MPSI 2 MATHS : EXERCICES DE RENTREE LYCEE FENELON 2016

A rédiger au propre sur copies doubles.

I. CALCUL

1. Simplifier au maximum les écritures suivantes (x est un réel et n un entier naturel ; la notation $n!$ qui se lit "factorielle n " représente le produit des entiers de 1 jusqu'à n):
a) $\sqrt{x^2}$; b)$\dfrac{(n+1)!}{n!}$; c) $\cos 2n\pi$; d) $\cos n\pi$; e) $\sin n\pi$; f) 2^n+2^n; g) $2^n 2^n$; h) $\left(2^{2n-1}-2^n+1\right)\left(2^{2n-1}+2^n+1\right)$;
i) $(-1)^{-n}$; $(-1)^{n^3-6n+7}$; j) $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1-x}{(1+x)^2}}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)}$; k) $\dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n.n!}$.

2. : Rendre rationnel le dénominateur de $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

3. : Mettre sous forme de fraction irréductible : $0,424242...$ puis $1,3424242...$

4. : Calculer les sommes ou produits :
   (a) $1+2+..+(n-1)+n+(n-1)+..2+1$
   (b) $1+3+5+..+(2n-1)$
   (c) $1+2+4+..+2^n$
   (d) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+..+\dfrac{1}{2^n}$

5. : Factoriser au maximum (il ne doit y avoir ni fractions, ni racines carrées, ni exposants) :
   (a) $6-6x+3x(x-1)-x(x-1)(x-2)$
   (b) $6x^3+5x^2-3x-2$ (indication : mettre en facteur $x-x_0$ où x_0 est une racine "évidente")
   (c) $mx^2-\left(1+m^2\right)x+m$
   (d) $4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$
   (e) $a^3-b^3=(a-b)(..............)$

6. : Déterminer la solution générale du système, si $ad\neq bc$: $\left\{\begin{array}{l} ax+cy=e \\ bx+dy=f \end{array}\right.$; on utilisera la notation : $\left|\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array}\right|=ad-bc$.

7. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{c} x+y=2 \\ xy=5 \end{array}\right.$.

8. : Résoudre les inéquations :
   (a) $\dfrac{1}{x}>-1$
   (b) $-1<\dfrac{1-x}{1+x}<1$
   (c) $0\leqslant\dfrac{x-1}{x+1}\leqslant 1$

9. : Montrer que $3.5.7...(2n-1)=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

II. FONCTIONS

10. : Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

11. : Connaissant les courbes de ln et exp, construire les courbes de $f: x\mapsto\ln(x+1)$, $g: x\mapsto\ln(1-x)$; $h: x\mapsto 1-e^x$ (faire 3 figures et indiquer la transformation utilisée pour passer des courbes de départ aux nouvelles).

12. : Démontrer que les courbes de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et de $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ peuvent se tracer à l'aide du compas (et les tracer !).

13. : Étudier et tracer en moins de 10 minutes chacune : $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$; $g : x \mapsto x \ln x$.

14. : Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \int_1^x e^{t^2} dt$.

III. PROBAS

15. Le taux de réussite au permis de conduire est de a =55% ; mais le taux de réussite des élèves ayant suivi la conduite accompagnée est de b =69%, contre c =49% seulement pour les élèves ayant suivi une formation traditionnelle.

    (a) Quel est la proportion d'élèves réussissant le permis après avoir suivi la conduite accompagnée (d'abord en fonction de a, b, c) ?

    (b) Si A est l'évènement "réussir son permis" et B l'évènement "suivre la conduite accompagnée", quelle formule faisant intervenir des probabilités et des probabilités conditionnelles donne le calcul précédent ?

IV. DÉMONSTRATIONS CLASSIQUES.

Vous êtes censés connaître les théorèmes suivants, mais connaissez-vous leur *démonstration* ?

16. : $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

17. : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

18. : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique des termes extrêmes.

19. : $1 + x + ... + x^n = \begin{cases} n+1 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$.

20. : $\dfrac{\ln x}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ ou bien $\dfrac{e^x}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$, puis déduire l'une de l'autre.

V . POUR RÉFLÉCHIR

21. On pose $P_n(x) = (x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\cdots\left(x^{2^n}+1\right)$;

    (a) Simplifier $(x-1)\, P_n(x)$.

    (b) En déduire la forme développée de $P_n(x)$.

    (c) En déduire que si $F_n = 2^{2^n} + 1$, $F_n = F_0 F_1 ... F_{n-1} + 2$.

    (d) En déduire que deux nombres F_n et F_p distincts sont premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'autres diviseurs communs autres que 1)

    (e) En déduire qu'il y a un nombre infini de nombres premiers (nombres divisibles seulement par 1 et par eux-même).

    (f) On suppose $|x| < 1$; déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(x)$.