1) Caractérisation de $\mathbb{R}$.

TH admis : il existe un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, muni d'une relation d'ordre $\leqslant$, d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$, prolongeant celles de $\mathbb{Q}$ et vérifiant :

1. $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps commutatif totalement ordonné, à savoir que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif et que

| |
|---|
| Caractère total de $\leqslant$ : $a \nleqslant b \Leftrightarrow b < a$ |
| Compatibilité avec $+$ : $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$ |
| Compatibilité avec $\times$ : si $c \geqslant 0$, $a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$ |

2. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ vérifie la propriété de la borne supérieure, à savoir que toute partie non vide majorée possède une borne supérieure.

De plus, ceci caractérise $\mathbb{R}$ à isomorphisme près en ce sens que si deux ensembles $(\mathbb{R}_1, +, \times, \leqslant)$ et $(\mathbb{R}_2, +, \times, \leqslant)$ vérifient les axiomes ci-dessus, il existe un isomorphisme du premier sur le deuxième.

La définition de $\overline{\mathbb{R}}$ a été faite dans le chapitre sur les relations d'ordre.

RAPPELS : $A \subset \mathbb{R}$ est $\left\{\begin{array}{c}\text{majorée}\\ \text{minorée}\\ \text{bornée}\end{array}\right.$ ssi $\left\{\begin{array}{c}\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in A \ \ x \leqslant M\\ \exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in A \ \ x \geqslant m\\ A \text{ est minorée et majorée}\end{array}\right.$ ssi $\left\{\begin{array}{c}\sup A < +\infty\\ \inf A > -\infty\\ \exists M \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall x \in A \ \ |x| \leqslant M\end{array}\right.$

2) Diverses caractérisations de la borne supérieure pour une partie de $\mathbb{R}$.

TH1 : caractérisation "en $\varepsilon$".
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $m$ un élément de $\mathbb{R}$. Alors :

$m$ est la borne supérieure de $A$ ssi $m$ est un majorant de $A$ et si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a \in A \quad m - \varepsilon \leqslant a \leqslant m$$

TH2 : caractérisation séquentielle.
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $m$ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$m$ est la borne supérieure de $A$ ssi $m$ est un majorant de $A$ et s'il existe une suite d'éléments de $A$ de limite $m$.

D1

3) INTERVALLES DE $\mathbb{R}$.

Notations : pour $a \leqslant b \in \overline{\mathbb{R}}$, on pose

| |
|---|
| $[a, b] = [b, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\}$ |
| $[a, b[ \ = \ ]b, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \ / \ a \leqslant x < b\}$ |
| $]a, b] = [b, a[ \ = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \ / \ a < x \leqslant b\}$ |
| $]a, b[ \ = \ ]b, a[ \ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$ |

DEF : une partie $I$ de $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée un *intervalle* si tout réel strictement compris entre sa borne inférieure et sa borne supérieure appartient à $I$, autrement dit :

$$I = \varnothing \text{ ou } ]\inf I, \ \sup I[ \ \subset I$$

PROP : ceci équivaut à

$$\exists a, b \in \overline{\mathbb{R}} \ / \ ]a, b[ \ \subset I \subset \ [a, b]$$

; les ensembles définis ci-dessus sont donc des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ et il n'y a pas d'autres intervalles que ceux-ci.

D2 (avec le lemme : si $A \subset B \subset \overline{\mathbb{R}}$ , $\inf A \geqslant \inf B$ et $\sup A \leqslant \sup B$).

REM : on peut classer les intervalles de $\mathbb{R}$ en 4 types, se décomposant en 11 sous-types :

- Les intervalles *ouverts* $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ , avec comme sous-types : $\emptyset$ ; les intervalles ouverts bornés non vides $]a, b[$ avec $a < b$ réels ; les $]-\infty, b[$ avec $b$ réel, les $]a, +\infty[$ avec $a$ réel et $]-\infty, +\infty[ \ = \mathbb{R}$.

- les intervalles *fermés* (bornés), appelés aussi *segments*, $[a, b]$ avec $-\infty < a \leqslant b < +\infty$ avec comme sous types les singletons $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$, et les segments infinis $[a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$.
- les intervalles *semi-ouverts à droite* $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, avec comme sous-types les intervalles semi-ouverts à droite bornés $[a, b[$avec $-\infty < a < b < +\infty$ et les $[a, +\infty[$ avec $a$ réel.
- les intervalles *semi-ouverts à gauche* $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, avec comme sous-types les intervalles semi-ouverts à gauche bornés $]a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ et les $]-\infty, b]$ avec $b$ réel.

DEF : un convexe (ou partie convexe) $C$ de $\overline{\mathbb{R}}$ est une partie telle que tout élément situé entre deux éléments de $C$ est encore un élément de $C$, autrement dit :

$$\forall x, y \in C \quad [x, y] \subset C$$

PROP : il y a identité entre les convexes de $\overline{\mathbb{R}}$ et les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.
D3

REM : la notion de convexe s'étend au plan, à l'espace etc., et il n'y a alors plus identité entre les deux notions.

4) PARTIES DENSES DANS $\mathbb{R}$.

DEF : une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est dite *dense dans* $\mathbb{R}$ si entre deux réels distincts il existe toujours au moins un élément de $A$, autrement dit :

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \quad [x, y] \cap A \neq \emptyset$$

REM : si $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ , entre deux réels existe toujours une *infinité* d'éléments de $A$.
D4

PROP : $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
D5

REM : on a démontré dans le cours sur les suites que plus généralement, toute partie de complémentaire dénombrable est dense dans $\mathbb{R}$.

5) NOTION DE VOISINAGE.

Rappels :
- si $a, b \in \mathbb{R}$ la *distance* de $a$ à $b$ est $|b - a|$ ;
- $\boxed{|x - x_0| \leqslant \alpha} \Leftrightarrow \boxed{x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha} \Leftrightarrow \boxed{x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]}$ ssi $x$ est distant de $x_0$ de moins de $\alpha$.

L'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ est appelé l'intervalle fermé centré en $x_0$ et de rayon $\alpha$.

DEF : un intervalle du type $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ (avec $\alpha > 0$ impérativement) est appelé un *voisinage* de $x_0 \in \mathbb{R}$ , et un intervalle du type $\left\{ \begin{array}{l} [A, +\infty[ \\ ]-\infty, -A] \end{array} \right.$ est appelé un *voisinage* de$\left\{ \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array} \right.$ .

Utilité de la notion de voisinage :

$\alpha$) Unification des définitions des limites de suites.

PROP : Si $(u_n)$ est une suite de réels et $l \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$l = \lim u_n \Leftrightarrow \forall V \text{ voisinage de } l \qquad u_n \in V \quad \text{APCR}$$

En français : $u_n$ peut être rendu aussi voisin qu'on veut de $l$, à condition de prendre $n$ assez grand.

$\beta$ ) Notion de propriété vraie "au voisinage d'un point".

DEF : on dira qu'une propriété $P(x)$ est vraie "au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ " s'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $P(x)$ soit vraie pour tout $x$ dans $V$.

Exemples E2.