

A) PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE \mathbb{R} ET APPLICATIONSI) CARACTÉRISATION DE \mathbb{R} .

TH admis : il existe un ensemble \mathbb{R} , contenant \mathbb{Q} , muni d'une relation d'ordre \leq , d'une addition $+$ et d'une multiplication \times , prolongeant celles de \mathbb{Q} et vérifiant :

1. $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné, à savoir que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif et que

Caractère total de \leq : $a \not\leq b \Leftrightarrow b < a$
Compatibilité avec $+$: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
Compatibilité avec \times : si $c \geq 0$, $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

2. (\mathbb{R}, \leq) vérifie la propriété de la borne supérieure, à savoir que toute partie non vide majorée possède une borne supérieure.

De plus, ceci caractérise \mathbb{R} à isomorphisme près en ce sens que si deux ensembles $(\mathbb{R}_1, +, \times, \leq)$ et $(\mathbb{R}_2, +, \times, \leq)$ vérifient les axiomes ci-dessus, il existe un isomorphisme du premier sur le deuxième.

La définition de $\overline{\mathbb{R}}$ a été faite dans le chapitre sur les relations d'ordre.

$$\text{RAPPELS : } A \subset \mathbb{R} \text{ est } \begin{cases} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} \exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in A \quad x \leq M \\ \exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in A \quad x \geq m \\ A \text{ est minorée et majorée} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} \sup A < +\infty \\ \inf A > -\infty \\ \exists M \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in A \quad |x| \leq M \end{cases}$$

II) PARTIE ENTIÈRE ET VALEUR ABSOLUE.

Ceci a déjà été traité dans le thème 1., à bien revoir.

III) INTERVALLES DE \mathbb{R} .

Notations : pour $a \leq b \in \overline{\mathbb{R}}$, on pose

$[a, b] = [b, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a \leq x \leq b\}$
$[a, b[=]b, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a \leq x < b\}$
$]a, b] = [b, a[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a < x \leq b\}$
$]a, b[=]b, a[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a < x < b\}$

DEF : une partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée un *intervalle* si tout réel strictement compris entre sa borne inférieure et sa borne supérieure appartient à I , autrement dit :

$$] \inf I, \sup I[\subset I$$

PROP : ceci équivaut à

$$\exists a, b \in \overline{\mathbb{R}} /]a, b[\subset I \subset [a, b]$$

; les ensembles définis ci-dessus sont donc des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ et il n'y a pas d'autres intervalles que ceux-ci.

D2 : lemme : si $A \subset B \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\inf A \geq \inf B$ et $\sup A \leq \sup B$.

REM : on peut classer les intervalles de \mathbb{R} en 4 types, se décomposant en 11 sous-types :

- Les intervalles *ouverts* $]a, b[$ avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, avec comme sous-types : \emptyset ; les intervalles ouverts bornés non vides $]a, b[$ avec $a < b$ réels; les $] -\infty, b[$ avec b réel, les $]a, +\infty[$ avec a réel et $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

- les intervalles *fermés* (bornés), appelés aussi *segments*, $[a, b]$ avec $-\infty < a \leq b < +\infty$ avec comme sous types les singletons $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$, et les segments infinis $[a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$.

- les intervalles *semi-ouverts à droite* $]a, b]$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, avec comme sous-types les intervalles semi-ouverts à droite bornés $]a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ et les $]a, +\infty]$ avec a réel.

- les intervalles *semi-ouverts à gauche* $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$, avec comme sous-types les intervalles semi-ouverts à gauche bornés $]a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ et les $] -\infty, b]$ avec b réel.

DEF : un convexe (ou partie convexe) C de $\overline{\mathbb{R}}$ est une partie telle que tout élément situé entre deux éléments de C est encore un élément de C , autrement dit :

$$\forall x, y \in C \quad [x, y] \subset C$$

PROP : il y a identité entre les convexes de $\overline{\mathbb{R}}$ et les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.

D3

REM : la notion de convexe s'étend au plan, à l'espace etc., et il n'y a alors plus identité entre les deux notions.

IV) PARTIES DENSES DANS \mathbb{R} .

DEF : une partie A de \mathbb{R} est dite *dense dans* \mathbb{R} si entre deux réels distincts il existe toujours au moins un élément de A , autrement dit :

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \quad [x, y] \cap A \neq \emptyset$$

REM : si A est dense dans \mathbb{R} , entre deux réels existe toujours une *infinité* d'éléments de A .

D4

PROP : \mathbb{Q} et ${}^c\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

D5

REM : on a démontré dans le cours sur les suites que plus généralement, toute partie de complémentaire dénombrable est dense dans \mathbb{R} .

V) NOTION DE VOISINAGE.

Rappels :

- si $a, b \in \mathbb{R}$ la *distance* de a à b est $|b - a|$;

- $|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha \Leftrightarrow x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ ssi x est distant de x_0 de moins de α .

L'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ est appelé l'intervalle ouvert centré en x_0 et de rayon α .

DEF : un intervalle du type $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ est appelé un *voisinage* de $x_0 \in \mathbb{R}$, et un intervalle du type $\begin{cases}]A, +\infty[\\]-\infty, -A[\end{cases}$

est appelé un *voisinage* de $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$.

Utilité de la notion de voisinage :

α) Unification des définitions des limites de suites.

PROP : Si (u_n) est une suite de réels et $l \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$l = \lim u_n \Leftrightarrow \forall V \text{ voisinage de } l \quad u_n \in V \text{ APCR}$$

En français : u_n peut être rendu aussi voisin qu'on veut de l , à condition de prendre n assez grand.

β) Notion de propriété vraie "au voisinage d'un point".

DEF : on dira qu'une propriété $P(x)$ est vraie "au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ " s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $P(x)$ soit vraie pour tout x dans V .

Exemples E2.

B) FONCTIONS DE \mathbb{R} DANS \mathbb{R} ; LIMITES ET CONTINUITÉ.

I) GÉNÉRALITÉS.

1) Courbe représentative.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; on confondra toujours f avec l'application de D_f dans \mathbb{R} qui à x de D_f fait correspondre $f(x)$.

DEF : si P est un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative de f dans ce repère est l'ensemble des points M de P de coordonnées $\left| \begin{array}{l} x \\ f(x) \end{array} \right.$ pour x décrivant D_f :

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

Réciproquement, une partie C de P est la courbe représentative d'une fonction f ssi

$$M_1 \left| \begin{array}{l} x \\ y_1 \end{array} \right. \text{ et } M_2 \left| \begin{array}{l} x \\ y_2 \end{array} \right. \in C \Rightarrow y_1 = y_2$$

autrement dit si toute droite verticale rencontre C en un point au plus.

La fonction f est alors définie par $x \mapsto y / M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in C$.

La fonction f est injective ssi

$$M_1 \left| \begin{array}{l} x_1 \\ y \end{array} \right. \text{ et } M_2 \left| \begin{array}{l} x_2 \\ y \end{array} \right. \in C_f \Rightarrow x_1 = x_2$$

autrement dit si toute droite *horizontale* rencontre C_f en un point au plus.

La fonction f est surjective ssi

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists M \in C_f / \text{ordonnée}(M) = y$$

autrement dit si toute droite *horizontale* rencontre C_f en un point au moins.

2) Opérations sur les fonctions.

DEF : soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; on définit leur $\left\{ \begin{array}{l} \text{somme} \\ \text{produit} \end{array} \right.$ comme la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition $D_f \cap D_g$ qui à x fait correspondre $\left\{ \begin{array}{l} f(x) + g(x) \\ f(x)g(x) \end{array} \right.$; donc

$$\forall x \in D_f \cap D_g \quad \boxed{\begin{array}{l} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{array}}$$

On définit le *produit* de f par un réel λ comme la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f qui à x fait correspondre $\lambda f(x)$; donc

$$\forall x \in D_f \quad \boxed{(\lambda f)(x) = \lambda f(x)}$$

On définit leur *quotient* comme la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition $D_f \cap (D_g \setminus g^{-1}(0))$ qui à x fait correspondre $\frac{f(x)}{g(x)}$; donc

$$\forall x \in D_f \cap (D_g \setminus g^{-1}(0)) \quad \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$$

Exemples E4.

PROP : si I est une partie de \mathbb{R} , l'ensemble $\mathbb{R}^I = \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ des applications de I dans \mathbb{R} muni de l'addition et de la multiplication est un anneau commutatif, non intègre dès que $|I| \geq 2$.

L'élément nul de cet anneau est $0_I : \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array} \right.$ et l'élément unité $1_I : \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array} \right.$.

D6

3) Sens de variation d'une fonction.

DEF : soit I une partie de l'ensemble de définition de f ; alors on dit que f est

<i>croissante</i> sur I ssi	$\forall x, x' \in I \ x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
<i>strictement croissante</i> sur I ssi	$\forall x, x' \in I \ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
<i>décroissante</i> sur I ssi	$\forall x, x' \in I \ x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$
<i>strictement décroissante</i> sur I ssi	$\forall x, x' \in I \ x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$
<i>monotone</i> sur I ssi	f y est croissante ou décroissante
<i>strictement monotone</i> sur I ssi	f y est strictement croissante ou strictement décroissante
<i>constante</i> sur I ssi	$\forall x, x' \in I \ f(x) = f(x')$

et on rappelle que f est *injective* sur I ssi $\forall x, x' \in I \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

REM : constante équivaut à croissante et décroissante.

DEF : soient x, x' deux élément distincts de D_f , on définit le *taux d'accroissement* (ou de *variation*) de f entre x et x' comme le réel

$$t_f(x, x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

REM 1 : $t_f(x, x') = t_f(x', x)$.

REM 2 : le taux d'accroissement de f entre x et x' est la pente (ou coefficient directeur) de la sécante (MM') à la courbe de f , avec $M \left| \begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right.$, $M' \left| \begin{matrix} x' \\ f(x') \end{matrix} \right.$.

PROP : interprétation des définitions ci-dessus en termes de taux d'accroissement ; f est :

<i>croissante</i> sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement	$\forall x \neq x' \in I \ t_f(x, x') \geq 0$
<i>strictement croissante</i> sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement	$\forall x \neq x' \in I \ t_f(x, x') > 0$
<i>décroissante</i> sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement	$\forall x \neq x' \in I \ t_f(x, x') \leq 0$
<i>strictement décroissante</i> sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement	$\forall x \neq x' \in I \ t_f(x, x') < 0$
<i>constante</i> sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement	$\forall x \neq x' \in I \ t_f(x, x') = 0$
<i>injective</i> sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement	$\forall x \neq x' \in I \ t_f(x, x') \neq 0$

D7
REM : il est évident à l'aide de cette caractérisation qu'une fonction strictement monotone est injective ; mais la réciproque est fautive : le taux d'accroissement peut très bien être constamment non nul sans conserver un signe constant.

4) Fonction bornée.

DEF et PROP :

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{cases} \text{ sur } I \text{ ssi } f(I) \text{ est } \begin{cases} \text{majoré} \\ \text{minoré} \\ \text{borné} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} \exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in I \ f(x) \leq M \\ \exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in I \ f(x) \geq m \\ f(I) \text{ est minoré et majoré} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} \sup_{x \in I} f(x) < +\infty \\ \inf_{x \in I} f(x) > -\infty \\ |f| \text{ est majorée sur } I \end{cases} .$$

5) Fonction lipschitzienne (Rudolf Lipschitz, 1832 - 1903).

DEF : pour $K > 0$, f est dite *K-lipschitzienne* sur I si

$$\forall x, x' \in I \ |f(x') - f(x)| \leq K |x' - x|$$

et elle est dite *lipschitzienne* s'il existe un $K > 0$ telle que f soit *K-lipschitzienne*.

Interprétation graphique.

PROP : une fonction lipschitzienne est une fonction à taux d'accroissement borné ; plus précisément, f est *K-lipschitzienne* sur I ssi

$$\forall x \neq x' \in I \ |t_f(x, x')| \leq K$$

D8

Exemples E5 :

$x \mapsto x^2$ est $2A$ -lipschitzienne sur $[-A, A]$ mais pas lipschitzienne sur $]-\infty + \infty[$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ -lipschitzienne sur $[\varepsilon, +\infty[$ mais pas lipschitzienne sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\frac{1}{\varepsilon^2}$ -lipschitzienne sur $[\varepsilon, +\infty[$ mais pas lipschitzienne sur $]0, +\infty[$

6) Parité.

DEF : f est dite $\begin{cases} \text{paire} \\ \text{impaire} \end{cases}$ si $\forall x \in D_f \begin{cases} 1. -x \in D_f \text{ (l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0)} \\ 2. f(-x) = \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases} \end{cases}$

PROP : f est $\begin{cases} \text{paire} \\ \text{impaire} \end{cases}$ ssi sa courbe est symétrique par rapport à $\begin{cases} Oy \\ O \end{cases}$.

7) Périodicité.

DEF : on dit que $T \in \mathbb{R}$ est une *période* de f (ou que f est T -*périodique*) si $\forall x \in D_f \begin{cases} 1. x+T \text{ et } x-T \in D_f \\ 2. f(x+T) = f(x) \end{cases}$

Une fonction *périodique* est alors définie comme ayant au moins une période non nulle.

PROP : l'ensemble des périodes \mathcal{T}_f de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (non réduit à $\{0\}$ ssi f est périodique).

D9

CORO : si T est une période de f , kT également, pour tout entier k .

PROP : \cos, \sin et \tan , frac ont respectivement $2\pi, 2\pi, \pi$ et 1 pour plus petite période >0 ; mais il existe des fonctions périodiques, même non constantes, n'ayant pas de plus petite période strictement positive.

D10

PB : la somme de 2 fonctions périodiques est-elle périodique ?