VII) INTÉGRATION

1) Définition et propriétés de base.

Dans tout ce chapitre f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

DEF : une fonction F est appelée une *primitive* de f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et si $\forall x \in I \;\; F'(x) = f(x)$.

REM : on a vu dans le chapitre de dérivation que deux primitives d'une même fonction SUR UN INTERVALLE diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

TH (admis, démontré dans le cours niveau 2) : toute fonction *continue* sur un *intervalle* possède une primitive sur cet intervalle.

TH et DEF : si f est continue sur $[a,b]$ alors le nombre $F(b) - F(a)$, que l'on note$[F(x)]_a^b$ ne dépend pas de la primitive F de f sur $[a,b]$ choisie; on l'appelle l'intégrale de f entre a et b et on la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int_a^b f$.

E1 : $\displaystyle\int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$

REM 1 : cette définition deviendra un théorème dans le cours de niveau 2.

REM 2 : interprétation comme "aire sous la courbe".

REM 3: $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.

P1 (Relation de Chasles) :

Si a, b, c sont trois réels quelconques et f continue sur $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$, alors,

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

D1

P2 (linéarité de l'intégrale) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f, g \text{ sont continues sur } [a,b] \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g}$$

D2

P3 (positivité de l'intégrale) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \text{ avec } a \leqslant b \\ f(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in [a,b] \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \int_a^b f \geqslant 0}$$

D3

P4 (intégration d'une inégalité, coro de P2 et P3) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \text{ avec } a \leqslant b \\ f(x) \leqslant g(x) \text{ pour } x \in [a,b] \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \int_a^b f \leqslant \int_a^b g}$$

D4

P5 (Nullité d'une fonction de signe constant dont l'intégrale est nulle)

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est } \textit{continue} \text{ sur } [a,b]\;, a \neq b \\ f(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [a,b] \text{ ou } f(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in [a,b] \\ \int_a^b f = 0 \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [a,b]}$$

D5
P6 (positivité stricte de l'intégrale d'une fonction continue) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est } \textit{continue} \text{ sur } [a,b], \quad a<b \\ f(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in [a,b] \\ f(x_0) > 0 \text{ pour au moins un } x_0 \in [a,b] \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \int_a^b f > 0}$$

D6
P7 (intégration d'une inégalité entre fonctions continues distinctes, coro de P2 et P6) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f, g \text{ sont } \textit{continues} \text{ sur } [a,b]\ ,\ a<b \\ f(x) \leqslant g(x) \text{ pour } x \in [a,b] \\ f(x_0) < g(x_0) \text{ pour au moins un } x_0 \in [a,b] \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \int_a^b f < \int_a^b g}$$

D7
P8 (Inégalité triangulaire pour les intégrales)

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \ f \text{ est continue sur } [a,b] \text{ avec } a \leqslant b} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|}$$

D8
P9 (Inégalités de la moyenne)
Version encadrements :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ a \leqslant b \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : (b-a) \min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a) \max_{[a,b]} f}$$

Version valeur absolue :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : f \text{ est continue sur } [a,b]} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \left|\int_a^b f\right| \leqslant |b-a| \max_{[a,b]} |f|}$$

D9

Explication de l'appellation "inégalités de la moyenne" :

DEF : la valeur moyenne d'une fonction f continue sur $[a,b]$ est le nombre

$$\boxed{Moy_{[a,b]}(f) = \frac{\int_a^b f}{b-a}} \text{ si } a \neq b,\ Moy_{[a,b]}(f) = f(a) \text{ si } a = b$$

Remarquons que :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b Moy_{[a,b]}(f)\,dx}$$

Les inégalités de la moyennes s'énoncent alors :
pour la version encadrement :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : f \text{ est continue sur } [a,b]} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \min_{[a,b]} f \leqslant Moy_{[a,b]}(f) \leqslant \max_{[a,b]} f}$$

pour la version valeur absolue :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : f \text{ est continue sur } [a,b]} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \left|Moy_{[a,b]}(f)\right| \leqslant \max_{[a,b]} |f|}$$

P10 : dérivation de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J à valeurs dans I ; pour x dans J, on pose $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$; alors g est dérivable sur J et

$$g'(x) =$$

D10

2) Notation d'une primitive par une intégrale.

A cause du lien entre les intégrales et les primitives, une primitive quelconque de f, continue sur un intervalle qu'il faut préciser, est notée

$$x \mapsto \int f(x)\,dx$$

Il faut bien prendre garde au fait que, dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx$, la variable x est muette, alors qu'elle ne l'est pas dans l'écriture $\int f(x)\,dx$ (que l'on appelle "intégrale indéfinie") ; par exemple :

$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$\int \cos(x)\,dx = \sin x + C$
$\int \sin(x)\,dx = -\cos x + C$

3) Formule d'intégration par parties.

a) Version intégrale indéfinie :

PROP : si u et v sont deux fonctions de dérivée continue sur un intervalle I, alors, pour x dans I :

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

D11

REM 1 : il ne faut jamais perdre de vue que la formule d'intégration par parties est une simple intégration de la formule de dérivation d'un produit.

REM 2 : il est très pratique d'utiliser les abus d'écriture $u = u(x)\,, v = v(x)\,, u'(x) = \dfrac{du}{dx}, v'(x) = \dfrac{dv}{dx}$ avec lesquels la formule d'intégration par parties se met très simplement sous la forme :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

E1

b) Version intégrale définie :

PROP : si u et v sont deux fonctions dérivables de dérivée continue sur un intervalle $[a, b]$, alors,

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

4) Formule de changement de variable.

a) Version intégrale indéfinie :

PROP : si f est une fonction continue sur un intervalle J, et u une fonction de dérivée continue sur un intervalle I, avec $u(I) \subset J$, alors, pour x dans I :

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

où l'on commet, dans le second membre, l'abus d'écriture consistant à considérer u comme une variable (appartenant à J).

D12

E2

REM : il ne faut jamais perdre de vue que la formule de changement de variable est une simple intégration de la formule de dérivation d'une composée.

b) Version intégrale définie :

PROP : si u est une fonction de dérivée continue sur un intervalle $[a, b]$ et si f est une fonction continue sur $J = u([a, b])$, alors :

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\, dx$$

D 13

E3

$$\int_a^b f(x)\, dx \overset{\substack{u = x - c \\ du = dx}}{=} \int ....$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \overset{\substack{u = kx \\ du = kdx \\ dx = ...}}{=} \int ....$$

$$\int_a^b f(e^x)\, e^x dx \overset{\substack{u = e^x \\ du = ...}}{=} \int ....$$

$$\int_a^b f(e^x)\, dx \overset{\substack{u = e^x \\ du = ... \\ dx = ...}}{=} \int ....$$

5) Applications.

A1 : si f est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f sur une période (c'est-à-dire sur un intervalle d'amplitude T) ne dépend pas de cet intervalle.

D14

A2 : si f est continue et paire sur $\mathbb{R}$, a et b deux réels, alors

$$\int_a^b f = \int_{-b}^{-a} f$$

et par conséquent :

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$$

A3 : si f est continue et impaire sur $\mathbb{R}$, a et b deux réels, alors

$$\int_{a}^{b} f = -\int_{-b}^{-a} f$$

et par conséquent :

$$\int_{-a}^{a} f = 0$$

D15