V) COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION.

1) Définitions.

DEF : soit x_0 un point tel que f soit définie *au voisinage* de x_0 ; on dit que f est *dérivable* en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et x tend vers une limite finie quand x tend vers x_0.

PROP : cette définition peut se mettre sous les diverses formes, À BIEN CONNAÎTRE :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et $\in \mathbb{R}$	1 bis. $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}$ existe et $\in \mathbb{R}$
2. $\exists a\in\mathbb{R}\ \ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a + \underset{x\to x_0}{o}(1)$	2 bis. $\exists a\in\mathbb{R}\ \ \dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u} = a + \underset{u\to 0}{o}(1)$
3. $\exists a\in\mathbb{R}\ \ f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$	3 bis. $\exists a\in\mathbb{R}\ \ \boxed{f(x_0+u) = f(x_0) + au + \underset{u\to 0}{o}(u)}$
	4 bis. $\begin{cases} \exists a\in\mathbb{R}^*\ \ \boxed{f(x_0+u)-f(x_0) \underset{u\to 0}{\sim} au} \\ \text{ou } f(x_0+u)-f(x_0) = \underset{u\to 0}{o}(u) \end{cases}$

2) Propriétés.

Démonstration de la dérivabilité de la composée:

RAPPEL : Si f est dérivable en x et g dérivable en $f(x)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x et

$$\boxed{(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)}$$

D1

3) Limites, continuité des fonctions monotones, continuité et dérivabilité des fonctions réciproques.

a) Théorème de la limite monotone.

TH 1 : soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ monotone sur un ensemble I, $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ dont tout voisinage strict $\begin{cases}\text{à gauche}\\ \text{à droite}\end{cases}$ rencontre I ; alors f possède une limite (finie ou infinie) stricte $\begin{cases}\text{à gauche}\\ \text{à droite}\end{cases}$ en x_0 et

si f est croissante, $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = \sup\limits_{\substack{x\in I\\ x<x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = \inf\limits_{\substack{x\in I\\ x>x_0}} f(x)$
si f est décroissante, $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = \inf\limits_{\substack{x\in I\\ x<x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = \sup\limits_{\substack{x\in I\\ x>x_0}} f(x)$

D2

Exemple : si f est monotone sur $]0,+\infty[$, on sait grâce à ce théorème que f admet une limite stricte à droite en 0, une limite stricte à droite et à gauche en tout point >0 et une limite en $+\infty$.

b) Théorème de continuité d'une fonction monotone.

TH 2 : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie et **monotone** sur un ensemble I tel que $f(I)$ soit un **intervalle,** est continue sur I.

REM : Bien voir que ce théorème devient faux si l'on ôte l'une des 2 hypothèses en gras.

D3

Démonstration :

Hypothèses $\begin{cases} \boxed{f \text{ est croissante sur } I \text{ (preuve similaire pour } f \text{ décroissante)}} \\ \boxed{J = f(I) \text{ est un intervalle}} \end{cases}$

Soit $x_0 \in I$ dont tout voisinage strict à gauche rencontre I ; d'après le théorème de la limite monotone

$$l = \sup_{\substack{x \in I \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \overset{\leq}{\to} x_0} f(x)$$

Remarquons que $l \in J$ puisqu'il est supérieur à au moins un élément de J et inférieur à $f(x_0) \in J$ car f est croissante.

Si l était strictement inférieur à $f(x_0)$, aucun élément de $]l, f(x_0)[$ n'aurait d'antécédent par f, ce qui contredirait le fait que J est un intervalle.

Donc $f(x_0) = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} x_0} f(x)$ et $f_{|I}$ est continue à gauche en x_0 ; on procède de même à droite : f est donc continue sur I.

c) Application aux fonctions réciproques.

TH 3 Continuité d'une fonction réciproque.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **continue** et injective sur un **intervalle** I et soit f^{-1} sa fonction réciproque sur I, définie sur $J = f(I)$; alors

1. f et f^{-1} sont strictement monotones de mêmes sens
2. f^{-1} est continue sur J

D4

d) Dérivabilité d'une fonction réciproque :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **dérivable** et injective sur un **intervalle** I et soit f^{-1} sa fonction réciproque sur I, définie sur $J = f(I)$; alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en tout point } y \text{ de } J \text{ tel que } f'\left(f^{-1}(y)\right) \neq 0 \text{ et } \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Si $f'\left(f^{-1}(y)\right) = 0$, la tangente à la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse y.

D5

4) Dérivées successives.

a) Définitions.

DEF : on dit que f est *(de classe)* $\mathcal{D}^0$ en x si f est définie en x , et, par convention, $f^{(0)} = \mathcal{D}^0(f) = f$;
pour $n \geqslant 1$, on dit que

f est *(de classe)* $\mathcal{D}^n$ en x (ou que f est *n fois dérivable* en x) si $\begin{cases} 1.\ f \text{ est de classe } \mathcal{D}^{n-1} \text{ en tout point d'un voisinage de } x \\ 2.\ f^{(n-1)} \text{ est dérivable en } x \end{cases}$

la dérivée n-ième est alors par définition la dérivée de la dérivée $n-1$-ième :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \text{ (ou } D^n(f) = D\left(D^{n-1}(f)\right))$$

Notation de Leibniz : si $y = f(x)$, $\boxed{f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}}$.

On dit que f est *(de classe)* $\mathcal{C}^\infty$ en x (ou qu'elle est *infiniment dérivable* en x) si elle est de classe $\mathcal{D}^n$ pour tout n.

On dit que f est *(de classe)* $\mathcal{C}^n$ en x si elle est de classe $\mathcal{D}^n$ sur un voisinage de x et si $f^{(n)}$ est continue en x.

Par conséquent :

f est ... en x	signifie que
$\mathcal{D}^0$	f est définie en x
$\mathcal{C}^0$	f est continue en x
$\mathcal{D}^1$	f est dérivable en x
$\mathcal{C}^1$ (ou f est continûment dérivable en x)	f est dérivable au voisinage de x et f' est continue en x
$\mathcal{D}^2$	f est dérivable au voisinage de x et f' est dérivable en x
$\mathcal{C}^2$	f est de classe $\mathcal{D}^2$ au voisinage de x et f'' est continue en x

Exemple : la fonction $f : \begin{cases} x \neq 0 \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x} \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

PROP :

1. $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow ... \Rightarrow \mathcal{C}^n \Rightarrow \mathcal{D}^n \Rightarrow ... \Rightarrow \mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{D}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0 \Rightarrow \mathcal{D}^0$
2. Toutes les réciproques aux implications ci-dessus sont fausses
3. $\left(f^{(n)}\right)^{(m)} = f^{(n+m)} = \left(f^{(m)}\right)^{(n)}$ (autrement dit : $D^n \circ D^m = D^{n+m}$)

D6

E1 :

$D^n\left(x \mapsto x^\alpha\right) = \left(x \mapsto \alpha^{\underline{n}}\, x^{\alpha-n}\right)$ avec $\alpha^{\underline{n}} = \alpha\left(\alpha-1\right)..\left(\alpha-n+1\right)$
$D^k\left(x \mapsto x^n\right) = \left(x \mapsto n^{\underline{k}}\, x^{n-k}\right)$ avec $n^{\underline{k}} = n\left(n-1\right)..\left(n-k+1\right) = k!\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$
$\exp^{(n)} = \exp$
$\cos^{(n)}(x) =$
$\sin^{(n)}(x) =$

b) Opérations sur les dérivées successives.

P1 : si f et g sont $\mathcal{C}^n$ $(n \in \overline{\mathbb{N}})$ en x alors $f+g$ aussi et pour n fini, $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

P2 : si f et g sont $\mathcal{C}^n$ en x alors fg aussi et on a la formule, dite de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + ... + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}g^{(k)} + ... + nf'g^{(n-1)} + fg^{(n)} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}g^{(k)}}$$

En particulier : $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
D7
E2

P3 : si f est $\mathcal{C}^n$ en x avec $f(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est $\mathcal{C}^n$ en x.
D8

On en déduit que si $g(x) \neq 0$ et f et g sont $\mathcal{C}^n$ en x alors $\dfrac{f}{g}$ aussi.
P4 : si f est $\mathcal{C}^n$ en x et g est $\mathcal{C}^n$ en $f(x)$ alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^n$ en x.
D9

P5 : fonction réciproque d'une fonction de classe C^n :

On suppose que f est injective, de classe C^n sur un intervalle I et que f' n'est jamais nulle sur I ; alors

$$f^{-1} \text{ est de classe } C^n \text{ sur } J = f(I).$$

D10

c) Anneau et espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

NOTATION : pour I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $n \in \overline{\mathbb{N}}$ on pose

$$\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^I \ / \ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ en tout point de } I\}$$

REM : on définit ainsi une infinité d'ensembles strictement emboîtés les uns dans les autres :

$$\mathcal{P}_n(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset ... \subset \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \subset ... \subset \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) = \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^I$$

PROP : munis de l'addition et de la multiplication interne des fonctions, ces ensembles (sauf $\mathcal{P}_n(I,\mathbb{R})$) sont des *sous-anneaux* de $\mathbb{R}^I$, et munis de l'addition et de la multiplication externe, c'en sont des *sous-espaces vectoriels.*
Excepté $\mathcal{P}(I,\mathbb{R})$, ces anneaux sont non intègres.
D11

REM : si I est un intervalle fermé ou semi-ouvert, on définit aussi $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, avec des dérivées à droite à la borne de gauche, et des dérivées à gauche à la borne de droite.

5) THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS.

a) Extremums d'une fonction dérivable.

DEF : soit x_0 un élément de D_f ;

on dit que f présente (ou possède) un $\left\{\begin{array}{l}\textit{maximum absolu}\\ \textit{minimum absolu}\end{array}\right.$ en x_0 si

$$\forall x\in D_f\quad \left\{\begin{array}{l} f(x)\leqslant f(x_0)\\ f(x)\geqslant f(x_0)\end{array}\right.$$

on dit que f présente (ou possède) un $\left\{\begin{array}{l}\textit{maximum (local)}\\ \textit{minimum (local)}\end{array}\right.$ en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que la restriction de f à V possède un $\left\{\begin{array}{l}\text{maximum absolu}\\ \text{minimum absolu}\end{array}\right.$ en x_0 ; autrement dit,

$$\exists\alpha>0\ \forall x\in D_f\cap\,]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\quad \left\{\begin{array}{l} f(x)\leqslant f(x_0)\\ f(x)\geqslant f(x_0)\end{array}\right.$$

Un *extremum* est un maximum ou un minimum.
E3

TH : si f est dérivable en x_0, l'existence d'un extremum local en x_0 entraîne la nullité de la dérivée de f en x_0, mais la réciproque est fausse.

D12
ATTENTION : ce résultat est faux si l'on suppose seulement que f est dérivable à droite, ou à gauche, en x_0.
E 4

b) Théorème de Rolle (Michel Rolle, 1652 - 1719).

α) Énoncé du théorème.

TH de Rolle (corollaire du théorème de Weierstrass et du théorème précédent) :

$$\text{si }\boxed{(\text{H}) : \left\{\begin{array}{l} a\neq b\\ f \text{ est continue sur } [a,b]\\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a)=f(b)\end{array}\right.}\ \text{ alors }\ \boxed{(\text{C}) : \exists c\in]a,b[\ /\ f'(c)=0}$$

D13

REMARQUE 1 : Ce théorème s'énonce de façon géométrique sous la forme légèrement affaiblie suivante :

Si une courbe de fonction dérivable sur un intervalle possède une sécante horizontale, alors elle possède aussi une tangente horizontale.

REMARQUE 2 : les hypothèse de ce théorème sont à bien connaître ; si l'on supprime l'une d'entre-elles, le "théorème" devient faux.
D14

REMARQUE 3 : on verra en exercice que ce théorème est faux pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

β) Applications.

A1 : si f est dérivable sur un *intervalle* I et y possède deux racines distinctes (i.e. deux solutions de l'équation $f(x) = 0$) alors f' possède au moins une racine sur I.
D15

A2 : si f est n fois dérivable sur un *intervalle* I et y possède $n+1$ racines distinctes alors $f^{(n)}$ possède au moins une racine sur I.
D16

A3 : montrer que le polynôme $L_n = D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$ (n-ième polynôme de Legendre) est scindé sur $\mathbb{R}$.
D17
c) Théorème des accroissements finis.

α) Énoncé du théorème.
TH des accroissements finis (corollaire du théorème de Rolle), abrégé en TAF :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} a \neq b \\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \exists c \in]a,b[\ / \begin{array}{|c|} \hline f'(c) = t_f(a,b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \hline \text{soit } f(b) = f(a) + (b-a) f'(c) \\ \hline \end{array}}$$

D18

REMARQUE 1 : ce théorème n'est autre qu'une version "oblique" du théorème de Rolle ; il s'énonce en effet de façon géométrique sous la forme légèrement affaiblie suivante :

Toute sécante d'une courbe de fonction dérivable sur un intervalle est parallèle à l'une des tangentes.

REMARQUE 2 : La formule

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

s'appelle "formule des accroissements finis", par opposition à la définition de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{dy}{dx}$$

faisant intervenir des accroissements "infinitésimaux".

REMARQUE 3 : on peut énoncer le TAF sous la forme équivalente suivante :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} u \neq 0 \\ f \text{ est continue sur } [x_0, x_0+u] \\ f \text{ est dérivable sur }]x_0, x_0+u[\end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \exists \theta \in]0,1[\ / \ f(x_0+u) = f(x_0) + u f'(x_0 + \theta u)}$$

D19
Il faut alors bien prendre garde que le nombre θ ainsi défini dépend de u (et de x_0 !)

REMARQUE 4 : sous une forme affaiblie, on peut aussi énoncer :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : f \text{ est dérivable sur un intervalle } I} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \forall x, y \in I \ \ \exists z \in [x,y] \ / \ f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)}$$

Il faut ici aussi bien prendre conscience que z dépend de x et y.

E5

β) Inégalités des accroissements finis.

TH : si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors

$\boxed{\text{si } a \leqslant b \quad (b-a)\min\limits_{[a,b]} f' \leqslant f(b)-f(a) \leqslant (b-a)\max\limits_{[a,b]} f'}$ (inégalité des accroissements finis, version "encadrement")

$\boxed{|f(b)-f(a)| \leqslant |b-a| \max\limits_{[a,b]} |f'|}$ (inégalité des accroissements finis, version "valeurs absolues")

D20

Remarque : ce théorème est exactement équivalent au suivant :
TH : si f est continue sur $[a,b]$, alors

$$\boxed{\text{si } a \leqslant b \quad (b-a)\min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} f}$$

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant |b-a| \max_{[a,b]} |f|}$$

Dont les inégalités prennent alors le nom "d'inégalités de la moyenne".
D21

d) Applications du théorème des accroissements finis.

Le théorème des accroissements finis permet déduire de certaines propriétés de la dérivée f', des propriétés de la fonction f.

Dans ce paragraphe, la notation $\overset{\circ}{I}$ pour un intervalle I désigne l'intervalle privé de ses bornes ($\overset{\circ}{I} =]\inf I, \sup I[$)

α) Relations entre le signe de la dérivée et le sens de variation.

$\alpha 1$) Monotonie large.

TH :

si $\boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I} \end{cases}}$ alors $\boxed{(\mathrm{C}) : f \text{ est } \begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases} \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I} \;\; f'(x) \begin{cases} \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \end{cases}}$

D 22

En simplifiant, on peut dire qu'une fonction dérivable est monotone sur un intervalle si et seulement si sa dérivée y est de signe constant.

CORO :

si $\boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I} \end{cases}}$ alors $\boxed{(\mathrm{C}) : f \text{ est constante sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I} \;\; f'(x) = 0}$

ATTENTION : pour ces théorèmes, le fait que I soit un intervalle est primordial ; par exemple la fonction signe est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ et pourtant, elle n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$, et la fonction "inverse" est de dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ et pourtant, elle n'y est pas monotone.

CORO du CORO : deux fonctions ayant des dérivées égales sur un intervalle diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

$\alpha 2$) Monotonie stricte.

Première remarque : une fonction strictement croissante et dérivable, peut avoir une dérivée qui s'annule.
E5

PROP : une fonction est strictement $\left\{\begin{array}{c}\text{croissante}\\ \text{décroissante}\end{array}\right.$ sur un intervalle I si et seulement si

1. Elle y est $\left\{\begin{array}{c}\text{croissante}\\ \text{décroissante}\end{array}\right.$.
2. Elle n'est constante sur aucun intervalle $[a,b], a<b$ inclus dans I

D23

COROLLAIRE : Si f est continue sur un intervalle I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, elle est strictement $\left\{\begin{array}{c}\text{croissante}\\ \text{décroissante}\end{array}\right.$ sur I si et seulement si

1. $\forall x\in \overset{\circ}{I}\quad f'(x)\left\{\begin{array}{l}\geqslant 0\\ \leqslant 0\end{array}\right.$
2. L'ensemble des points de $\overset{\circ}{I}$ où f' s'annule ne contient aucun intervalle $[a,b], a<b$.

D24

REMARQUE 1 : la condition 2. peut aussi s'énoncer sous la forme :

2 bis. Entre deux éléments (distincts) de $\overset{\circ}{I}$, il existe toujours au moins un élément x tel que $f'(x)\left\{\begin{array}{l}>0\\ <0\end{array}\right.$.

REMARQUE 2 : une partie de $\mathbb{R}$ ne contenant pas d'intervalle $[a,b], a<b$, est dite "d'intérieur vide" ; la condition 2. peut donc aussi s'énoncer :

$$\boxed{2.\ \left\{x\in \overset{\circ}{I}\ /\ f'(x)=0\right\} \text{ est d'intérieur vide}}$$

REMARQUE 3 : en pratique l'ensemble des points où f' s'annule est presque toujours fini, donc vérifie la condition 2.

On peut cependant trouver des fonctions strictement monotones telles que cet ensemble est infini, voire même égal à $\mathbb{Q}$!
E6

β) Caractérisation des fonctions lipschitziennes parmi les fonctions dérivables.

PROP : Si f est continue sur un intervalle I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $K>0$, f est K-*lipschitzienne* sur I si et seulement si

$$\boxed{\forall x\in \overset{\circ}{I}\quad |f'(x)|\leqslant K}$$

Un fonction dérivable sur un intervalle y est donc lipschitzienne si et seulement si sa dérivée y est bornée.

D25

E7

γ) Théorème de dérivation du prolongement.

Introduction : on a vu plus haut qu'il était possible que $f'(x_0)$ existe et que $\lim\limits_{x\overset{\neq}{\to}x_0} f'(x)$ n'existe pas.

On va voir ici que l'inverse est impossible.

PROP (application du TAF) :

si $\boxed{(\text{H}) : \left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue à droite en } x_0\\ f \text{ est dérivable sur }]x_0, x_0+\alpha[\text{ avec } \alpha>0\\ \lim\limits_{x\overset{\geq}{\to}x_0} f'(x) = l\in\mathbb{R}\end{array}\right.}$ alors $\boxed{(\text{C}) : f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \text{ et } f'_d(x_0)=l}$

D26

Ayant une proposition similaire avec une dérivée à gauche, on en déduit le théorème de dérivabilité du prolongement :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue en } x_0 \\ f \text{ est dérivable sur }]x_0-\alpha, x_0[\cup]x_0, x_0+\alpha[\text{ avec } \alpha > 0 \\ \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ en } x_0 \text{ et } f'(x_0) = l}$$

(le nom du théorème vient de ce qu'on l'applique en général à une fonction f qui a été obtenue par prolongement par continuité en x_0)

On peut en déduire :

TH dit "des dérivations successives du prolongement" :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{sur } I \setminus \{x_0\}, \text{ avec } p \in \overline{\mathbb{N}^*} \\ \forall k \in [|1,p|] \ \lim\limits_{x \overset{x \in I}{\to} x_0} f^{(k)}(x) = l_k \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

$$\text{alors } \boxed{(\mathrm{C}) : f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{sur } I \text{ et } f^{(k)}(x_0) = l_k \text{ pour } k \in [|1,p|]}$$

D27

E8

VI) FORMULE DE TAYLOR YOUNG.

1) Polynôme de Taylor (Brook Taylor, 1685-1731) d'ordre n d'une fonction n fois dérivable en un point.

Dans le cours sur les polynômes, on a montré la formule de Taylor :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k}$$

pour P polynôme de degré $\leqslant n$.

On va en déduire le

TH : étant donnés $n+1$ éléments d'un corps K : $y_0, y_1, ..., y_n$, et un élément x_0 de K, il existe un unique polynôme de degré $\leqslant n$: $P \in K_n[X]$ tel que $P(x_0) = y_0, P'(x_0) = y_1, ...P^{(n)}(x_0) = y_n$. Ce polynôme s'écrit :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{k!} (X - x_0)^k = y_0 + y_1 (X - x_0) + \frac{y_2}{2} (X - x_0)^2 + ... + \frac{y_n}{n!} (X - x_0)^n}$$

D28

On peut donc poser la

DEF : étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fois dérivable en x_0, le *polynôme de Taylor* d'ordre n de f en x_0 est l'unique polynôme $T_{(n,f,x_0)}$ à coefficients réels de degré $\leqslant n$ ayant la même valeur et les mêmes n premières dérivées en x_0 que f en x_0.

$T_{(n,f,x_0)}$ est donc défini par :

$T_{(n,f,x_0)} \in \mathbb{R}_n[X]$
$\forall k \in [\|0,n\|] \ T^{(k)}_{(n,f,x_0)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

Il est donné par l'expression :

$$T_{(n,f,x_0)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

La fonction polynomiale associée au polynôme de Taylor d'ordre n est appelée la fonction de Taylor d'ordre n de f en x_0.

REM : le polynôme de Taylor d'*ordre* n n'est pas forcément de *degré* n !

PROP, montrant qu'on peut toujours se ramener au cas $x_0 = 0$:
si f est une fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fois dérivable en x_0, soit g définie par $g(u) = f(x_0 + u)$, alors les polynômes de Taylor de f et g sont reliés par la relation :

$$\boxed{T_{(n,f,x_0)}(X) = T_{(n,g,0)}(X - x_0)}$$

D29

DEF : on dit qu'un polynôme est tronqué à l'ordre p si on remplace tous ses coefficients de degré $> p$ par des 0.

PROP : le polynôme de Taylor d'ordre p en 0 d'une fonction polynomiale f de degré n est le polynôme tronqué à l'ordre p du polynôme P associé à f ; par conséquent $T_{(p,f,0)} = P$ dès que $p \geqslant n$.

D30
Polynômes de Taylor à savoir par coeur :

$T_{(n,\exp,0)}(x) =$
$T_{(2p+1,\sin,0)}(x) = T_{(2p+2,\sin,0)}(x) =$
$T_{(2p,\cos,0)}(x) = T_{(2p+1,\cos,0)}(x) =$
$T_{(3,\tan,0)}(x) =$
$T_{(2p+1,\mathrm{sh},0)}(x) = T_{(2p+2,\mathrm{sh},0)}(x) =$
$T_{(2p,\mathrm{ch},0)}(x) = T_{(2p+1,\mathrm{ch},0)}(x) =$
$f(x) = (1+x)^\alpha$; $T_{(n,f,0)}(x) =$
cas $\alpha = n$: on retrouve la formule du binôme :
cas $\alpha = -1$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $T_{(n,f,0)}(x) =$
cas $\alpha = -p, p \in \mathbb{N}$, $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^p}$; $T_{(n,f,0)}(x) =$
cas $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$; $T_{(n,f,0)}(x) =$
cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$; $T_{(3,f,0)}(x) =$

D31
Pour les exemples suivants, nous utiliserons le lemme ci-après, qui montre que pour obtenir le polynôme de Taylor d'une fonction, il suffit d'intégrer le polynôme de Taylor de sa dérivée, sans oublier de mettre la bonne constante d'intégration.

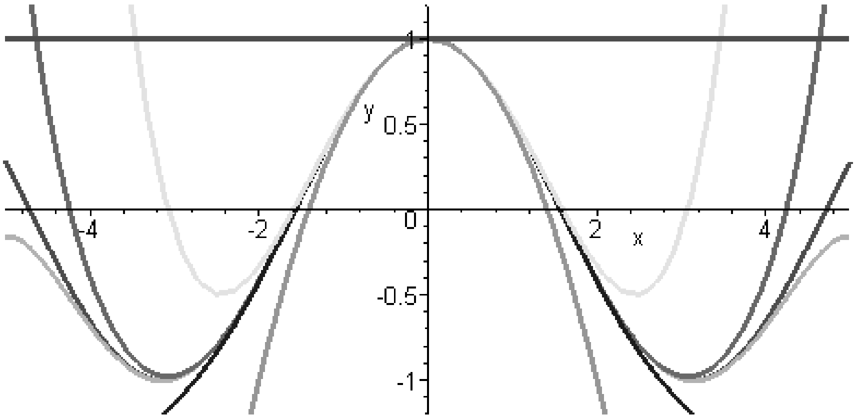
LEMME :

$$\boxed{T'_{(n,f,x_0)} = T_{(n-1,f',x_0)}}$$

D32

$f(x) = \ln(1+x)$; $T_{(n,f,0)}(x) =$
$T_{(7,\arcsin,0)}(x) = T_{(8,\arcsin,0)}(x) =$
$T_{(2p+1,\arctan,0)}(x) = T_{(2p+2,\arctan,0)}(x) =$

D33
Voici par exemple le tracé des fonctions de Taylor de la fonction cos en 0 :
X = Table[Series[Cos[x], {x, 0, 2 k + 1}] // Normal, {k, 0, 5}]   Plot[X, {x, -5, 5}]



2) Formule de Taylor-Young.

DEF : le *reste de Taylor* à l'ordre n de f est la différence entre f et sa fonction de Taylor :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = T_{(n,f,x_0)}(x) + R_{(n,f,x_0)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{(n,f,x_0)}(x)$$

Il existe diverses *formules de Taylor* (Taylor-Young, Taylor-Lagrange, Taylor avec reste intégral), qui sont en fait diverses manières d'évaluer ce reste de Taylor ; les *inégalités de Taylor* sont, quant à elles, diverses manières d'encadrer ce reste, ou de majorer sa valeur absolue.

TH de TAYLOR-YOUNG (W.H. Young, 1862-1946) :
Si f est n fois dérivable en x_0 ($n \geqslant 1$) alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{(n,f,x_0)}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

ce qui peut s'écrire sous les diverses formes :

$$R_{(n,f,x_0)}(x) \underset{x \to x_0}{\ll} (x-x_0)^n \quad , f(x) = T_{(n,f,x_0)}(x) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)}$$

D34

La démonstration sera faite en deux étapes :
1) Prouver que cela revient à démontrer que si g est n fois dérivable en 0 ($n \geqslant 1$) avec $g^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(u)}{u^n} = 0$$

2) Démontrer ceci par récurrence sur n.

REM : pour $n = 1$, la formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

est en fait la formule de définition de la dérivabilité.

CORO : si f est C^∞ en x_0, alors pour tout naturel n :

$$\boxed{f(x_0+u) = f(x_0) + f'(x_0)\,u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}u^n + o(u^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}u^k + \boxed{o(u^n)}}$$

et donc :

$$\boxed{f(x_0+u) = f(x_0) + f'(x_0)\,u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}u^n + O\left(u^{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}u^k + \boxed{O\left(u^{n+1}\right)}}$$

D35

Exemples à connaître par coeur : $(u \to 0)$

$\dfrac{1}{1-u} = 1+u+u^2+....+u^n+o(u^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} u^k + o(u^n)$; $\dfrac{1}{1+u} =$
$\ln(1-u) = \vdots$ $\qquad$ $\ln(1+u) =$
$\dfrac{1}{(1-u)^2} =$ $\qquad$ $\dfrac{1}{(1+u)^2} =$
$(1+u)^{\alpha} = 1+\alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n) = \sum\limits_{k=0}^{n}$
$\dfrac{1}{(1-u)^{\alpha}} = 1+\alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}u^2 + ...+$
$\dfrac{1}{(1-u)^{p+1}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} p+k \\ p \end{pmatrix} u^k + o(u^n)$ (colonne p du triangle de Pascal)
$\dfrac{1}{\sqrt{1-u}} = 1+\dfrac{1}{2}u \quad u^2 \quad u^3+....+\dfrac{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{4^n}u^n + o(u^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}}{4^k}u^k + o(u^n)$;
$\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = 1-\dfrac{1}{2}u \quad u^2 \quad u^3....+(-1)^{\cdots}\dfrac{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{4^n}u^n + o(u^n) =$
$\sqrt{1-u} = 1-\dfrac{1}{2}u - \quad u^2 - \quad u^3 - .... - \dfrac{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{4^n}\dfrac{u^n}{2n-1} + o(u^n)$; $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{1}{2}u \quad u^2 \quad u^3 - ....$
$e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{}+\dfrac{u^4}{}+\dfrac{u^5}{}+....+\dfrac{u^n}{n!}+o(u^n) = \sum\limits_{k=0}^{n}$
$\text{ch } u = \textit{partie paire}\,(e^u) = 1+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^4}{}+...+\dfrac{u^{2p}}{}+o\left(u^{2p}\right)$ (ou $o\left(u^{2p+1}\right)$) $= \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\text{sh } u = \textit{partie impaire}\,(e^u) = u+\dfrac{u^3}{}+\dfrac{u^5}{}...+\dfrac{u^{2p+1}}{}+o\left(u^{2p+1}\right)$ (ou $o\left(u^{2p+2}\right)$) $= \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\cos u = 1-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^4}{}-...+(-1)^{\cdots}\dfrac{u^{2p}}{}+o\left(u^{2p}\right)$ (ou $o\left(u^{2p+1}\right)$) $= \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\sin u = u-\dfrac{u^3}{}+\dfrac{u^5}{}...+(-1)^{\cdots}\dfrac{u^{2p+1}}{}+o\left(u^{2p+1}\right)$ (ou $o\left(u^{2p+2}\right)$) $= \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\tan u = u+\dfrac{u^3}{3}+\dfrac{2}{15}u^5+\dfrac{17}{315}u^7+o\left(u^8\right)$
$\text{th } u = u-\dfrac{u^3}{3}+\dfrac{2}{15}u^5-\dfrac{17}{315}u^7+o\left(u^8\right)$
$\dfrac{1}{1+u^2} = 1-u^2+u^4+...+(-1)^{\cdots}u^{2p}+o\left(u^{2p+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\arctan u = \vdots$
$\dfrac{1}{1-u^2} = 1+u^2+u^4+...+u^{2p}+o\left(u^{2p+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\text{argth } u = \left(\dfrac{1}{2}(\ln(1+u)-\ln(1-u)) = \right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1+\dfrac{u^2}{..}+\dfrac{..}{..}u^4+o\left(u^5\right)$
$\arcsin u = \vdots$
$\arccos u = \vdots$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} = 1-\dfrac{u^2}{..}+\dfrac{..}{..}u^4+o\left(u^5\right)$
$\text{argsh } u = \vdots$

D9

VII) DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1) Définition, unicité, du développement limité polynomial.

LEMME : si un polynôme à coefficients réels P de degré $\leqslant n$ vérifie $P(u) = \underset{u \overset{\neq}{\to} 0}{o}(u^n)$ alors $P = 0$.

D36

DEF : on dit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage pointé de x_0 (i.e. sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus\{x_0\}$) possède un développement limité (polynomial) à l'ordre n en x_0 s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que

$$\boxed{\lim_{u \overset{\neq}{\to} 0} \frac{f(x_0+u) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k}{u^n} = 0}$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$\boxed{f(x_0+u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k + o(u^n)}$$

ou bien :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \underset{x \to x_0}{o}((x-x_0)^n)}$$

PROP (unicité du développement limité) : les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$, s'ils existent, sont uniques. De plus, si f possède un développement limité à l'ordre m en x_0 avec $m \geqslant n$, les $n+1$ premiers coefficients de ce développement sont $a_0, a_1, ..., a_n$.

D37

Vocabulaire : ces coefficients s'appellent les "coefficients" du développement limité, l'expression $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k$, sa *partie régulière* et la fonction polynomiale f_n telle que $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ est la *fonction polynomiale approchée à l'ordre* n de f en x_0.

Si r est le rang du premier a_k non nul (s'il y en a un) , $a_r u^r$ est appelé la *partie principale* du développement limité ; c'est un équivalent de $f(x_0+u)$ quant u tend vers 0.

REM 1 : si une fonction possède un développement à l'ordre n en x_0, elle en possède à tout ordre $\leqslant n$, obtenus en tronquant le premier.

REM 2 : posséder un développement limité à l'ordre 0 en x_0 (i.e.$\exists a_0$ / $f(x_0+u) = a_0 + o(1)$) signifie "avoir une limite stricte (égale à a_0) en x_0" ; dans ce cas, on posera toujours $f(x_0) = a_0$ de sorte que, dorénavant, la fonction f sera considérée comme continue en x_0.

E9

REM 3 : posséder un développement limité à l'ordre 1 en x_0 (i.e. .$\exists a_0, a_1$ / $f(x_0+u) = a_0 + a_1 u + o(u)$) signifie "être dérivable en x_0".

Le théorème de Taylor-Young vu dans le chapitre précédent permet d'obtenir un développement limité polynomial :

PROP : si f est n fois dérivable en x_0 alors elle possède un développement limité polynomial à l'ordre n en x_0 :

$$f(x_0+u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k + o(u^n) \text{ avec } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Exemple : si on sait à l'avance que f est 5 fois dérivable en 3 et que $f(3+u) = 5u - 2u^2 - \frac{1}{5}u^5 + o(u^5)$, alors

$$f(3) = ..., f'(3) = ..., f''(3) = ..., f'''(3) = ..., f^{(4)}(3) = ..., f^{(5)}(3) = ...$$

ATTENTION : la réciproque est fausse dès que $n \geqslant 2$: une fonction peut très bien avoir un développement limité à l'ordre 2 en un point et ne pas être 2 fois dérivable en ce point (tout simplement parce que sa dérivée peut n'exister qu'en ce point, et non au voisinage).

E10

PROP : la partie régulière d'un DL en 0 d'une fonction paire est une expression polynomiale paire, et la partie régulière d'un DL en 0 d'une fonction impaire est un une expression polynomiale impaire.
D38

2) Allure de la courbe au voisinage d'un point à l'aide du DL.

Si $f(x_0+u) = a + bu + cu^2 + du^3 + o(u^3)$, alors

1) on peut affirmer que $f(x_0) = a$ (ou prolonger f en posant $f(x_0) = a$) et que $f'(x_0) = b$ (mais par contre on ne peut pas affirmer directement que $f''(x_0) = 2c$ ni que $f'''(x_0) = 6d$)

2) si $c > 0$ la courbe est au-dessus de la tangente, et si $c < 0$ la courbe est en-dessous de la tangente au voisinage de $(x_0, f(x_0))$;

3) si $c = 0$ et $d \neq 0$, la courbe traverse la tangente en $(x_0, f(x_0))$: on dit qu'il y a un point d'inflexion.

4) si $c = d = 0$, il faut déterminer l'ordre du premier terme non nul >3 : si cet ordre est pair : comme cas 2), sinon comme cas 3).

5) si tous les coeffs à partir de c sont nuls, on dit que f est "infiniment plate" en x_0.

3) Opérations sur les développements limités polynomiaux.

La règle qu'il faut avoir en vue lorsqu'on fait des opérations sur les DL, est que

$$o(u^n) + o(u^m) = o\left(u^{\min(n,m)}\right)$$

En raccourci : dans une somme, c'est le petit o de plus bas degré "qui l'emporte".
a) Somme de deux développements limités.
E11 : ch $x\, e^{2x}$ à l'ordre 4 en 0, $\sin x \cos 2x$ à l'ordre 3 en 0, $\sin x$ à l'ordre 5 en $\pi/3$.

PROP : si

si $\boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f(x_0+u) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k + o(u^n) \\ g(x_0+u) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k u^k + o(u^m) \end{cases}}$ alors $\boxed{(\mathrm{C}) : (f+g)(x_0+u) = \sum\limits_{k=0}^{p} (a_k + b_k) u^k + o(u^p) \text{ avec } p = \min(n,m)}$

D39

MORALITÉ : RIEN NE SERT DE DÉVELOPPER A DES ORDRES DIFFÉRENTS, L'ORDRE DE LA SOMME SERA LE PLUS PETIT DES DEUX.

b) Produit de deux développements limités.

E12 : $\arctan x \ln(1+x^2)$ à l'ordre 7 en 0.

si $\boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f(x_0+u) = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k u^k + o(u^n) \quad \text{avec } a_p \neq 0 \\ g(x_0+u) = \sum\limits_{k=q}^{m} b_k u^k + o(u^m) \quad \text{avec } b_q \neq 0 \end{cases}}$

alors $\boxed{(\mathrm{C}) : (fg)(x_0+u) = \underbrace{a_p b_q u^{p+q} + \ldots + c_r u^r}_{\substack{\text{produit des deux parties régulières} \\ \text{tronqué à l'ordre } r}} + o(u^r) \text{ avec } r = \min(q+n, p+m)}$

D13

MORALITÉ : si on veut un développement du produit à l'ordre r il faut développer f à l'ordre $r-$ (valuation du DL de g) et g à l'ordre $r-$ (valuation du DL de f).

SI DONC LES DEUX DÉVELOPPEMENTS ONT UNE VALUATION NULLE, POUR AVOIR UN ORDRE r DANS LE PRODUIT, IL FAUT DÉVELOPPER CHACUN A L'ORDRE r (le produit des deux polynômes, de degré $\leqslant 2r$, devra donc être tronqué à l'ordre r).

E13

c) Composée de deux développements limités.

E14 : $\ln\cos x$, à l'ordre 6 en 0.

PROP (dans le cas où le deuxième développement commence par un terme en u) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \left\{\begin{array}{c} f(x_0+u) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k u^k}_{=P(u)} + o\left(u^n\right) \\ \left\{\begin{array}{l} g(u) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} b_k u^k}_{=Q(u)} + o\left(u^m\right) \quad \text{avec } b_1 \neq 0 \\ \text{(bien noter que le DL de } g \text{ est en 0 et que } b_0 = 0) \end{array}\right. \end{array}\right.}$$

$$\text{alors } \boxed{(\mathrm{C}) : f(x_0+g(u)) = \underbrace{a_0 + a_1 b_1 u + \ldots + c_r u^r}_{P(Q(u)) \text{ tronqué à l'ordre } r} + o\left(u^r\right) \text{ avec } r = \min(n,m)}$$

MORALITÉ : dans le cas où le DL de g est de valuation 1, RIEN NE SERT DE DÉVELOPPER A DES ORDRES DIFFÉRENTS, l'ordre du développement de $f(x_0+g(u))$ SERA LE PLUS PETIT DES DEUX.

D40

PROP : cas général (en exercice)

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \left\{\begin{array}{c} f(x_0+u) = \underbrace{a_0 + \sum_{k=p}^{n} a_k u^k}_{=P(u)} + o\left(u^n\right) \quad \text{avec } a_p \neq 0, p \geqslant 1 \\ g(u) = \underbrace{\sum_{k=q}^{m} b_k u^k}_{=Q(u)} + o\left(u^m\right) \quad \text{avec } b_q \neq 0 \end{array}\right.}$$

$$\text{alors } \boxed{(\mathrm{C}) : f(x_0+g(u)) = \underbrace{a_0 + a_p \left(b_q\right)^p u^{pq} + \ldots + c_r u^r}_{P(Q(u)) \text{ tronqué à l'ordre } r} + o\left(u^r\right) \text{ avec } r = \min(m+q\,(p-1)\,, qn)}$$

MORALITÉ : pour des calculs les plus économiques possibles, il faut prendre $m+q\,(p-1) = qn = r$, soit $m = q\,(n-p+1) = r - q\,(p-1)$. Si donc on veut un DL à l'ordre r, il faut prendre $n = \overline{E}\left(\frac{r}{q}\right)$ et $m = q\,(n-p+1)$; lorsque $q = p = 1$, on retrouve la règle simple : $\boxed{n = m = r}$.

E15

d) Inverse d'un développement limité.

E16

$$\boxed{\frac{1}{\cos x} = \text{...(ordre 6)}}$$

Méthode : si $f(x_0+u) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k + o\left(u^n\right)$ avec $a_0 \neq 0$, on écrit

$$\frac{1}{f}(x_0+u) = \frac{1}{a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k u^k + o\left(u^n\right)} = \frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{1+\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} u^k + o\left(u^n\right)}_{=U}}\right) = \frac{1}{a_0}\frac{1}{1+U}$$

Le développement de $1/f$ en x_0 s'obtient donc en composant celui de $\dfrac{1}{1+U}$ avec celui de U.
E17

e) Quotient de deux développements limités.

On écrit $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$ et on utilise b) et d).
E18 : $\tan x$ en 0 à l'ordre 7.

En conclusion, on peut dire que si f et g ont des développements limités polynomiaux à l'ordre n en x_0, alors $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) et $f \circ g$ (si $x_0 = 0$ et $g(0) = 0$), également, au même ordre.

3) Développements limités généralisés.

DEF : soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que si $i \neq j$, $f_i \underset{x_0}{\ll} f_j$ ou $f_j \underset{x_0}{\ll} f_i$; on dit qu'une fonction f définie au voisinage pointé de x_0 possède un développement limité (généralisé) suivant l'*échelle* $(f_i)_{i \in I}$ s'il existe des indices $i_1, ...i_n \in I$ tels que :

$$f(x) = a_1 f_{i_1}(x) + a_2 f_{i_2}(x) + ... + a_n f_{i_n}(x) + \underset{x \to x_0}{o}\left(f_{i_n}(x)\right), \text{ avec } f_{i_1} \underset{x_0}{\gg} f_{i_2} \underset{x_0}{\gg} ... \underset{x_0}{\gg} f_{i_n}$$

$a_1 f_{i_1}(x)$ est la *partie principale* du DL, $a_1 f_{i_1}(x) + a_2 f_{i_2}(x) + ... + a_n f_{i_n}(x)$, sa *partie régulière*, et $f_{i_n}(x)$ sa *précision*.

REM 1 : un développement limité polynomial correspond donc au cas $x_0 \in \mathbb{R}$ avec l'échelle $\left(x \mapsto (x-x_0)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$.
REM 2 : on a toujours la propriété d'unicité du DL, à savoir que si

$$f(x)\left\{\begin{array}{l} = a_1 f_{i_1}(x) + a_2 f_{i_2}(x) + ... + a_n f_{i_n}(x) + \underset{x \to x_0}{o}\left(f_{i_n}(x)\right) \\ = a'_1 f_{i_1}(x) + a'_2 f_{i_2}(x) + ... + a'_n f_{i_n}(x) + \underset{x \to x_0}{o}\left(f_{i_n}(x)\right) \end{array}\right., \text{ avec } f_{i_1} \underset{x_0}{\gg} f_{i_2} \underset{x_0}{\gg} ... \underset{x_0}{\gg} f_{i_n}$$

alors $a_1 = a'_1, ..., a_n = a'_n$.

Exemples classiques :
ex 1) $x_0 = +\infty$ avec l'échelle $\left(x \mapsto x^k\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ (on parle alors souvent de développement "asymptotique").

On obtient des DL de la forme :

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + ... + \frac{b_m}{x^m} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^m}\right)$$

et bien entendu, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n$ si $a_n \neq 0$.

par exemple, si f possède un DL polynomial en 0, $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ possède un DL de ce type quand $x \to +\infty$.

E19
$\arctan x$ en $+\infty$

ex 2) $x_0 = 0$ avec l'échelle $\left(x \mapsto x^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$

on obtient des DL de la forme :

$$f(x) = \frac{b_m}{x^m} + ... + \frac{b_1}{x} + a_0 + a_1 x ... + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

On retrouve ici les DLP comme cas particuliers.
Par exemple, si f possède un DL polynomial en 0, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^m}$ possède un DL de ce type quand $x \to 0$.
Dans ce cadre rentrent les trois développements à savoir retrouver rapidement :

$\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{7x^3}{360} + \dfrac{31x^5}{15120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$
$\cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} - \dfrac{2x^5}{945} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$
$\coth x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + \dfrac{2x^5}{945} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$

E20

ex 3) (généralisation du 1)) $x_0 = +\infty$ avec l'échelle $\left(x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta\right)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$

On obtient des DL du style :

$$f(x) = -x(\ln x)^2 + \frac{(\ln x)^3}{x^3} + 2x\ln x + x^2\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 3\frac{x^2}{\ln x} + x\sqrt{x} + \underset{x\to+\infty}{o}(............)$$

(remettre les fonctions dans l'ordre et indiquer le petit o) :

$$f(x) = ... - .... - .... - .... - .... - .... - .... + \underset{x\to+\infty}{o}(............)$$

Exemples classiques :

- la relation $h_n = \ln n + \gamma + o(1)$ vue dans le cours sur les suites est un développement de ce type.
- la formule de Stirling $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ équivaut au développement asymptotique :

$$\boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1)}$$

E 21 : $\sqrt{x+1}, \ln(x+1)$

ex 4) (généralisation du 2)) $x_0 = 0$ avec l'échelle $\left(x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta\right)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$

On obtient des DL du style :

$$f(x) = 3\frac{x\sqrt{x}}{\ln x} - \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{x^2\sqrt{x}}{\ln x} + \frac{(\ln x)^3}{x^3} - x(\ln x)^2 - x^2\sqrt{x} + \underset{x\overset{>}{\to}0}{o}(..............)$$

(remettre les fonctions dans l'ordre et indiquer le petit o):

$$f(x) = ... - .... - .... - .... - .... - .... - .... + \underset{x\overset{>}{\to}0}{o}(............)$$

Exemple à savoir retrouver E22 :

$$\boxed{\arccos(1-u) = \sqrt{2u} + \frac{1}{12}u\sqrt{2u} + \frac{3}{160}u^2\sqrt{2u} + o\left(u^2\sqrt{u}\right)}$$

la méthode la plus rapide étant d'utiliser la relation :

$$\boxed{\arccos(1-u) = 2\arcsin\sqrt{\frac{u}{2}}}$$

4) Application à l'étude des branches infines.

La direction asymptotique est donnée par la partie principale $pp(f)(x)$ du développement de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ (resp. $-\infty$)

si $pp(f)(x) \gg x$, la direction asymptotique est verticale
si $pp(f)(x) \ll x$, la direction asymptotique est horizontale
si $pp(f)(x) = ax$, la direction asymptotique est oblique de pente a.

Pour obtenir une courbe asymptote, déterminer un développement asymptotique de $f(x)$ quand $x \to +\infty$(resp. $-\infty$) à la précision 1 :

$$f(x) = \underbrace{pp(f)(x) + ... + b}_{=g(x)} + o(1)$$

La courbe asymptote est alors $y = g(x)$ et la direction asymptotique est donnée par la partie principale, comme décrit ci-dessus ; si $f(x) = ax + b + o(1)$ il y a une (droite) asymptote.

REM : si on veut obtenir la position par rapport à l'asymptote, il faudra chercher un terme supplémentaire $h(x)$ dans le développement ci-dessus :

$$f(x) = \underbrace{pp(f)(x) + ... + b}_{=g(x)} + h(x) + o(h(x))$$

On aura alors en effet $f(x) - g(x) \sim h(x)$, et la position sera déterminée grâce au

LEMME : si deux fonctions sont équivalentes en un point, elles ont le même signe au voisinage de ce point.

E23 : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}, f(x) = \sqrt{x^2+x+1}, g(x) = \sqrt{x^4+x^2+1}$

REM : on obtient souvent un développement de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Remplir alors ce tableau avec les différents cas possibles :

$a \neq 0$	....
$a = 0$ et $b \neq 0$	
$a = b = 0$	

REM : lorsque f est une fonction rationnelle, prendre comme fonction asymptote la partie entière, c'est-à dire le quotient euclidien du numérateur par le dénominateur (puisque la partie fractionnaire tend vers 0 en l'infini).

E24 : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-1}$.