

FORMULE DE TAYLOR – YOUNG – DÉVELOPPEMENTS LIMITES

1. Soit f une fonction deux fois dérivable en x_0 .

(a) Montrer que

$$\frac{f(x_0 + u) - f(x_0 - u)}{2u} = f'(x_0) + o_{u \rightarrow 0}(u)$$

(b) Donner un exemple de f continue en x_0 telle que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 - u)}{2u} = l \in \mathbb{R}$ et pourtant f n'est pas dérivable en x_0 .

2. Soit f une fonction trois fois dérivable en x_0 .

(a) Montrer que

$$\frac{f(x_0 + 2u) - 2f(x_0) + f(x_0 - 2u)}{u^2} = f''(x_0) + o_{u \rightarrow 0}(u)$$

(b) Donner un exemple de f dérivable en x_0 telle que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2u) - 2f(x_0) + f(x_0 - 2u)}{u^2} = l \in \mathbb{R}$ et pourtant f n'est pas deux fois dérivable en x_0 .

(c) * Généraliser le a) à l'ordre n .

3. : Intégration et dérivation d'un développement limité.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable au voisinage de x_0

(a) Montrer, en utilisant la grande règle de L'Hospital (exercice 27 dérivation) que si f' possède un développement limité polynomial à l'ordre n en x_0 alors f possède un développement à l'ordre $n + 1$ en x_0 , obtenu en intégrant terme à terme celui de f' .

(b) Montrer que la réciproque est fautive ($f(x) = x^{n+1} \sin \frac{1}{x}$). (on a par contre vu en cours que cette réciproque est vraie si f est supposée $n + 1$ fois dérivable en x_0).

4. : Déterminer sans passer par la formule de Taylor, mais en utilisant les développements connus, les développements limités en x_0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto e^x$

(b) $x \mapsto \cos x$

(c) $x \mapsto \sin x$

(d) $x \mapsto x^\alpha$

(e) $x \mapsto \ln x$

(f) $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$ (ici $x_0 = 0$).

5. : Déterminer le développement limité polynomial de f en x_0 à l'ordre n .

(a) $x_0 = 0 ; n = 3 ; f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$
Rep : $\frac{1}{3} + \frac{4}{9}x + \frac{13}{27}x^2 + \frac{40}{81}x^3 + o(x^3)$

(b) $x_0 = 1 ; n = 6 ; f(x) = \frac{\ln x}{x}$
Rep : $u - \frac{3}{2}u^2 + \frac{11}{6}u^3 - \frac{25}{12}u^4 + \frac{137}{60}u^5 - \frac{49}{20}u^6 + o(u^6)$

(c) $x_0 = 0 ; n = 7 ; f(x) = e^{\sin x}$
Rep : $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} - \frac{x^6}{240} + \frac{x^7}{90} + o(x^7)$

(d) $x_0 = 0 ; n = 7 ; f(x) = \operatorname{ch}(2x) \operatorname{sh}(3x)$
Rep : $3x + \frac{21}{2}x^3 + \frac{521}{40}x^5 + \frac{13021}{1680}x^7 + o(x^7)$

(e) $x_0 = 0 ; n = 3 ; f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
Rep : $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o(x^3)$

- (f) $x_0 = 0 ; n = 6 ; f(x) = \ln \cos x$
 Rep : $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$
- (g) $x_0 = \frac{\pi}{2} ; n = 4 ; f(x) = \cos x - x \sin x$
 Rep : $-\frac{1}{2}\pi - 2u + \frac{\pi}{4}u^2 + \frac{2}{3}u^3 - \frac{\pi}{48}u^4 + o(u^4)$
- (h) $x_0 = 0 ; n = 4 ; f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$
 Rep : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{64}x^4 + o(x^4)$
- (i) $x_0 = 1 ; n = 4 ; f(x) = \arctan x$ (procéder par intégration)
 Rep : $\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12} + o(u^4)$
- (j) $x_0 = 1 ; n = 4 ; f(x) = (2-x)^{\tan(\pi x)}$
 Rep : $1 + (-\pi)u^2 - \frac{\pi}{2}u^3 + \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right)u^4 + o(u^4)$
- (k) $x_0 = 0 ; n = 5 ; f(x) = (1 + \arcsin(x))^{\sin(x)}$
 Rep : $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \frac{5}{6}x^5 + o(x^5)$
- (l) $x_0 = 0 ; n = 6 ; f(x) = (\cos x)^{\sin x}$
 Rep : $1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^6 + o(x^6)$
- (m) $x_0 = 0 ; n = 6 ; f(x) = \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$
 Rep : $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + o(x^6)$
- (n) $x_0 = \frac{\pi}{6} ; n = 2 ; f(x) = \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\tan 3x}$;
 Rep : $\frac{1}{e} (1 + \frac{3}{2}u^2 + o(u^2))$

6. Déterminer les deux premiers termes non nuls du développement polynomial de f en 0 :

- (a) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
- (b) $f(x) = (1+x)^x - (1+\sin x)^{\sin x}$
- (c) $f(x) = \ln(1+\sin x) - \sin(\ln(1+x))$
- (d) $f(x) = e^{\sin x} - e^{\arcsin x}$
- Rep : (a) $-\frac{1}{2} + \frac{x}{12}$, (b) $\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4}$.

7. Soit $\begin{cases} f(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \dots + o(x^n) \\ g(x) = x + a'x^3 + b'x^5 + c'x^7 + \dots + o(x^n) \end{cases}$ (quand $x \rightarrow 0$)

(a) Déterminer la partie principale du développement polynomial en 0 de

$$f(g(x)) - g(f(x))$$

(b) Application à $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement polynomial de f en 0 à l'ordre n de :

- (a) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$
- (b) $e^x \sin x$

9. :

- (a) Déterminer le DLP₃ de $\frac{1}{1+x-2x^2}$ en 0.
- (b) Écrire $\frac{1}{1+x-2x^2}$ sous la forme $\frac{a}{1+\alpha x} + \frac{b}{1+\beta x}$ pour obtenir son DLP à l'ordre n en 0.

10. : Complément à l'exercice 25 sur les limites, traitant de la portée d'un promontoire.

- (a) Montrer que $L' = \sqrt{2Rh} \left(1 + \frac{u}{4} + o(u)\right)$ quand $u = \frac{h}{R} \rightarrow 0$, puis que $L = \sqrt{2Rh} \left(1 - \frac{5}{12}u + o(u)\right)$ quand $u \rightarrow 0$.

11. :

- (a) On se propose de déterminer le DLP $_n$ en 0 de $\frac{1}{1-x-x^2}$ de 3 manières différentes.

i. Méthode des coefficients indéterminés ; on pose $\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$, $(1-x-x^2) \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)\right) = 1$; en déduire une relation de récurrence d'où l'expression de a_k à l'aide de la suite de Fibonacci (F_n) ($F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

ii. Retrouver le DLP $_n$ de $\frac{1}{1-x-x^2}$ en utilisant la méthode du 8. (b) ; en déduire une expression de F_n .

iii. Retrouver encore le DLP $_n$ de $\frac{1}{1-x-x^2}$ en utilisant la méthode $\frac{1}{1-u}$ et en déduire une relation entre les coefficients binomiaux et la suite de Fibonacci.

- (b) Déterminer le DLP $_n$ de $\frac{1}{1+x+x^2}$ en 0.

12. Soit f la solution de **(E)**, définie au voisinage de zéro, vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$, où

$$\text{(E)} : 2(x-1)y' + y = \sin 2x + x^2$$

- (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une telle solution.
 (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de zéro, et donner son développement limité à l'ordre 4 en 0.

$$\text{Rep} : f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{12} - \frac{11x^4}{32} + o(x^4).$$

13. : Déterminer le développement généralisé au voisinage de 0 suivant la famille $(x^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de :

(a) $\frac{1}{\sin x}$ à la précision x^4 $\left(= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + o(x^4)\right)$

(b) $\frac{\sin x}{\ln(1 + \sin^2 x)}$ à la précision x^3 $\left(= \frac{1}{x} + \frac{2}{3}x - \frac{53}{360}x^3 + o(x^3)\right)$

(c) $\frac{1}{1 - \cos x}$ à la précision x^3 $\left(= \frac{2}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{120}x^2 + o(x^3)\right)$

14. : Déterminer le développement généralisé au voisinage de $+\infty$ suivant la famille $(x^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de :

(a) $\frac{1}{1+x}$ précision x^n

(b) $\sqrt{1+x+x^2}$ précision $\frac{1}{x^2}$

(c) $\sin \frac{x+1}{x^2+1}$ précision $\frac{1}{x^3}$ $\left(= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

15. Déterminer le développement asymptotique quand $x \rightarrow +\infty$ suivant la famille $(x^\alpha \ln x^\beta)_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}$ de :

(a) $\ln(x+1)$ à la précision $\frac{1}{x^n}$

(b) $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ à la précision $\frac{1}{x^n}$

16. : Déterminer un développement asymptotique quand $x \rightarrow +\infty$ suivant la famille $(e^{-kx})_{k \in \mathbb{N}}$ de :

(a) $\ln(1+e^x)$ à la précision e^{-nx} .

(b) $\operatorname{th} x$ à la précision e^{-nx} .

17. Déterminer la partie principale quand $x \xrightarrow{+} 0$ de $x^x - (\sin x)^{\sin x}$.

Rep : $\frac{x^3 \ln x}{6}$.

18. * : Reprenant les notations de l'exercice 33 sur la dérivation, on souhaite calculer $h'_d(e)$.

(a) Démontrer que $\frac{\ln(e+u)}{e+u} = \frac{1}{e} - \frac{u^2}{2e^3} + o(u^2)$ quand $u \rightarrow 0$.

(b) En utilisant $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(h(x))}{h(x)}$ et la première question, démontrer que

$$(h(x) - e)^2 \underset{x \rightarrow e}{\sim} (x - e)^2$$

et en déduire que $h'_d(e) = -1$.

19. :

(a) Démontrer en utilisant simplement le développement limité de la fonction réciproque que :

i. $\arccos(1-u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2u}$

ii. $\operatorname{argch}(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2u}$

iii. $\operatorname{argth}(1-u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} |\ln u|$ alors que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} ?$

iv. $\operatorname{argcoth}(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} |\ln u|$

(b) Démontrer plus généralement, en utilisant $\arccos(1-u) = 2 \arcsin \frac{\sqrt{2u}}{2}$ que $\arccos(1-u)$ possède un développement limité généralisé à l'ordre n du type :

$$a_0 \sqrt{u} + a_1 \sqrt{u^3} + \dots + a_n \sqrt{u^{2n+1}} + o\left(\sqrt{u^{2n+1}}\right) \text{ quand } u \rightarrow 0$$

et calculer les a_i .

(c) Déterminer de même des développements limités de :

- $\operatorname{argch}(1+u)$
- $\operatorname{argth}(1-u)$
- $\operatorname{argcoth}(1+u)$

20. * : Soit $g : x \mapsto x + \ln x$

(a) Montrer que g possède une fonction réciproque f , strictement croissante, de classe \mathcal{C}^∞ , strictement positive sur \mathbb{R} . Tracer les courbes de f et g .

(b) Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

(c) Montrer que la fonction $f_1 : x \mapsto x - \ln x$ est asymptote à f en $+\infty$.

(d) Montrer plus précisément que :

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right) \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

et en déduire un terme supplémentaire dans le développement asymptotique de f .

21. * : Soit $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(a) Prolonger f par continuité en 0.

(b) Montrer que f possède des développements polynomiaux à tous ordres en 0 et déterminer celui d'ordre 2.

(c) Démontrer que f est \mathcal{C}^2 sur $[0, +\infty[$.

(d) Donner un développement limité à deux termes de $(n+1)^n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

22. * : Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $m(t) = \left(\frac{a^t + b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$. (En particulier, $m(1)$ est la moyenne arithmétique, et $m(-1)$ est la moyenne harmonique de a et b).

(a) Que vaut $m(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} m(t)$? Que vaut $m(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} m(t)$?

(b) Montrer que $m(0) = \lim_{x \rightarrow 0} m(t) = \sqrt{ab}$: c'est la moyenne géométrique de a et b .

(c) Déterminer un développement limité à l'ordre 1 de $m(t)$ quand $t \rightarrow 0$.

$$\left(\text{rep : } m(t) = \sqrt{ab} \left(1 + \frac{\ln^2 \frac{a}{b}}{8} t + o(t)\right)\right)$$

En déduire $m'(0)$.

(d) ** En utilisant une inégalité de convexité, démontrer que

$$t > 1 \Rightarrow m(t) > m(1).$$

(e) ** En déduire que si $0 < u < v$ alors $\frac{a^u + b^u}{2} < \left(\frac{a^v + b^v}{2}\right)^{\frac{u}{v}}$; puis que m est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

(f) ** Montrer que m est strictement croissante sur \mathbb{R}_-^* , puis sur \mathbb{R} tout entier.

(g) ** Tracer \mathcal{C}_m pour $a = 1, b = 4$.