

D) CALCUL INTÉGRAL

Dans tout ce chapitre f désigne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

I) FONCTIONS AYANT UNE PROPRIÉTÉ "PAR MORCEAUX".

1) Définitions.

Dans ce paragraphe, a et b sont deux réels vérifiant $a < b$.

DEF : on appelle subdivision d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de l'intervalle $[a, b]$ toute liste $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $n + 1$ réels vérifiant :

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Les x_k sont appelés les *points* de la subdivision, les intervalles $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1..n$, les *intervalles fermés de la subdivision*, et les intervalles $]x_{k-1}, x_k[$ les *intervalles ouverts* ; le réel $\max_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$ s'appelle le *pas* (ou le *module*) de la subdivision.

La subdivision est dite *régulière* si les nombres $x_k - x_{k-1}$ sont égaux (donc égaux à $\frac{b-a}{n}$).

REM : la subdivision est régulière ssi $x_k = \dots$; ce qui donne en particulier, lorsque $a = 0$ et $b = 1$: $x_k = \dots$

DEF : soit P une propriété concernant des fonctions sur un intervalle ; on dira que la fonction f possède la propriété P *par morceaux* (ou *par intervalles*) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que les n restrictions de f aux intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$ de la subdivision σ sont prolongeables en des fonctions ayant la propriété P sur les intervalles fermés $[x_{k-1}, x_k]$.

Une subdivision ayant cette propriété sera dite *adaptée* à la fonction f sur $[a, b]$ pour la propriété P .

2) Exemples classiques

a) Fonction continue par morceaux.

CNS : f est continue *par morceaux* sur $[a, b]$ ss'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que

α) les n restrictions de f aux intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$ sont continues

β) f possède une limite finie stricte à droite en x_0, \dots, x_{n-1} et une limite finie stricte à gauche en x_1, \dots, x_n .

Si l'on définit un point de discontinuité *de première espèce* d'une fonction comme étant un point de discontinuité où la fonction possède cependant une limite stricte finie à gauche et à droite, cette CNS peut s'écrire :

CNS : f est continue par morceaux sur $[a, b]$ ssi la restriction de f à $[a, b]$ est continue en tout point de $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points où la discontinuité de la fonction est de première espèce.

E1

PROP (application du théorème de Weierstrass) :

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment et atteint ses bornes.

D1

Notation : l'ensemble des fonctions réelles d'ensemble de définition $[a, b]$ continues par morceaux sur $[a, b]$ est noté $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

PROP (admise) : $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a, b]}$, donc une de $\mathbb{R}^{[a, b]}$.

b) Fonctions constantes par morceaux.

Elles sont plus communément appelées : *fonctions en escalier*.

CNS : f est en escalier sur $[a, b]$ ss'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall k \in [1, n] \quad \forall x \in]x_{k-1}, x_k[\quad f(x) = \lambda_k$$

D2

Notation : l'ensemble des fonctions réelles d'ensemble de définition $[a, b]$ en escalier sur $[a, b]$ est noté $Esc([a, b], \mathbb{R})$.

PROP (admise) : $Esc([a, b], \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

c) Fonctions affines par morceaux.

CNS : f est affine par morceaux sur $[a, b]$ ss'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et $2n$ réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ tels que

$$\forall k \in [1, n] \quad \forall x \in]x_{k-1}, x_k[\quad f(x) = a_k x + b_k$$

D3

E2

Notation : l'ensemble des fonctions réelles d'ensemble de définition $[a, b]$ affines par morceaux sur $[a, b]$ est noté $\mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R})$.
 PROP (admise) : $\mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ (mais pas un sous-anneau).

d) Fonctions de classe \mathcal{C}^k par morceaux.

Notation : l'ensemble des fonctions réelles d'ensemble de définition $[a, b]$ de classe \mathcal{C}^k par morceaux sur $[a, b]$ est noté $\mathcal{C}^k \mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$.

PROP (admise) : $\mathcal{C}^k \mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

E3

II) INTÉGRABILITÉ D'UNE FONCTION BORNÉE SUR UN SEGMENT.

1) Intégrale d'une fonction en escalier.

PROP et DEF : soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f , et λ_k la valeur constante de f sur $]x_{k-1}, x_k[$; alors le réel

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1})$$

est indépendant du choix de la subdivision adaptée.

On l'appelle : intégrale de f sur $[a, b]$:

$$I(f) = \int_a^b f = \sum_{k=1}^n f(c_k) (x_k - x_{k-1}) \quad \text{avec } c_k \in]x_{k-1}, x_k[$$

REM : $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ est le barycentre des λ_k affectés des coefficients $x_k - x_{k-1}$; il représente donc la valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$.

PROP : si f et g sont en escalier sur $[a, b]$,

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow I(f) \leq I(g)$$

2) Intégrales inférieure et supérieure d'une fonction bornée sur un segment.

DEF : supposant f bornée sur $[a, b]$, on désigne par *intégrale inférieure* de f sur $[a, b]$ la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier minorant f sur $[a, b]$, et par *intégrale supérieure* de f sur $[a, b]$ la

$I^-(f) = \sup \left\{ \begin{array}{l} I(g) \\ g \text{ en escalier sur } [a, b] \\ \forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq f(x) \end{array} \right.$
$I^+(f) = \inf \left\{ \begin{array}{l} I(h) \\ h \text{ en escalier sur } [a, b] \\ \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq h(x) \end{array} \right.$

PROP : si $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq M(b-a)$$

DEF : f est dite *intégrable* (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ dès que son intégrale inférieure sur $[a, b]$ est égale à son intégrale supérieure :

$$f \text{ est intégrable sur } [a, b] \Leftrightarrow I^-(f) = I^+(f)$$

la valeur commune des intégrales inférieure et supérieure de f sur $[a, b]$ est appelée *intégrale* de f sur $[a, b]$ et notée $I(f) = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$ (x étant ici une variable muette).

REM : lorsque f est en escalier, cette définition redonne bien celle donnée précédemment.

Exemple de fonction non intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$: E4.

CNS : f est intégrable sur $[a, b]$ ss'il existe une suite (g_n) de fonctions en escalier minorant f sur $[a, b]$ et une suite (h_n) de fonctions en escalier majorant f sur $[a, b]$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b h_n - \int_a^b g_n \right) = 0$; on a alors

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h_n$$

D4 (réciproque seulement).

APPLICATION : toute fonction monotone sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

D5

E5 : calcul de $\int_0^a x dx$.

TH : toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

III) PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT

P1 : si f est CM sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f$ n'est pas modifiée si l'on modifie la valeur de f en un nombre fini de points de $[a, b]$.

P2 : si f est définie sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points, mais qu'elle est prolongeable en une fonction CM sur $[a, b]$, alors l'intégrale de ce prolongement ne dépend pas de ce prolongement ; on dira par définition que c'est l'intégrale de f sur $[a, b]$.

E5 : $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ a un sens, $\int_0^\pi \tan x dx$ n'en a pas.

Conventions : soient a et b deux réels quelconques ;

- si $a = b$, $\int_a^b f = 0$ dans tous les cas.

- si f est CM sur $[a, b]$, on pose :

$\int_{[a,b]} f = \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} f$
si $a > b$, $\int_a^b f = - \int_b^a f$

E6 : $\int_{[x^2-x, x^2+x]} f(t) dt =$

P3 (Relation de Chasles) :

Si a, b, c sont trois réels quelconques et f CM sur $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$, alors,

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

D6

P4 (linéarité de l'intégrale) :

$$\text{si (H) : } \left\{ \begin{array}{l} f, g \text{ sont CM sur } [a, b] \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right. \text{ alors (C) : } \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

P5 (positivité de l'intégrale) :

$$\text{si (H) : } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est CM sur } [a, b] \\ f(x) \geq 0 \text{ pour } x \in [a, b], \text{ sauf pour un nombre fini de } x \end{array} \right. \text{ alors (C) : } \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f \geq 0 \text{ si } a \leq b \\ \int_{[a,b]} f \geq 0 \text{ dans tous les cas} \end{array} \right.$$

D7

P6 (croissance de l'intégrale, coro de P4 et P5) :

$$\text{si (H) : } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est CM sur } [a, b] \\ f(x) \leq g(x) \text{ pour } x \in [a, b], \text{ sauf pour un nombre fini de } x \end{array} \right. \text{ alors (C) : } \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f \leq \int_a^b g \text{ si } a \leq b \\ \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g \text{ dans tous les cas} \end{array} \right.$$

D8

P7 (positivité stricte de l'intégrale, pour une fonction continue) :

$$\text{si (H) : } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b], a \neq b \\ f(x) \geq 0 \text{ pour } x \in [a, b], \text{ sauf pour un nombre fini de } x \\ f(x_0) > 0 \text{ pour au moins un } x_0 \in [a, b] \end{array} \right. \text{ alors (C) : } \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f > 0 \text{ si } a \leq b \\ \int_{[a,b]} f > 0 \text{ dans tous les cas} \end{array} \right.$$

D9

CORO (contraposée de P7)

$$\text{si (H) : } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b], a \neq b \\ f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [a, b] \text{ ou } f(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in [a, b] \\ \int_a^b f = 0 \end{array} \right. \text{ alors (C) : } f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

D10

P8 (croissance stricte de l'intégrale pour des fonctions continues, coro de P4 et P7) :

$$\text{si (H) : } \left\{ \begin{array}{l} f, g \text{ sont continues sur } [a, b], a \neq b \\ f(x) \leq g(x) \text{ pour } x \in [a, b], \text{ sauf pour un nombre fini de } x \\ f(x_0) < g(x_0) \text{ pour au moins un } x_0 \in [a, b] \end{array} \right. \text{ alors (C) : } \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f < \int_a^b g \text{ si } a < b \\ \int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g \text{ dans tous les cas} \end{array} \right.$$

D11

CORO (contraposée de P8)

$$\text{si (H) : } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont continues sur } [a, b] \\ f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in [a, b] \\ \int_a^b f = \int_a^b g \end{array} \right. \text{ alors (C) : } f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

D12

P9 (Inégalité triangulaire pour les intégrales)

$$\text{si (H) : } f \text{ est CM sur } [a, b] \text{ alors (C) : } \left| \int_a^b f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

D13

Exemple d'application : montrer que si $u_n = \int_0^1 x^n \sin(10x) dx$, $\lim u_n = 0$.

P10 (Inégalités de la moyenne)

Version encadrements :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \begin{cases} f \text{ est CM sur } [a, b] \\ a \leq b \end{cases}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : (b-a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{[a,b]} f}$$

Version valeur absolue :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : f \text{ est CM sur } [a, b]} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \left| \int_a^b f \right| \leq |b-a| \max_{[a,b]} |f|}$$

D14

Explication de l'appellation "inégalités de la moyenne" :

DEF : la valeur moyenne d'une fonction f CM sur $[a, b]$ est le nombre

$$\boxed{M_{[a,b]}(f) = \frac{\int_a^b f}{b-a} \text{ si } a \neq b, M_{[a,b]}(f) = f(a) \text{ si } a = b}$$

Remarquons que :

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^b M_{[a,b]}(f) dx}$$

Les inégalités de la moyennes s'énoncent alors :

pour la version encadrement :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : f \text{ est CM sur } [a, b]} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \min_{[a,b]} f \leq M_{[a,b]}(f) \leq \max_{[a,b]} f}$$

pour la version valeur absolue :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : f \text{ est CM sur } [a, b]} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : |M_{[a,b]}(f)| \leq \max_{[a,b]} |f|}$$

P11 (inégalité de la moyenne pondérée) :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : f \text{ et } g \text{ sont CM sur } [a, b]} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \left| \int_a^b fg \right| \leq \max_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|}$$

D15

REM 1 : si on fait $g = 1$ dans P11, on retrouve l'inégalité de la moyenne tout court, et si on fait $f = 1$, on retrouve l'inégalité triangulaire.

REM 2 : la moyenne d'une fonction f CM sur $[a, b]$ pondérée par une fonction g CM sur $[a, b]$ d'intégrale non nulle sur $[a, b]$ est le réel :

$$M_{[a,b],g}(f) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$$

L'inégalité de la moyenne pondérée s'écrit donc, si g est positive sur $[a, b]$

$$|M_{[a,b],g}(f)| \leq \max_{[a,b]} |f|$$

IV) INTÉGRALE FONCTION DE SA BORNE SUPÉRIEURE. PRIMITIVES.

1) Propriétés de l'intégrale fonction de sa borne supérieure.

DEF : soit I un intervalle de \mathbb{R} ; on dit que f est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I .

Exemples : la fonction partie entière est continue par morceaux sur \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* , mais pas sur \mathbb{R}_+ .

Considérons une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle I ; étant donné un point a de I , on définit la fonction F sur I par

$$F(x) = \int_a^x f$$

Remarquons que F ne dépend de a qu'à une constante près ; en effet, si $b \in I$ et $G(x) = \int_b^x f$, $G(x) - F(x) = \int_b^a f = cte$.

TH 1 : la fonction F est continue sur I (même si f est discontinue).

D16

REM : On dit que l'intégration a une fonction de régularisation.

E7

TH 2 : la fonction F est dérivable à droite et à gauche en tout point x_0 de I (si x_0 est l'une des bornes de I , il n'y a qu'une seule de ces deux dérivabilités), et

$F'_g(x_0) = \lim_{x \leq x_0} f(x)$
$F'_d(x_0) = \lim_{x \geq x_0} f(x)$

D17

COROLLAIRE 1 (théorème fondamental du calcul intégral) : si la fonction f est continue en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

D18

COROLLAIRE 2 : si la fonction f est continue sur I , la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur I ; plus généralement, si la fonction f est de classe \mathcal{C}^p sur I , la fonction F est de classe \mathcal{C}^{p+1} sur I .

2) Application à l'existence de primitives et au calcul des intégrales.

DEF : une fonction F est appelée une *primitive* de f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et si $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$.

REM : on a vu dans le cours sur les applications du théorème des accroissements finis que deux primitives d'une même fonction SUR UN INTERVALLE diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

TH 3 (corollaire du TH 2) : toute fonction *continue* sur un intervalle possède une primitive sur cet intervalle.

D19

REM : ce théorème est "existentiel" mais non constructif. Il ne dit pas comment obtenir une primitive à l'aide des fonctions usuelles. On démontre d'ailleurs qu'il existe des fonctions s'exprimant algébriquement à l'aide de fonctions usuelles dont les primitives ne peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Exemples : $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, e^{x^2} etc...

Mais on sait maintenant par contre que $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est une primitive de $x \mapsto e^{x^2}$.

ATTENTION : PAR CONTRE SI f est continue par morceaux sur un intervalle I SANS ETRE CONTINUE, ELLE NE POSSEDE PAS DE PRIMITIVE sur I ; la fonction F définie dans 1) n'est pas dérivable sur I tout entier.

TH 3 bis (corollaire du TH précédent et de la remarque qui le précède) : toute fonction *continue* sur un intervalle possède une **UNIQUE** primitive F_{x_0, y_0} sur cet intervalle prenant une valeur donnée y_0 en un point donné x_0 de I ; elle est définie par

$$F_{x_0, y_0}(x) = \dots\dots\dots$$

D20

TH 4 (expression de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à l'aide de l'une de ses primitives) : si f est continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ que l'on note } [F(x)]_a^b$$

D21

E8

APPLICATION : dérivation de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J à valeurs dans I ; pour x dans J , on pose $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$; alors g est dérivable sur J et

$$g'(x) =$$

D22

3) Notation des primitives.

A cause du lien vu ci-dessus entre les intégrales et les primitives, une primitive quelconque de f , continue sur un intervalle qu'il faut préciser, est notée

$$x \mapsto \int f(x) dx$$

Il faut bien prendre garde au fait que, dans la notation $\int_a^b f(x) dx$, la variable x est muette, alors qu'elle ne l'est pas dans l'écriture $\int f(x) dx$ (que l'on appelle "intégrale indéfinie") ; par exemple :

$\int \cos(x) dx = \sin x + C$
$\int_a^b \cos(x) dx = \sin b - \sin a$

V) Intégration par parties et changement de variable.

1) Formule d'intégration par parties.

a) Version intégrale indéfinie :

PROP : si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , alors, pour x dans I :

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

D23

REM 1 : il ne faut jamais perdre de vue que la formule d'intégration par parties est une simple intégration de la formule de dérivation d'un produit.

REM 2 : il est très pratique d'utiliser les abus d'écriture $u = u(x)$, $v = v(x)$, $u'(x) = \frac{du}{dx}$, $v'(x) = \frac{dv}{dx}$ avec lesquels la formule d'intégration par parties se met très simplement sous la forme :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

E9

b) Version intégrale définie :

PROP : si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a, b]$, alors,

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

2) Formule de changement de variable.

a) Version intégrale indéfinie :

PROP : si f est une fonction continue sur un intervalle J , et u une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , avec $u(I) \subset J$, alors, pour x dans I :

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du$$

où l'on commet, dans le second membre, l'abus d'écriture consistant à considérer u comme une variable (appartenant à J).

D24

E10

REM : il ne faut jamais perdre de vue que la formule de changement de variable est une simple intégration de la formule de dérivation d'une composée.

b) Version intégrale définie :

PROP : si u est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a, b]$ et si f est une fonction continue par morceaux sur $J = u([a, b])$, alors :

$$\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

D 25 (uniquement dans le cas où f est continue).

E11

3) Applications.

A1 : si f est continue par morceaux et T -périodique sur \mathbb{R} , l'intégrale de f sur une période (c'est-à-dire sur un intervalle d'amplitude T) ne dépend pas de cet intervalle.

D26

A2 : si f est continue par morceaux et paire sur \mathbb{R} , a et b deux réels, alors

$$\int_a^b f = \int_{-b}^{-a} f$$

et par conséquent :

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$$

A3 : si f est continue par morceaux et impaire sur \mathbb{R} , a et b deux réels, alors

$$\int_a^b f = - \int_{-b}^{-a} f$$

et par conséquent :

$$\int_{-a}^a f = 0$$

D27

VI) FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTEGRAL.

1) Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.

TH (formule de Taylor avec reste intégral) :

soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$, $T_{(n,f,a)}$ le polynôme de Taylor de f en a ; alors :

$$f(b) = T_{(n,f,a)}(b) + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx}_{\text{reste intégral}} = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

D28 : poser $I_k = \int_a^b \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) dx$, vérifier par une intégration par parties que

$$I_k = -\frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + I_{k-1}$$

et itérer cette relation de récurrence en partant de I_n .

APPLICATION : inégalité de Taylor-Lagrange :

soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$, $T_{(n,f,a)}$ le polynôme de Taylor de f en a ; alors :

$$|f(b) - T_{(n,f,a)}(b)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

D29

REM : pour $n = 0$, cette inégalité n'est autre que celle des accroissements finis.

2) Application au développement en série de Taylor de fonctions usuelles.

Par convention, $\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k$ désigne la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=k_0}^n u_k$.

TH 1 pour tout réel x :

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

D30

TH 2 : pour tout réel $x \in [-1/2, 1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

D31

REM 1 : pour $x = 1$, on obtient l'égalité remarquable

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$$

REM 2 : on démontre que l'égalité du TH2 est valable pour $x \in]-1, 1]$ (et même aussi pour $x = -1$, si l'on dit que $\ln(0) = -\infty \dots$)

VII) SOMMES DE RIEMANN

DEF : soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$, et $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de cet intervalle ; dans chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ de la subdivision, on se donne un élément c_k ; par définition, la somme de Riemann associée à la fonction f , à la subdivision σ et à $(c_k)_{k=1..n}$ est le réel :

$$S_{(f, \sigma, (c_k))} = \sum_{k=1}^n f(c_k) (x_k - x_{k-1})$$

REM : si la subdivision σ est régulière, $S_{(f, \sigma, (c_k))} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k)$; en particulier, si $a = 0, b = 1$ et $c_k = x_k$, on a :

$$S_{(f, \sigma, (x_k))} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

formule à savoir sans hésiter.

TH des sommes de Riemann : en raccourci, si f est CM sur $[a, b]$, les sommes de Riemann "convergent" vers l'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, ce qui signifie très précisément que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall \sigma, \forall (c_k) \quad \text{pas}(\sigma) < \alpha \Rightarrow \left| \int_a^b f - S_{(f, \sigma, (c_k))} \right| < \varepsilon$$

On en déduit, en prenant une subdivision régulière et des x_k égaux à la borne de droite de leur intervalle, le

COROLLAIRE : si f est CM sur $[a, b]$, la suite (S_n) définie par

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

converge vers $\int_a^b f$.

D32

REM : on en déduit que si f est CM sur $[a, b]$ d'intégrale non nulle, $\sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.M_{[a,b]}(f)$, et en particulier, pour $a = 0$ et $b = 1$:

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.M_{[0,1]}(f) = n \int_0^1 f$$

E12

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \rightarrow \ln 2, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \sim \frac{1}{2n}, \quad w_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \sim \frac{2n}{\pi}, \quad x_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \sim \frac{1}{en}.$$

VIII) CALCULS APPROCHÉS D'UNE INTÉGRALE

Données : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ subdivision régulière de $[a, b]$,

$$I = \int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f.$$

1) Méthode des rectangles.

On remplace $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f$ par $(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1})$ ou par $(x_k - x_{k-1})f(x_k)$.

On obtient pour chacun des cas les formules approchées :

$$I_{r_1} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } I_{r_2} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Les formules sont exactes pour f constante.

$$\text{REM : } I_{r_2} - I_{r_1} = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

PROP : Majoration de l'erreur, si f est C^1 sur $[a, b]$ et $M_1 = \max_{[a,b]} |f'|$

$$|I - I_{r_1}| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n} \quad (\text{idem pour } |I - I_{r_2}|).$$

De plus, cette inégalité est une égalité quand f est affine.

D33 : à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, on montre d'abord que si f est C^1 sur $[\alpha, \beta]$:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - (\beta - \alpha)f(\alpha) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \max_{[\alpha, \beta]} |f'|$$

puis on applique ceci aux cas $\alpha = x_{k-1}, \beta = x_k$.

2) Méthode des trapèzes.

On remplace $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f$ par $(x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$; on obtient la formule approchée :

$$I_{tr} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) = \frac{I_{r_1} + I_{r_2}}{2} = I_{r_1} + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) = I_{r_2} - \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a))$$

La formule est exacte pour f affine.

PROP : Majoration de l'erreur, si f est C^2 et $M_2 = \max_{[a,b]} |f''|$

$$|I - I_{tr}| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

De plus, cette inégalité est une égalité quand f est du second degré.

$$\begin{aligned} \text{D34 : on montre d'abord que si } f \text{ est } C^2 \text{ sur } [\alpha, \beta], \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \frac{\beta - \alpha}{2} (f(\alpha) + f(\beta)) - \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) f'(x) dx \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} (f(\alpha) + f(\beta)) - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) f''(x) dx. \end{aligned}$$

(Ecrire d'abord $dx = d\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, puis $\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) dx = d\left(\frac{1}{2}(x - \alpha)(x - \beta)\right)$)

$$\text{On en déduit que } \left| \int_{\alpha}^{\beta} f - \frac{\beta - \alpha}{2} (f(\alpha) + f(\beta)) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{12} \max_{[\alpha, \beta]} |f''|$$

puis on applique ceci aux cas $\alpha = x_{k-1}, \beta = x_k$.

REM : ceci montre que $(I - I_{r_1}) \sim (I_{r_2} - I) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(b) - f(a)}{2n}$.

3) Méthode des tangentes, ou des rectangles centrés (hors programme).

On remplace $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f$ par $(x_k - x_{k-1})f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)$; on obtient la formule approchée

$$I_{ta} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + (2k-1) \frac{b-a}{2n}\right)$$

La formule est exacte pour f affine.

PROP : Majoration de l'erreur, si f est C^1 et $M_1 = \max_{[a,b]} |f'|$

$$|I - I_{ta}| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{4n}$$

D35 : en utilisant 2 fois l'inégalité de Taylor-Lagrange, on montre que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f - (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right| &\leq \left| \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f - \frac{\beta - \alpha}{2} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right| + \left| \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f - \frac{\beta - \alpha}{2} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right| \\ &\leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} \max_{\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]} |f'| + \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} \max_{\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]} |f'| \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \max_{[\alpha, \beta]} |f'| \end{aligned}$$

puis on applique ceci aux cas $\alpha = x_{k-1}, \beta = x_k$.

4) Méthode de Simpson (hors programme).

On remplace $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f$ par $(x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k)}{6}$, ce qui donne la formule approchée :

$$I_s = \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + 4 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + (2k+1) \frac{b-a}{2n}\right) \right)$$

La formule est exacte pour f polynomiale de degré inférieur ou égal à trois.

REM : $I_s = \frac{1}{3}(I_{tr} + 2I_{ta})$

PROP : Majoration de l'erreur, si f est C^4 et $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}|$

$$|I - I_s| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$$

De plus, cette majoration est une égalité quand f est du quatrième degré.

D36 : on montre d'abord que si f est C^4 sur $[\alpha, \beta]$,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f - \frac{\beta - \alpha}{6} \left(f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^5}{2880} \max_{[\alpha, \beta]} |f^{(4)}|$$

puis on applique ceci aux cas $\alpha = x_{k-1}, \beta = x_k$.

E. EXTENSION DES NOTIONS PRÉCÉDENTES AUX FONCTION DE \mathbb{R} vers \mathbb{C} .

f désigne une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{C} , g et h ses parties réelle et imaginaire ($g(x) = \operatorname{Re}(f(x)), h(x) = \operatorname{Im}(f(x))$)

I) Limites, continuité, équivalents, o , O .

Les définitions sont les mêmes, à condition de lire les valeurs absolues comme des modules (par contre les définitions avec des encadrements ne sont plus valables ; par exemple, f est continue en x_0 ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Il n'y a plus de notion de limite infinie (mais toujours des limites en $\pm\infty$) pour f , mais il y en a pour $|f|$, qui est une fonction réelle ; par exemple, $x \mapsto xe^{ix}$ n'a pas de limite en plus l'infini, mais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |xe^{ix}| = +\infty$$

PROP : il y a équivalence entre l'existence d'une limite l pour f avec celle d'une limite l_1 pour g et d'une limite l_2 pour h , et l'on a $l = l_1 + il_2$; on en déduit l'équivalence entre la continuité de f et celle, simultanée, de g et h .

Les propriétés concernant les opérations restent inchangées.

II) Dérivation.

Définitions identiques ; par exemple,

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u}$$

PROP : la dérivabilité de f équivaut à celle de ses parties réelle et imaginaire g et h ; et $f' = g' + ih'$.

Exemple :

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = ie^{ix} = e^{i(x + \frac{\pi}{2})}$$

Les propriétés concernant les opérations restent inchangées ; mais par contre, le théorème de Rolle ne s'étend pas aux fonctions complexes.

III) Intégration.

On ne peut plus définir l'intégrabilité à partir des fonctions en escalier minorantes et majorantes. La définition la plus simple consiste à poser que l'intégrabilité de f équivaut à celle de ses parties réelle et imaginaire g et h ; et l'on pose

$$\int_a^b f = \int_a^b g + i \int_a^b h$$

Toutes les propriétés ne faisant pas intervenir d'encadrements restent valables.

F. COMPLÉMENTS : méthodes de calculs de primitives (hors programme).

I) Primitives des fractions rationnelles réelles.

On décompose en éléments simples dans \mathbb{C} :

Les termes en	$x^k \ (k \geq 0)$	s'intègrent en	$\frac{x^m}{\dots}$
	$\frac{1}{(x-x_0)^k} \ (k \geq 2)$		$-\frac{1}{\dots (x-x_0)^{\dots}}$
	$\frac{1}{x-x_0}$		$\ln x-x_0 $
	$\frac{a}{(x-z_0)^k} + \frac{\bar{a}}{(x-\bar{z}_0)^k} \ (k \geq 2)$		$-\frac{a}{\dots (x-z_0)^{\dots}} - \frac{\bar{a}}{\dots (x-\bar{z}_0)^{\dots}}$ (à regrouper)
	$\frac{a}{x-z_0} + \frac{\bar{a}}{x-\bar{z}_0} = b \frac{2(x+c)}{(x+c)^2 + e^2} + \frac{d}{(x+c)^2 + e^2}$		$b \ln(\dots) + \dots \arctan(\dots)$

REM 1 : ceci démontre que toute fraction rationnelle possède une primitive ne faisant intervenir que \ln , \arctan , et des fractions rationnelles.

Mais il faut tempérer cet enthousiasme par le fait que, le théorème de D'Alembert n'étant pas constructif, on ne sait pas factoriser des polynômes de degré ≥ 5 ; par exemple, le calcul de $\int_a^b \frac{dx}{x^5 + x^2 + 1}$ est subordonné à la factorisation de $X^5 + X^2 + 1$, laquelle est inconnue...

REM 2 : les éléments simples en $\frac{a}{x - z_0} + \frac{\bar{a}}{x - \bar{z}_0}$ doivent être regroupés avant d'être intégrés ; s'ils sont déjà regroupés au départ, ne pas faire un travail inutile du style :

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + i} + \frac{1}{x - i} = \dots \frac{2x}{x^2 + 1}$$

II) Primitives des fonctions rationnelles en sinus et cosinus.

DEF : une fonction de deux variables est dite rationnelle si lorsqu'on fixe une variable (et quelles que soient les façons de le faire), la fonction d'une variable obtenue est rationnelle.

Soit donc à déterminer $\int f(\cos x, \sin x) dx$ avec f rationnelle.

On dispose des règles dites de Bioche :

* Premier cas : si l'élément différentiel $f(\cos x, \sin x) dx$ est invariant par le changement $x \rightarrow \pi - x$, poser $u = \sin x$.

Explication : on a $f(-\cos x, \sin x) = -f(\cos x, \sin x)$, f est donc impaire par rapport à sa première variable et l'on pourra alors toujours écrire $f(\cos x, \sin x) = \cos x \cdot g(\cos^2 x, \sin^2 x)$ avec g rationnelle ; alors

$$\int f(\cos x, \sin x) dx = \int g(\cos^2 x, \sin^2 x) \cos x dx = \int g(1 - u^2, u) du$$

et on tombe sur une fraction rationnelle en u , qui s'intègre.

* Deuxième cas : si l'élément différentiel $f(\cos x, \sin x) dx$ est invariant par le changement $x \rightarrow -x$, poser $u = \cos x$.

Explication : on a $f(\cos x, -\sin x) = -f(\cos x, \sin x)$, f est donc impaire par rapport à sa deuxième variable et l'on pourra alors toujours écrire $f(\cos x, \sin x) = \sin x \cdot g(\cos x, \sin^2 x)$ avec g rationnelle ; alors

$$\int f(\cos x, \sin x) dx = \int g(\cos x, \sin^2 x) \sin x dx = - \int g(u, 1 - u^2) du$$

et on tombe sur une fraction rationnelle en u , qui s'intègre.

* Troisième cas : si l'élément différentiel $f(\cos x, \sin x) dx$ est invariant par le changement $x \rightarrow x + \pi$, poser $u = \tan x$.

Explication : on a $f(-\cos x, -\sin x) = f(\cos x, \sin x)$, et l'on démontre que l'on pourra alors toujours écrire $f(\cos x, \sin x) = g(\tan x)$ avec g rationnelle ; alors

$$\int f(\cos x, \sin x) dx = \int g(\tan x) dx = \int \frac{g(u)}{1 + u^2} du$$

et on tombe sur une fraction rationnelle en u , qui s'intègre.

ATTENTION : la primitive obtenue ne sera valable que sur $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$; si $\frac{\pi}{2}$ est dans l'intervalle d'intégration, on peut aussi poser $u = \cot x$, qui fonctionne de manière similaire.

* si aucun des cas précédent n'a fonctionné, poser $u = \tan \frac{x}{2}$, changement fonctionnant dans tous les cas.

Explication :

$$\int f(\cos x, \sin x) dx = \int f\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2}\right) \frac{2du}{1 + u^2}$$

et on tombe sur une fraction rationnelle en u , qui s'intègre.

ATTENTION : la primitive obtenue ne sera valable que sur $]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$; si π est dans l'intervalle d'intégration, on peut aussi poser $u = \cot \frac{x}{2}$, qui fonctionne de manière similaire.

III) Primitives des fonctions rationnelles en exponentielle.

Soit à déterminer $\int f(e^x) dx$ avec f rationnelle : poser $u = e^x$.

Explication :

$$\int f(e^x) dx = \int f(u) \frac{du}{u}$$

et on tombe sur une fraction rationnelle en u , qui s'intègre.

REM : ce cas englobe celui des fonctions rationnelles en cosinus hyperbolique et en sinus hyperbolique.

IV) Primitives des fonctions rationnelles en x et en $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Soit à déterminer $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ avec f rationnelle : poser $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Explication : $u^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, donc $x = \frac{b - du^n}{cu^n - a} = g(u)$ avec g rationnelle, et donc

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int f(g(u), u) g'(u) du$$

et on tombe sur une fraction rationnelle en u , qui s'intègre.

V) Primitives des fonctions rationnelles en x et en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Soit à déterminer $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ avec f rationnelle, et $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ (pourquoi le cas $\Delta = 0$ est-il évident ?)

Première étape : mettre $ax^2 + bx + c$ sous sa forme canonique $\frac{1}{4a} \left((2ax + b)^2 - \Delta \right)$ et poser $u = \frac{2ax + b}{\sqrt{|\Delta|}}$; il y a alors 3 cas

Premier cas : $\Delta > 0$ et $a > 0$: on obtient $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int g(u, \sqrt{u^2 - 1}) du$: poser alors $v = \operatorname{argch} \varepsilon u$ ($\varepsilon = \pm 1$), d'où $u = \varepsilon \operatorname{ch} v$ et $du = \varepsilon \operatorname{sh} v dv$, soit

$$\int g(u, \sqrt{u^2 - 1}) du = \int g(\varepsilon \operatorname{ch} v, \operatorname{sh} v) \varepsilon \operatorname{sh} v dv$$

et on, est ramené au III)

Deuxième cas : $\Delta > 0$ et $a < 0$: on obtient $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int g(u, \sqrt{1 - u^2}) du$: poser alors $v = \operatorname{arcsin} u$, d'où $u = \sin v$ et $du = \cos v dv$, soit

$$\int g(u, \sqrt{1 - u^2}) du = \int g(\sin v, \cos v) \cos v dv$$

et on, est ramené au II)

Troisième cas : $\Delta < 0$ et $a > 0$: on obtient $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int g(u, \sqrt{1 + u^2}) du$: poser alors $v = \operatorname{arg} \sinh u$, d'où $u = \sinh v$ et $du = \cosh v dv$, soit

$$\int g(u, \sqrt{1 + u^2}) du = \int g(\sinh v, \cosh v) \cosh v dv$$

et on, est ramené au III)