)$ pour la relation $<<$.

(a) En utilisant la formule de Stirling.

(b) Sans l'utiliser (sauf le cas $\alpha = e$).

49. : Montrer que si $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$ alors $(\sin u_n - \sin v_n) \sim (u_n - v_n)$ et $(e^{u_n} - e^{v_n}) \sim (u_n - v_n)$.

50. * : Aire d'un disque et aire des polygones réguliers inscrits et circonscrits.

(a) Montrer qu'un triangle isocèle de côté a, de hauteur h et d'angle au sommet θ a pour aire $\frac{1}{2} a^2 \sin\theta = h^2 \tan\frac{\theta}{2}$.

(b) Soit D un disque de rayon R ; montrer que l'aire d'un polygone régulier inscrit à n côtés vaut $S_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) R^2$ et déterminer de même l'aire S'_n d'un polygone régulier circonscrit à n côtés.

(c) Montrer que $\lim S_n$ et $\lim S'_n$ sont bien égales à ce que l'on souhaite et déterminer un équivalent simple de $S'_n - S_n$ quand $n \to +\infty$.

51. : Déterminer un équivalent simple pour chacune des suites ci-après, puis leur limite si elle existe.

(a) $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$

(b) $\sum_{k=0}^{n} k$

(c) $\binom{n}{k}$ (k étant fixé)

(d) $(n+1)^p - (n-1)^p$ (p entier positif fixé)

(e) $(n+1)^p - n^{p-1}(p+n)$ (p entier positif fixé)

(f) $\sqrt{2n^2+n} - n$

(g) $\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2}n$

(h) $\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{n}$

(i) $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$

(j) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}$

(k) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

(l) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n^2}$

(m) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n^2}$

(n) $\ln^4 n-\dfrac{n}{\ln^2 n}$

(o) $3^{\ln n}-n^2$

(p) $2^{n+1}-2^n$

(q) $2^{n^2+n}-2^{n^2}$

(r) $\left(\sqrt{n}\right)^n+n^{\sqrt{n}}+n^{\frac{n}{2}}$

(s) $\left(2^n\right)^n+2^{n^2}+\left(4^n\right)^2$

(t) $(2n)!-n^n$

(u) $(n+1)^n$

(v) $(n-1)^n$

(w) $(n+1)^n-n^n$

(x) $(n+1)^n-en^n$

Réponses : a. $\sqrt{n}$; b. $\dfrac{n^2}{2}$; c. $\dfrac{n^k}{k!}$; d. $2pn^{p-1}$; e. $\frac{p(p-1)}{2}n^{p-2}$; f. $\left(\sqrt{2}-1\right)n$; g. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; h. $\sqrt{2}n$; i. $\dfrac{1}{n^2}$; j. $-\dfrac{1}{n^2}$; k . $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;l. $-\dfrac{1}{n^3}$; m. $-\dfrac{2}{n^2}$; n. $-\dfrac{n}{(\ln n)^2}$; o. $-n^2$; q. 2^{n^2+n} ; r. $2n^{\frac{n}{2}}$; s. 2.2^{n^2};t. $(2n)!$;u. en^n ; v. $\dfrac{1}{e}n^n$; w. $(e-1)\,n^n$.