1) Courbe représentative.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on confondra toujours f avec l'*application* de D_f dans $\mathbb{R}$ qui à x de D_f fait correspondre $f(x)$.

DEF : si P est un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, la courbe représentative de f dans ce repère est l'ensemble des points M de P de coordonnées $\left| \begin{array}{l} x \\ f(x) \end{array} \right.$ pour x décrivant D_f :

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in C_f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D_f \\ y = f(x) \end{array} \right.$$

Réciproquement, une partie C de P est la courbe représentative d'une fonction f ssi

$$M_1 \left| \begin{array}{l} x \\ y_1 \end{array} \right. \text{ et } M_2 \left| \begin{array}{l} x \\ y_2 \end{array} \right. \in C \Rightarrow y_1 = y_2$$

autrement dit si toute droite verticale rencontre C en un point au plus.

La fonction f est alors définie par $x \mapsto y \ / \ M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in C$.

La fonction f est injective ssi

$$M_1 \left| \begin{array}{l} x_1 \\ y \end{array} \right. \text{ et } M_2 \left| \begin{array}{l} x_2 \\ y \end{array} \right. \in C_f \Rightarrow x_1 = x_2$$

autrement dit si toute droite *horizontale* rencontre C_f en un point au *plus*.

La fonction f est surjective ssi

$$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists M \in C_f \ / \ \text{ordonnée}(M) = y$$

autrement dit si toute droite *horizontale* rencontre C_f en un point au moins.

2) Opérations sur les fonctions.

DEF : soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; on définit leur $\left\{ \begin{array}{l} \textit{somme} \\ \textit{produit} \end{array} \right.$ comme la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'ensemble de définition $D_f \cap D_g$ qui à x fait correspondre $\left\{ \begin{array}{l} f(x) + g(x) \\ f(x)g(x) \end{array} \right.$; donc

$$\forall x \in D_f \cap D_g \ \begin{array}{|c|} \hline (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \hline (fg)(x) = f(x)\, g(x) \\ \hline \end{array}$$

On définit le *produit* de f par un réel λ comme la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f qui à x fait correspondre $\lambda f(x)$; donc

$$\forall x \in D_f \ \boxed{(\lambda f)(x) = \lambda f(x)}$$

On définit leur *quotient* comme la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'ensemble de définition $D_f \cap \left(D_g \backslash g^{-1}(0)\right)$ qui à x fait correspondre $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; donc

$$\forall x \in D_f \cap \left(D_g \backslash g^{-1}(0)\right) \ \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$$

Exemples E1.

ATTENTION : si un produit de 2 réels est nul, l'un des deux réels est nul, mais un produit de 2 fonctions peut être la fonction nulle sans qu'aucune des 2 fonctions ne soit nulle !

D1

3) Sens de variation.

DEF : soit I une partie de l'ensemble de définition de f ; alors on dit que f est

croissante sur I ssi	$\forall x, x' \in I \;\; x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x')$
strictement croissante sur I ssi	$\forall x, x' \in I \;\; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
décroissante sur I ssi	$\forall x, x' \in I \;\; x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$
strictement décroissante sur I ssi	$\forall x, x' \in I \;\; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$
monotone sur I ssi	f y est croissante ou décroissante
strictement monotone sur I ssi	f y est strictement croissante ou strictement décroissante
constante sur I ssi	$\forall x, x' \in I \;\; f(x) = f(x')$
injective sur I ssi	$\forall x, x' \in I \;\; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

REM : constante équivaut à croissante et décroissante.

DEF : soient x, x' deux élément distincts de D_f, on définit le *taux d'accroissement* (ou de *variation*) de f entre x et x' comme le réel

$$t_f(x, x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

REM 1 : $t_f(x, x') = t_f(x', x)$.

REM 2 : le taux d'accroissement de f entre x et x' est la pente (ou coefficient directeur) de la sécante (MM') à la courbe de f, avec $M \left| \begin{array}{c} x \\ f(x) \end{array} \right.$, $M' \left| \begin{array}{c} x' \\ f(x') \end{array} \right.$.

PROP : interprétation des définitions ci-dessus en termes de taux d'accroissement ; f est :

croissante sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement ....:	$\forall x \neq x' \in I \;\; t_f(x, x')$ ....
strictement croissante sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement ....:	$\forall x \neq x' \in I \;\; t_f(x, x')$
décroissante sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement ....:	$\forall x \neq x' \in I \;\; t_f(x, x')$
strictement décroissante sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement ....:	$\forall x \neq x' \in I \;\; t_f(x, x')$
constante sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement ....:	$\forall x \neq x' \in I \;\; t_f(x, x')$
injective sur I ssi f conserve sur I un taux d'accroissement ....:	$\forall x \neq x' \in I \;\; t_f(x, x')$

D7

REM : il est évident à l'aide de cette caractérisation qu'une fonction strictement monotone est injective ; mais la réciproque est fausse : le taux d'accroissement peut très bien être toujours non nul sans conserver un signe constant.

4) Fonction bornée.

DEF :

$$f \text{ est } \left\{ \begin{array}{c} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{array} \right. \text{ sur } I \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{c} \exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I \;\; f(x) \leqslant M \\ \exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I \;\; f(x) \geqslant m \\ f \text{ est minorée et majorée sur } I \end{array} \right.$$

PROP :
f est bornée sur I ssi $|f|$ est majorée sur I.

D2

5) Parité.

DEF : f est dite $\left\{ \begin{array}{l} \textit{paire} \\ \textit{impaire} \end{array} \right.$ si $\forall x \in D_f$ $\left\{ \begin{array}{l} 1.\ -x \in D_f \text{ (l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0)} \\ 2.\ \ f(-x) = \left\{ \begin{array}{c} f(x) \\ -f(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$

PROP : f est $\left\{ \begin{array}{l} \textit{paire} \\ \textit{impaire} \end{array} \right.$ ssi sa courbe est symétrique par rapport à $\left\{ \begin{array}{c} Oy \\ O \end{array} \right.$.

D3

6) Périodicité.

DEF : on dit que $T \in \mathbb{R}$ est une *période* de f (ou que f est T-*périodique*) si $\forall x \in D_f \begin{cases} 1.\ x+T \text{ et } x-T \in D_f \\ 2.\ \ f(x+T) = f(x) \end{cases}$
Une fonction *périodique* est alors définie comme ayant au moins une période non nulle.

PROP : si T est une période, $-T$ aussi, et si T_1 et T_2 sont des périodes, $T_1 + T_2$ en est une aussi.

CORO : si T est une période de f, kT également, pour tout entier k.

D4
PROP : $\cos, \sin$, tan et frac ont respectivement $2\pi, 2\pi$, π et 1 pour plus petite période > 0 ; mais il existe des fonctions périodiques, même non constantes, n'ayant pas de plus petite période strictement positive.

D5
PROP : f est T - périodique ssi sa courbe est invariante par translation de vecteur $\overrightarrow{u} \begin{cases} T \\ 0 \end{cases}$.
D6

PB : la somme de 2 fonctions périodiques est-elle périodique ?