FORMULE DE TAYLOR – YOUNG – DÉVELOPPEMENTS LIMITES

1. Soit f une fonction deux fois dérivable en x_0.

   (a) Montrer que
   $$\frac{f(x_0+u)-f(x_0-u)}{2u} = f'(x_0) + \underset{u\to 0}{o}(u)$$

   (b) Donner un exemple de f continue en x_0 telle que $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0-u)}{2u} = l \in \mathbb{R}$ et pourtant f n'est pas dérivable en x_0.

2. Soit f une fonction trois fois dérivable en x_0.

   (a) Montrer que
   $$\frac{f(x_0+2u)-2f(x_0)+f(x_0-2u)}{4u^2} = f''(x_0) + \underset{u\to 0}{o}(u)$$

   (b) Donner un exemple de f dérivable en x_0 telle que $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+2u)-2f(x_0)+f(x_0-2u)}{4u^2} = l \in \mathbb{R}$ et pourtant f n'est pas deux fois dérivable en x_0.

   (c) * Généraliser le a) à l'ordre n.

3. : Intégration et dérivation d'un développement limité.
   On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable au voisinage de x_0

   (a) Montrer, en utilisant la grande règle de L'Hospital (exercice 27 dérivation) que si f' possède un développement limité polynomial à l'ordre n en x_0 alors f possède un développement à l'ordre $n+1$ en x_0, obtenu en intégrant terme à terme celui de f'.

   (b) Montrer que la réciproque est fausse ($f(x) = x^{n+1}\sin\dfrac{1}{x}$). (on a par contre vu en cours que cette réciproque est vraie si f est supposée $n+1$ fois dérivable en x_0).

4. : Déterminer sans passer par la formule de Taylor, mais en utilisant les développements connus, les développements limités en x_0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

   (a) $x \mapsto e^x$

   (b) $x \mapsto \cos x$

   (c) $x \mapsto \sin x$

   (d) $x \mapsto x^\alpha$

   (e) $x \mapsto \ln x$

   (f) $x \mapsto \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ (ici $x_0 = 0$).

5. : Déterminer le développement limité polynomial de f en x_0 à l'ordre n.

   (a) $x_0 = 0\,; n = 3; f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$
   Rep :$\frac{1}{3} + \frac{4}{9}x + \frac{13}{27}x^2 + \frac{40}{81}x^3 + o\left(x^3\right)$

   (b) $x_0 = 1$; $n = 6$; $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
   Rep :$u - \frac{3}{2}u^2 + \frac{11}{6}u^3 - \frac{25}{12}u^4 + \frac{137}{60}u^5 - \frac{49}{20}u^6 + o\left(u^6\right)$

   (c) $x_0 = 0$; $n = 7$; $f(x) = e^{\sin x}$
   Rep : $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} - \frac{x^6}{240} + \frac{x^7}{90} + o\left(x^7\right)$

   (d) $x_0 = 0$; $n = 7$; $f(x) = \operatorname{ch}(2x)\operatorname{sh}(3x)$
   Rep : $3x + \frac{21}{2}x^3 + \frac{521}{40}x^5 + \frac{13021}{1680}x^7 + o\left(x^7\right)$

   (e) $x_0 = 0$; $n = 3$; $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
   Rep : $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$

(f) $x_0 = 0$; $n = 6$; $f(x) = \ln \cos x$
Rep :$-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o\left(x^6\right)$

(g) $x_0 = \frac{\pi}{2}; n = 4; f(x) = \cos x - x \sin x$
Rep :$-\frac{1}{2}\pi - 2u + \frac{\pi}{4}u^2 + \frac{2}{3}u^3 - \frac{\pi}{48}u^4 + o\left(u^4\right)$

(h) $x_0 = 0\,; n = 4; f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$
Rep : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{64}x^4 + o\left(x^4\right)$

(i) $x_0 = 1; n = 4; f(x) = \arctan x$ (procéder par intégration)
Rep : $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{4} + \dfrac{u^3}{12} + o\left(u^4\right)$

(j) $x_0 = 1\,; n = 4; f(x) = (2-x)^{\tan(\pi x)}$
Rep$= 1 + (-\pi)\, u^2 - \frac{\pi}{2}u^3 + \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) u^4 + o\left(u^4\right)$

(k) $x_0 = 0\,; n = 5; f(x) = (1 + \arcsin(x))^{\sin(x)}$
Rep : $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \frac{5}{6}x^5 + o\left(x^5\right)$

(l) $x_0 = 0\,; n = 6; f(x) = (\cos x)^{\sin x}$
Rep : $1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^6 + o\left(x^6\right)$

(m) $x_0 = 0\,; n = 6; f(x) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
Rep : $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + o\left(x^6\right)$

(n) $x_0 = \frac{\pi}{6}; n = 2$; $f(x) = \left(\tan \dfrac{3x}{2}\right)^{\tan 3x}$;
Rep : $\frac{1}{e}\left(1 + \frac{3}{2}u^2 + o\left(u^2\right)\right)$

6. Déterminer les deux premiers termes non nuls du développement polynomial de f en 0 :

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$
   (b) $f(x) = (1+x)^x - (1 + \sin x)^{\sin x}$
   (c) $f(x) = \ln(1 + \sin x) - \sin(\ln(1+x))$
   (d) $f(x) = e^{\sin x} - e^{\arcsin x}$
   Rep : (a) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{12}$,(b) $\dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^5}{4}$.

7. Soit$\begin{cases} f(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \cdots + o(x^n) \\ g(x) = x + a'x^3 + b'x^5 + c'x^7 + \cdots + o(x^n) \end{cases}$ (quand $x \to 0$)

   (a) Déterminer la partie principale du développement polynomial en 0 de
   $$f(g(x)) - g(f(x))$$
   (b) Application à $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement polynomial de f en 0 à l'ordre n de :

   (a) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
   (b) $e^x \sin x$

9. :

   (a) Déterminer le DLP$_3$ de $\dfrac{1}{1+x-2x^2}$ en 0.
   (b) Écrire $\dfrac{1}{1+x-2x^2}$ sous la forme $\dfrac{a}{1+\alpha x} + \dfrac{b}{1+\beta x}$pour obtenir son DLP à l'ordre n en 0.

10. : Complément à l'exercice 25 sur les limites, traitant de la portée d'un promontoire.

    (a) Montrer que $L' = \sqrt{2Rh}\left(1 + \dfrac{u}{4} + o(u)\right)$ quand $u = \dfrac{h}{R} \to 0$, puis que $L = \sqrt{2Rh}\left(1 - \frac{5}{12}u + o(u)\right)$ quand $u \to 0$.

11. :

    (a) On se propose de déterminer le DLP$_n$ en 0 de $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ de 3 manières différentes.

        i. Méthode des coefficients indéterminés ; on pose $\dfrac{1}{1-x-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, $\left(1-x-x^2\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\right) = 1$; en déduire une relation de récurrence d'où l'exprssion de a_k à l'aide de la suite de Fibonacci (F_n) $(F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n)$.

        ii. Retrouver le DLP$_n$ de $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ en utilisant la méthode du 9. (b) ; en déduire une expression de F_n.

        iii. Retrouver encore le DLP$_n$ de $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ en utilisant la méthode $\dfrac{1}{1-u}$ et en déduire une relation entre les coefficients binomiaux et la suite de Fibonacci.

    (b) Déterminer le DLP$_n$ de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ en 0.

12. Soit f la solution de $(\mathbf{E})$, définie au voisinage de zéro, vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$, où

$$(\mathbf{E}) : 2(x-1)y' + y = \sin 2x + x^2$$

    (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une telle solution.

    (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de zéro, et donner son développement limité à l'ordre 4 en 0.
    Rep : $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7x^3}{12} - \dfrac{11x^4}{32} + o\left(x^4\right)$.

13. : Déterminer le développement généralisé au voisinage de 0 suivant la famille $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ de :

    (a) $\dfrac{1}{\sin x}$ à la précision x^4 $\left(= \dfrac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + o\left(x^4\right)\right)$

    (b) $\dfrac{\sin x}{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}$ à la précision x^3 $\left(= \dfrac{1}{x} + \frac{2}{3}x - \frac{53}{360}x^3 + o\left(x^3\right)\right)$

    (c) $\dfrac{1}{1-\cos x}$ à la précision x^3 $\left(= \dfrac{2}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{120}x^2 + o\left(x^3\right)\right)$

14. : Déterminer le développement généralisé au voisinage de $+\infty$ suivant la famille $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ de :

    (a) $\dfrac{1}{1+x}$ précision $\dfrac{1}{x^n}$

    (b) $\sqrt{1+x+x^2}$ précision $\dfrac{1}{x^2}$

    (c) $\sin\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)$ précision $\dfrac{1}{x^3}$ $\left(= \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{7}{6x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$

15. Déterminer le développement asymptotique quand $x \to +\infty$ suivant la famille $\left(x^\alpha \ln x^\beta\right)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ de :

    (a) $\ln(x+1)$ à la précision $\dfrac{1}{x^n}$

    (b) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ à la précision $\dfrac{1}{x^n}$

16. : Déterminer un développement asymptotique quand $x \to +\infty$ suivant la famille $\left(e^{-kx}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de :

    (a) $\ln(1+e^x)$ à la précision e^{-nx}.

(b) $\text{th}x$ à la précision e^{-nx}.

17. Déterminer la partie principale quand $x \overset{>}{\to} 0$ de $x^x - (\sin x)^{\sin x}$.

Rep : $\dfrac{x^3 \ln x}{6}$.

18. * : Reprenant les notations de l'exercice 36 sur la dérivation, on souhaite calculer $h'_d(e)$.

(a) Démontrer que $\dfrac{\ln(e+u)}{e+u} = \dfrac{1}{e} - \dfrac{u^2}{2e^3} + o\left(u^2\right)$ quand $u \to 0$.

(b) En utilisant $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln(h(x))}{h(x)}$ et la première question, démontrer que

$$(h(x) - e)^2 \underset{x \to e}{\sim} (x-e)^2$$

et en déduire que $h'_d(e) = -1$.

19. :

(a) Démontrer en utilisant simplement le développement limité de la fonction réciproque que :

i. $\arccos(1-u) \underset{u \to 0}{\sim} \sqrt{2u}$

ii. $\text{argch}(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} \sqrt{2u}$

iii. $\text{argth}(1-u) \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{2}|\ln u|$ alors que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) \underset{u \to 0}{\sim}$?

iv. $\text{argcoth}(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{2}|\ln u|$

(b) Démontrer plus généralement, en utilisant $\arccos(1-u) = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{2u}}{2}$ que $\arccos(1-u)$ possède un développement limité généralisé à l'ordre n du type :

$$a_0\sqrt{u} + a_1\sqrt{u^3} + \cdots + a_n\sqrt{u^{2n+1}} + o\left(\sqrt{u^{2n+1}}\right) \text{ quand } u \to 0$$

et calculer les a_i.

(c) Déterminer de même des développements limités de :

- $\text{argch}(1+u)$
- $\text{argth}(1-u)$
- $\text{argcoth}(1+u)$

20. * : Soit $g : x \mapsto x + \ln x$

(a) Montrer que g possède une fonction réciproque f, strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. Tracer les courbes de f et g.

(b) Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.

(c) Montrer que la fonction $f_1 : x \mapsto x - \ln x$ est asymptote à f en $+\infty$.

(d) Montrer plus précisément que :

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right) \text{ quand } x \to +\infty$$

et en déduire un terme supplémentaire dans le développement asymptotique de f.

21. * : Soit $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(a) Prolonger f par continuité en 0.

(b) Montrer que f possède des développements polynomiaux à tous ordres en 0 et déterminer celui d'ordre 2.

(c) Démontrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$.

(d) Donner un développement limité à deux termes de $(n+1)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

22. * : Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $m(t) = \left(\frac{a^t + b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$. (En particulier, $m(1)$ est la moyenne *arithmétique*, et $m(-1)$ est la moyenne *harmonique* de a et b).

   (a) Que vaut $m(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} m(t)$? Que vaut $m(-\infty) = \lim\limits_{t \to -\infty} m(t)$?

   (b) Montrer que $m(0) = \lim\limits_{x \to 0} m(t) = \sqrt{ab}$: c'est la moyenne géométrique de a et b.

   (c) Déterminer un développement limité à l'ordre 1 de $m(t)$ quand $t \to 0$.
   (rep : $m(t) = \sqrt{ab}\left(1 + \frac{\ln^2 \frac{a}{b}}{8} t + o(t)\right)$)
   En déduire $m'(0)$.

   (d) ** En utilisant une inégalité de convexité, démontrer que
   $$t > 1 \Rightarrow m(t) > m(1).$$

   (e) ** En déduire que si $0 < u < v$ alors $\frac{a^u + b^u}{2} < \left(\frac{a^v + b^v}{2}\right)^{\frac{u}{v}}$; puis que m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (f) ** Montrer que m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   (g) ** Tracer $\mathcal{C}_m$ pour $a = 1, b = 4$.