# MPSI 2 EXERCICES DE MATHEMATIQUES LYCEE FENELON 2011

à préparer sur feuille pour la rentrée.

A. NE DEVRAIT POSER AUCUN PROBLÈME À L'ARRIVÉE EN MATH SUP.
I. CALCUL

1. : Simplifier les écritures suivantes ($x$ est un réel et $n$ un entier naturel):
$\sqrt{x^2}$ ; $x.\text{signe}(x)$ ; $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ ; $\cos 2n\pi$ ; $\cos n\pi$; $\sin n\pi$; $2^n+2^n$; $2^n.2^n$; $\left(2^{2n-1}-2^n+1\right)\left(2^{2n-1}+2^n+1\right)$ ;
$(-1)^{-n}$ ; $(-1)^{n^3-6n+7}$
2. : Rendre rationnel le dénominateur de $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.
3. : Mettre sous forme de fraction irréductible : $0,424242...$ puis $1,3424242...$
4. : Calculer les sommes ou produits :
   (a) $1+2+..+(n-1)+n+(n-1)+..2+1$
   (b) $1+3+5+..+(2n-1)$
   (c) $1+2+4+..+2^n$
   (d) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+..+\dfrac{1}{2^n}$
5. : Factoriser au maximum (il ne doit y avoir ni fractions, ni racines carrées, ni exposants) :
   (a) $6-6x+3x(x-1)-x(x-1)(x-2)$
   (b) $6x^3+5x^2-3x-2$
   (c) $mx^2-\left(1+m^2\right)x+m$
   (d) $4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$
6. : Donner la solution générale du système, si $ac \neq bd$ : $\begin{cases} ax+cy=e \\ bx+dy=f \end{cases}$.
7. Résoudre le système : $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=5 \end{cases}$.
8. : Résoudre les inéquations :
   (a) $\dfrac{1}{x} > -1$
   (b) $-1 < \dfrac{1-x}{1+x} < 1$
   (c) $0 \leqslant \dfrac{x-1}{x+1} \leqslant 1$
9. : Montrer les égalités :
   (a) $a^{\ln b} = b^{\ln a}$
   (b) $3.5.7...(2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

II. FONCTIONS

10. : Sachant $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
11. : Connaissant les courbes de ln et exp, construire les courbes de $x \mapsto \ln(x+1)$, $x \mapsto \ln(1-x)$ ; $x \mapsto 1-e^x$ (indiquer la transformation utilisée pour passer des courbes de départ aux nouvelles).

12. : Même question pour passer de la courbe de cos aux courbes de $x \mapsto \cos \frac{x}{2}, x \mapsto \cos 2x$, $x \mapsto \cos^2 x$ (linéariser).

13. : Démontrer que les courbes de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et de $x \mapsto \sqrt{x\,(1-x)}$ peuvent se tracer à l'aide du compas.

14. : Étudier et tracer en moins de 5 minutes chacune :$f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ ; $g : x \mapsto x \ln x$ .

15. : Calculer la dérivée de $f : x \mapsto x^{x^2}$, de $g : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$.

III. DÉMONSTRATIONS CLASSIQUES.
Vous êtes censés connaître les théorèmes suivants, mais connaissez-vous leur *démonstration* ?

16. : La somme des mesures en degrés d'un triangle vaut 180°.

17. : L'aire d'un triangle vaut la moitié du produit de la longueur d'un côté par la hauteur correspondante.

18. : L'aire d'un losange est la moitié du produit des longueurs de ses diagonales.

19. : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

20. : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

21. : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.

22. : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes et se coupent au 2/3 de leur longueur.

23. : Si un triangle $ABC$ est inscrit dans un cercle de centre $O$, avec $O$ et $A$ du même côté de $(BC)$, $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

24. : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

25. : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

26. : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique des termes extrêmes.

27. : $1 + x + ... + x^n = \left\{ \begin{array}{c} n+1 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \end{array} \right.$ .

28. : $\frac{\ln x}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ ou bien $\frac{e^x}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$, puis déduire l'une de l'autre.

29. : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

30. : Il existe une infinité de nombres premiers.

B . POUR RÉFLÉCHIR

31. On pose $P_n(x) = (x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\cdots\left(x^{2^n}+1\right)$ ;

    (a) Simplifier $(x-1)\,P_n\,(x)$.
    (b) En déduire la forme développée de $P_n\,(x)$.
    (c) En déduire que si $F_n = 2^{2^n} + 1$, $F_n = F_0 F_1 ... F_{n-1} + 2$.
    (d) En déduire que deux nombres $F_n$ et $F_p$ distincts sont premiers entre eux.
    (e) En déduire qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.