V) DÉRIVATION, APPLICATION A L'ÉTUDE D'UNE FONCTION.

Dans tout ce chapitre f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Définitions.

DEF : soit x_0 un point tel que f soit définie sur un intervalle du type $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$; on dit que f est *dérivable* en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et x tend vers une limite finie quand x tend vers x_0.

PROP : cette définition peut se mettre sous les deux formes équivalentes :

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et $\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}$ existe et $\in\mathbb{R}$

D1

DEF : soit D'_f l'ensemble des points où f est dérivable ; la fonction d'ensemble de définition D'_f qui à x_0 fait correspondre $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelée la *dérivée* de f et est notée f' (notation de Lagrange) ou $D(f)$.

On a donc, pour $x\in D'_f$

$$\boxed{f'(x)=\lim_{x'\to x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}}$$

E1

PROP et DEF : (Interprétation géométrique) : en notant $M(x,f(x))$, $M_0(x_0,f(x_0))$,
f est *dérivable* en x_0 ssi la pente de la sécante (M_0M) possède une limite finie quand x tend vers x_0.

La droite passant par M_0 et ayant cette limite pour pente (qui est donc la position limite de la sécante (M_0M)) est par définition la *tangente* à la courbe C_f en M_0.

Son équation cartésienne est :

$$\boxed{}$$

Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ ou $-\infty$, et si f est continue en x_0, la droite verticale passant par M_0 est la tangente à la courbe C_f en M_0, mais f n'est pas considérée comme dérivable.

DEF : soit x_0 un point tel que f soit définie *au voisinage* $\begin{cases}\text{à gauche}\\\text{à droite}\end{cases}$ de x_0 ; on dit que f est *dérivable* $\begin{cases}\text{à gauche}\\\text{à droite}\end{cases}$ en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et x tend vers une limite finie quand x tend vers x_0 avec $\begin{cases}x<x_0\\x>x_0\end{cases}$.

On définit alors comme ci-dessus les deux fonctions dérivées, à droite et à gauche, notées f'_g et f'_d :

$$\boxed{f'_g(x)=\lim_{x'\overset{<}{\to}x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\ ;\ f'_d(x)=\lim_{x'\overset{>}{\to}x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}}$$

PROP : f est dérivable en x_0 ssi elle y est dérivable à droite et à gauche ET les deux dérivées à droite et à gauche sont égales en x_0.

D2

Une fonction dérivable à droite et à gauche de dérivées à droite et à gauche distinctes donne donc un exemple simple de fonction non dérivable.

DEF : une fonction est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I, avec la restriction qu'on n'exige que la dérivabilité à droite pour la borne de gauche, et la dérivabilité à gauche pour la borne de droite (si celles-ci appartiennent à l'intervalle).

2) Propriétés.

P1 : la dérivabilité (resp. à droite, à gauche) entraîne la continuité (resp. à droite, à gauche), mais la réciproque est fausse.

D3

REM : une fonction dérivable à droite et à gauche est donc continue (mais pas forcément dérivable).

P2 : (dérivabilité de la somme et du produit)

Si f et g sont dérivables en x alors $f+g$ et fg aussi et

$$\begin{cases} (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \\ (fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \end{cases}$$

Ceci provient de ce que

$$\boxed{\begin{array}{l} t_{f+g}(x,x') = t_f(x,x') + t_g(x,x') \\ \hline t_{fg}(x,x') = t_f(x,x').g(x') + f(x).t_g(x,x') \end{array}}$$

D4

REM : on a donc $D'_{f+g} \supset D_f \cap D_g$ et $D'_{fg} \supset D_f \cap D_g$; il n'y a pas forcément égalité, comme le montre l'exemple $f = x \mapsto |x|$ et $g = -f$; on écrit en général :

$$\boxed{\begin{array}{l} (f+g)' = f' + g' \\ \hline (fg)' = f'g + fg' \end{array}}$$

mais ceci n'est en toute rigueur valable que si $D'_{f+g} = D_f \cap D_g$ et $D'_{fg} = D_f \cap D_g$.

P3 : (dérivabilité de l'inverse)

Si f est dérivable en x et jamais nulle sur un voisinage de x, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en x, et

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

Ceci provient de ce que

$$\boxed{t_{1/f}(x,x') = -\frac{t_f(x,x')}{f(x)\, f(x')}}$$

D5

REM : avec la même restriction que ci-dessus, on écrira donc :

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$$

P4 : (dérivabilité du quotient, CORO de P2 et P3)

Si f et g sont dérivables en x et g jamais nulle sur un voisinage de x, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}}$$

D6

REM : avec la même restriction que ci-dessus, on écrira donc :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

P5 : (dérivabilité de la composée)

Si f est dérivable en x et g dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x et

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)}$$

D7 (dans un cas restreint)
D7 utilise

$$t_{g \circ f}(x, x') = t_g(f(x), f(x')) . t_f(x, x') \ \text{(valable seulement si } f(x) \neq f(x')\text{)}$$

REM 1 : avec la même restriction que ci-dessus, on écrira donc :

$$\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'}$$

APPLICATIONS :

$\lvert f\rvert' =$signe$(f) . f'$
$(f^n)' = n f^{n-1} f'$ pour tout n entier
$\left(\dfrac{f}{g^n}\right)' = \dfrac{f'g - nfg'}{g^{n+1}}$
$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

D8

3) Exemples classiques de fonctions dérivables
E2

4) Application des dérivées au calcul d'une limite de forme $\dfrac{0}{0}$; petite règle de L'Hospital.

PROP : (petite règle de L'Hospital (Guillaume de L'Hospital, 1661-1704))

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont dérivables en } x_0 \\ g(x) \neq 0 \text{ sur un voisinage pointé de } x_0 \\ f(x_0) = g(x_0) = 0 \\ g'(x_0) \neq 0 \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$$

D11

5) Relations entre le signe de la dérivée et le sens de variation.

a) Monotonie large.

TH : soit I un intervalle ; on note $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle I privé de ses bornes.

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : f \text{ est } \begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases} \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I} \ \ f'(x) \begin{cases} \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \end{cases}}$$

En simplifiant, on peut dire qu'une fonction dérivable est monotone sur un intervalle si et seulement si sa dérivée y est de signe constant.

CORO :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : f \text{ est constante sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I} \ \ f'(x) = 0}$$

ATTENTION : pour ces théorèmes, le fait que I soit un intervalle est primordial ; par exemple la fonction signe est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ et pourtant, elle n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$, et la fonction "inverse" est de dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ et pourtant, elle n'y est pas monotone.

CORO du CORO : deux fonctions ayant des dérivées égales sur un intervalle diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

b) Monotonie stricte.

Première remarque : une fonction strictement croissante et dérivable, peut avoir une dérivée qui s'annule.
E3

TH :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I} \\ \forall x \in \overset{\circ}{I} \;\; f'(x) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : f \text{ est } \begin{cases} \text{strictement croissante} \\ \text{strictement décroissante} \end{cases} \text{ sur } I}$$

6) PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

a) Déterminer l'ensemble de définition.

b) Déterminer un ensemble d'étude.

i) Rechercher une relation du type $f(x+T) = f(x)$ ou $f(x+T) = -f(x)$ avec $T > 0$.

Dans le premier cas, f est T-périodique et on étudie la fonction sur $[a, a+T] \cap D_f$; la courbe complète est obtenue par translations de la courbe sur $[a, a+T]$, de vecteurs $kT\overrightarrow{i}, k \in \mathbb{Z}$.

Dans le deuxième cas, on étudie la fonction sur $[a, a+T] \cap D_f$; la courbe complète est obtenue par translations de la courbe sur $[a, a+T]$, de vecteurs $kT\overrightarrow{i}, k \in \mathbb{Z}$, accompagnée de symétrie par rapport à Ox quand k est impair. Remarquons que dans ce cas, f est $2T$-périodique.

Vocabulaire : un réel T tel que $f(x+T) = -f(x)$ s'appelle une "antipériode" de f.

ii) Rechercher une relation du type $f(b-x) = f(x)$ ou $f(b-x) = c - f(x)$ (lorsque $b = c = 0$, f est paire ou impaire).

On étudie alors f sur $[b/2, +\infty[\cap D_f$, ou sur $[b/2, b/2 + T/2] \cap D_f$ si le a) a été concluant. On effectuera une symétrie par rapport à $x = b/2$ dans le premier cas, et par rapport à $B(b/2, c/2))$ dans le deuxième.

On étudie donc f sur un certain ensemble $D_1 \subset D_f$.

E4 : $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

c) Déterminer les limites aux bornes ouvertes des intervalles composant l'ensemble d'étude.

Dans le cas d'une limite finie en une borne finie, prolonger f par continuité.

E5 :$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$,

d) Étudier la dérivabilité.

En général, la fonction est, par les théorèmes généraux, dérivable sur un ensemble $D_2 \subset D_1$. Reste à examiner les points litigieux (points où les $\sqrt{\ }$ s'annulent par exemple) et les prolongements par continuité.

E6 : $f(x) = x\sqrt{x(1-x)}, f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

e) Calculer $f'(x)$ pour $x \in D_2$.

f) Rechercher le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signes, faisant intervenir autant de fonctions auxiliaires que nécessaire et en déduire les variations de f dans la dernière ligne du tableau.

E7 :$f(x) = x^2(x + 3\ln x)$, $f(x) = x\sqrt{\sin x}$.

g) Ébaucher le tracé de la courbe, en reliant les points remarquables du tableau précédent, tracés avec leurs tangentes.

h) Étudier les branches infinies.

i) si $\lim\limits_{x \to +\infty (\text{ou } -\infty)} f(x) = l \in \mathbb{R}$, la droite $y = l$ est asymptote horizontale.

ii) si $\lim\limits_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = x_0$ est asymptote verticale.

iii) si $\lim\limits_{x \to +\infty (\text{resp. } -\infty)} f(x) = \pm\infty$.

α) Direction asymptotique.

DEF : on dit que C_f admet une *direction asymptotique* au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) si le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite l quand $x \to +\infty$(ou $-\infty$).

Quand $l = \pm\infty$, on parle de direction asymptotique *verticale.*

Quand $l = 0$, on parle de direction asymptotique *horizontale.*

Quand $l = a \in \mathbb{R}^*$, on parle de direction asymptotique (oblique) de pente a.

Interprétation géométrique : la courbe admet une direction asymptotique au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi la droite $(OM(x))$ possède une position limite quand $x \to +\infty$ (resp. $-\infty$).

ATTENTION : QUI DIT DIRECTION ASYMPTOTIQUE NE DIT PAS FORCÉMENT (DROITE) ASYMPTOTE.

Exemples :

$*$ $y = \sin x$, $y = \ln x, y = \sqrt{x}$ possèdent une direction asymptotique horizontale, mais pas d'asymptote.

$*$ $y = ax + \sin x$, $y = ax + \ln x, y = ax + \sqrt{x}$ possèdent une direction asymptotique oblique de pente a, mais pas d'asymptote.

$*$ $y = x^2$, $y = e^x$ possèdent une direction asymptotique verticale, mais pas d'asymptote.

Attention : il peut ne pas y avoir de direction asymptotique ; exemple : $y =$

DEF : lorsqu'il y a une direction asymptotique verticale, ou lorsqu'il y a une direction asymptotique de pente a et que $\lim(f(x) - ax)$ a une limite INFINIE, on dit que la branche est *parabolique.*

E8

β) Asymptote oblique

DEF : on dit que C_f admet pour *asymptote* la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) si la limite de $f(x) - (ax + b)$ est nulle quand $x \to +\infty$(ou $-\infty$).

REM : le nombre a est forcément la pente de la direction asymptotique.

Actuellement, vous aurez deux méthodes pour déterminer une asymptote :

1) Mettre $f(x)$ sous la forme $ax + b+$ un reste qui tend vers 0.

E9 : $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

2) Calculer la limite a de $\dfrac{f(x)}{x}$ puis la limite b de $f(x) - ax$.

REM : en général, et étymologiquement ("a" = préfixe privatif, et "symptotos"= rencontre) la courbe ne rencontre pas son asymptote ; mais la définition ne l'implique pas du tout !