

II) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Dans tout ce chapitre f désigne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1) Définition générale.

Données : x_0 et l des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (on n'impose pas que x_0 appartienne à D_f) ;

on dit que f a pour *limite* l en x_0 (ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x tend vers x_0 , ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0) si pour tout voisinage W de l , il existe un voisinage V de x_0 tel que si x est dans V , et f définie en x , alors $f(x)$ est dans W , de manière imagée : $f(x)$ peut être rendu aussi voisin qu'on veut de l , à condition de prendre x assez voisin de x_0 :

$$\forall W \text{ voisinage de } l \quad \exists V \text{ voisinage de } x_0 / \forall x \in D_f \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in W$$

Soit de la manière la plus condensée possible :

$$\forall W \in \mathcal{V}(l) \quad \exists V \in \mathcal{V}(x_0) / f(V \cap D_f) \subset W$$

Notations : $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ou $f \xrightarrow{x_0} l$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$.

PROP (unicité de la limite en un point adhérent à l'ensemble de définition) :

Si tout voisinage de x_0 rencontre D_f (c'est-à-dire que leur intersection est non vide, - on dit alors que x_0 est *adhérent* à D_f) alors il y a unicité de la limite éventuelle de f en x_0 .

REM 1: ceci justifie la notation fonctionnelle $\lim_{x_0} f$.

REM 2 : si x_0 n'est pas adhérent à D_f tout élément l pourrait être limite de f en x_0 ; on ne considérera donc que des limites en des points adhérents à D_f : le fait d'écrire $l = \lim_{x_0} f$ suppose donc que x_0 est adhérent à D_f .

2) Traduction dans les cas de points finis ou infinis.

PROP : la définition générale de $l = \lim_{x_0} f$ ci-dessus se traduit des façons suivantes :

	l fini	$l = +\infty$	$l = -\infty$
x_0 fini	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D_f$ $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\Rightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D_f$ $ x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$		
$x_0 = +\infty$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in D_f$ $x \in]A, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in D_f$ $x > A \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$		
$x_0 = -\infty$			

Exemple : une fonction constante admet sa valeur constante comme limite en tout point.

Autres exemples : E1

REMARQUE : la définition ci-dessus englobe le cas des suites qui sont des fonctions (très) particulières ; par exemple, la définition ci-dessus donne, pour $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad n > A \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

qui est bien équivalent à la définition classique :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \geq n_0 \quad \forall n \geq n_1 \quad |u_n - l| < \varepsilon$$

(prendre $n_1 = \max(n_0, \overline{E}(A))$ dans un sens et $A = n_0 + 1$ dans l'autre).

3) Limite restreinte, limite stricte, limite à droite ou à gauche.

a) Limite restreinte

DEF : si A est une partie de \mathbb{R} , x_0 et l des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ avec x_0 adhérent à $D_f \cap A$, on dit que f admet pour A -limite l , ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x tend vers x_0 en restant dans A si la restriction de f à $D_f \cap A$ possède pour limite l , autrement dit :

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \ \exists V \text{ voisinage de } x_0 / \forall x \in D_f \cap A \ x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

On écrit : $l = \lim_{x \xrightarrow{A} x_0} f|_A = \lim_{x \xrightarrow{A} x_0} f(x)$, ou $f|_A \xrightarrow{x_0} l$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \xrightarrow{A} x_0} l$.

PROP : si f admet pour A -limite l en x_0 , alors elle admet pour A' -limite l pour tout A' inclus dans A tel que x_0 soit adhérent à $D_f \cap A'$:

$$\text{si (H) : } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \xrightarrow{A} x_0} f(x) = l \\ A' \subset A \\ x_0 \text{ adhérent à } A' \end{array} \right. \text{ alors (C) : } \boxed{\lim_{x \xrightarrow{A'} x_0} f(x) = l}$$

REM : ce théorème est l'analogie pour les fonctions de celui des sous-suites pour les suites ; il sert principalement à montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

Application A1 : cos et sin n'admettent pas de limite en $+\infty$, la fonction signe n'admet pas de limite en 0, la fonction de Dirichlet δ n'admet de limite en aucun point.

PROP : si $\lim_{x \xrightarrow{A_1} x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \xrightarrow{A_2} x_0} f(x) = l_2$ alors $\lim_{x \xrightarrow{A_1 \cup A_2} x_0} f(x)$ existe ssi $l_1 = l_2$.

b) Limite stricte.

DEF : si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à $D_f \setminus \{x_0\}$, on dit que f admet pour limite *stricte* l , ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x tend vers x_0 en restant différent de x_0 si f admet pour A -limite l avec $A = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, autrement dit

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \ \exists V \text{ voisinage de } x_0 / \forall x \neq x_0 \in D_f \ x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

On écrit $l = \lim_{x \xrightarrow{\neq} x_0} f(x)$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \xrightarrow{\neq} x_0} l$.

Exemple : la fonction nulle en tout point sauf en 0 où elle prend la valeur 1 n'admet pas de limite en 0, mais elle admet 0 pour limite stricte en 0.

c) Limites à droite et à gauche.

DEF :

- limite à droite : si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à $D_f \cap [x_0, +\infty[$, on dit que f admet pour limite à *droite* l , ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x tend vers x_0 en restant $\geq x_0$, si f admet pour A -limite l avec $A = [x_0, +\infty[$, autrement dit :

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \ \exists V \text{ voisinage de } x_0 / \forall x \geq x_0 \in D_f \ x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

- limite à gauche : si x_0 et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à $D_f \cap]-\infty, x_0]$, on dit que f admet pour limite à *gauche* l , ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x tend vers x_0 en restant $\leq x_0$, si f admet pour A -limite l avec $A =]-\infty, x_0]$, autrement dit :

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \ \exists V \text{ voisinage de } x_0 / \forall x \leq x_0 \in D_f \ x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

On définit de manière similaire des limites strictes à droite ou à gauche ; sans utiliser les voisinages, ces diverses définitions prennent 12 formes différentes :

	l fini	$l = +\infty$	$l = -\infty$
$l = \lim_{x \not\rightarrow x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f$ $0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$		
$l = \lim_{x \xrightarrow{\geq} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f$ $\Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$		
$l = \lim_{x \xrightarrow{\leq} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f$ $\Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$		
$l = \lim_{x \xrightarrow{\leq} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f$ $\Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$		
$l = \lim_{x \xrightarrow{\geq} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f$ $\Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$		

Exemples E2

PROP (application directe de la dernière prop de α) : si $\lim_{x \xrightarrow{\leq} x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \xrightarrow{\geq} x_0} f(x) = l_2$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe ssi $l_1 = l_2$, et de même si $\lim_{x \xrightarrow{\geq} x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \xrightarrow{\leq} x_0} f(x) = l_2$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe ssi $l_1 = l_2$.

4) Propriétés des limites.

REM : toutes ces propriétés, mis à part le théorème de composition des limites, sont des généralisations de propriétés vues pour les suites.

a) Opérations.

PROP 1 (théorème de limite de somme pour les fonctions) :

$$\text{si } (H) : \begin{cases} \lim_{x_0} f = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x_0} g = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ alors } (C) : \lim_{x_0} (f + g) = l_1 + l_2$$

PROP 2 : une fonction ayant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

PROP 3 : (théorème de limite de produit pour les fonctions) :

$$\text{si } (H) : \begin{cases} \lim_{x_0} f = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x_0} g = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ alors } (C) : \lim_{x_0} (fg) = l_1 l_2$$

CORO :

$$\text{si } (H) : \lim_{x_0} f = l \in \mathbb{R} \text{ alors } (C) : \forall \lambda \in \mathbb{R} \lim_{x_0} \lambda f = \lambda l$$

PROP 4 : (théorème de limite de l'inverse d'une fonction de limite non nulle) :

$$\text{si } (H) : \lim_{x_0} f = l \neq 0 \in \mathbb{R} \text{ alors } (C) : \begin{cases} 1. |f| \text{ est, au voisinage de } x_0, \text{ minoré par un réel strictement positif} \\ \text{(donc } x_0 \text{ est adhérent à } D_{\frac{1}{f}} \text{)} \\ 2. \lim_{x_0} \left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{l} \end{cases}$$

CORO (de PROP 3 et 4) :

$$\text{si } (H) : \begin{cases} \lim_{x_0} f = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x_0} g = l_2 \neq 0 \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ alors } (C) : \lim_{x_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{l_1}{l_2}$$

PROP 5 (limite infinie d'une somme ou d'un produit de fonctions) :

si $\lim_{x_0} f =$	et si g	alors $\lim_{x_0} (f + g) =$	alors $\lim_{x_0} (fg) =$
$+\infty$	est minorée au voisinage de x_0	$+\infty$???
$+\infty$	est minorée par un réel > 0 au voisinage de x_0	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	est majorée au voisinage de x_0	$-\infty$???
$-\infty$	est minorée par un réel > 0 au voisinage de x_0	???	$-\infty$

PROP 6 (limite infinie ou nulle de l'inverse) : si $f(x)$ est $\neq 0$ au voisinage de x_0 , alors

$$\lim_{x_0} f = 0 \Leftrightarrow \lim_{x_0} \frac{1}{|f|} = +\infty$$

$$\lim_{x_0} f = +\infty \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ au voisinage de } x_0 \text{ et } \lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$$

PROP 7 (théorème de composition des limites) :

$$\text{si (H) : } \begin{cases} \lim_{x_0} f = l \\ \lim_{u_0} g = x_0 \\ u_0 \text{ adhérent à } D_{f \circ g} \end{cases} \quad \text{à} \quad \text{alors (C) : } \lim_{u_0} f \circ g = l$$

b) Inégalités.

PROP 8 (théorème de conservation des inégalités LARGES par passage à la limite finie, pour les fonctions) :

$$\text{si (H) : } \begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } x_0 \\ \lim_{x_0} f = l_1 \in \mathbb{R} ; \lim_{x_0} g = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{alors (C) : } l_1 \leq l_2$$

PROP 9 (théorème d'encadrement, ou "des gendarmes" pour les fonctions) : si

$$\text{(H) } \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } x_0 (i.e. \forall x \in D_f \cap V) \\ \lim_{x_0} g = \lim_{x_0} h = l \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{alors (C) : } \lim_{x_0} f = l$$

PROP 10 (théorème du gendarme pour une fonction de limite infinie) :

Une fonction $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \end{cases}$ au voisinage de x_0 par une fonction de limite $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ est elle-même de limite $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$.

II) COMPARAISONS DES FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT.

Dans tout ce chapitre f et g désignent des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , x_0 un point adhérent à $D = D_f \cap D_g$.

"Au voisinage de x_0 , $P(x)$ " signifie qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que $P(x)$ est vraie pour tout x de $V \cap D$.

1) Fonction négligeable devant une autre.

a) Définitions.

DEF : on dit que f est *négligeable* devant g , ou que g l'*emporte* sur f , s'il existe une fonction ε , telle que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x) \text{ avec } \lim_{x_0} \varepsilon = 0$$

NOTATIONS : $f \ll_{x_0} g$ ou $f(x) \ll_{x \rightarrow x_0} g(x)$, ou $f = o_{x_0}(g)$, $f(x) = o_{x_0}(g(x))$, simplifié en général en $f(x) = o(g(x))$ quand il n'y a pas ambiguïté.

REM : si $f(x)$ et $g(x)$ sont non nuls au voisinage de x_0 , la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$f \ll_{x_0} g \Leftrightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{x_0} 0, \text{ ou encore : } \left| \frac{g}{f} \right| \xrightarrow{x_0} +\infty$$

b) Propriétés de la relation de négligeabilité :

P1 : $f \ll_{x_0} g \Leftrightarrow |f| \ll_{x_0} |g|$, d'où $o(f(x)) = o(|f(x)|)$

P2 : $f(x) = o(1)$ (ou $f \ll_{x_0} 1$) $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$

P3 : si (H) : $\begin{cases} f(x) = g(x) + o(g(x)) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g = l \end{cases}$ alors (C) : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$

P4 transitivité : $o(o(f(x))) = o(f(x))$

autrement dit : si (H) : $h \ll g$ et $g \ll f$ alors (C) : $h \ll f$

P5 : Comparaison entre $<$ et \ll

1. $f(x) < g(x)$ au voisinage de $x_0 \not\Rightarrow f(x) \ll_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $f(x) \ll_{x \rightarrow x_0} g(x) \not\Rightarrow f(x) < g(x)$, même au voisinage de x_0
3. Par contre : $f(x) \ll_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x) $ au voisinage de x_0

P6 : Multiplicativité : $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$ et $o(f(x)g(x)) = f(x) \cdot o(g(x))$

P7 : Compatibilité avec la somme : $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$

P8 : $\lambda o(f(x)) = o(f(x))$ et $o(\lambda f(x)) = o(f(x))$

P9 : si $f(x)$ et $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 , alors $f \ll_{x_0} g \Leftrightarrow \frac{1}{g} \ll_{x_0} \frac{1}{f}$

c) Exemples classiques à bien connaître.

1. : si $\alpha < \beta$ $x^\alpha (\ln x)^\gamma \ll_{x \rightarrow +\infty} x^\beta (\ln x)^\delta$ ceci $\forall \gamma, \delta$
2. si $\alpha > \beta$ $x^\alpha \ln x ^\gamma \ll_{x \rightarrow 0} x^\beta \ln x ^\delta$ ceci $\forall \gamma, \delta$
3. $x^\alpha (\ln x)^\gamma \ll_{x \rightarrow +\infty} e^x$ ceci $\forall \alpha, \gamma$
4. $e^x \ll_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha$ ceci $\forall \alpha$

D2

2) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point.

a) Définitions.

DEF : on dit que f est *équivalente* à g en x_0 , s'il existe une fonction h , telle que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = h(x)g(x) , \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} h = 1$$

NOTATION : $f \sim_{x_0} g$ ou $f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$ s'il n'y a pas ambiguïté.

REM1 : si $f(x)$ et $g(x)$ sont non nuls au voisinage de x_0 , la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{x_0} 1$$

REM 2 : on peut aussi écrire la définition sous les formes très utiles :

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = (1 + o(1))g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = o(g(x))$$

b) Propriétés.

P10 : la relation d'équivalence des fonctions au voisinage de x_0 est une relation d'équivalence (i.e. réflexive, symétrique et transitive)..

P11 :
$$\frac{\text{si } l \neq 0, f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} l \Leftrightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} l}{\text{par contre, } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ au voisinage de } x_0}$$

P12 : si (H) :
$$\left\{ \begin{array}{l} f \underset{x_0}{\sim} g \\ \lim_{x_0} g = l \end{array} \right.$$
 alors (C) :
$$\lim_{x_0} f = l$$

P13 : Multiplicativité : si (H) :
$$f(x) \sim g(x)$$
 alors (C) :
$$h(x) f(x) \sim h(x) g(x)$$

d'où si (H) :
$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \sim g(x) \\ h(x) \sim k(x) \end{array} \right.$$
 alors (C) :
$$f(x) h(x) \sim g(x) k(x)$$

P14 :

si
$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ et } g(x) \neq 0 \text{ au voisinage de } x_0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } f(x) \text{ et } g(x) > 0 \text{ au voisinage de } x_0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$
 alors
$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow (f(x))^\alpha \sim (g(x))^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \text{en particulier : } \frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{g(x)}$$

P15 : (équivalent d'une composée) :

si
$$f(u) \underset{u \rightarrow u_0}{\sim} g(u) \text{ et } u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} u_0 \text{ alors } f(u(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(u(x))$$

P16 : (théorème des gendarmes pour les équivalents) :

si (H)
$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } x_0 \\ g(x) \sim h(x) \sim k(x) \end{array} \right.$$
 alors (C) :
$$f(x) \sim k(x)$$

QUE FAIRE EN FACE D'UNE SOMME ?

si
$$f(x) \ll g(x) \text{ alors } (f(x) + g(x)) \sim g(x)$$

Autrement dit si l'une l'emporte sur l'autre; l'équivalent c'est celui qui l'emporte.

si
$$f(x) \sim \lambda h(x) \text{ et } g(x) \sim \mu h(x) \text{ alors } (f(x) + g(x)) \sim (\lambda + \mu) h(x) \text{ SAUF SI } \lambda + \mu = 0$$

dans ce dernier cas il faut développer $f(x)$ et $g(x)$ avec au moins deux termes.

c) Équivalents classiques.

- une fonction polynôme est équivalente en $+\infty$ à sa fonction monôme de plus haut degré et en 0 à celle de plus bas degré.

$$\sum_{k=p}^n a_k x^k \left\{ \begin{array}{l} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n \text{ si } a_n \neq 0 \\ \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p \text{ si } a_p \neq 0 \end{array} \right.$$

- plus généralement :

$$\sum_{k=1}^n a_k x^{\alpha_k} (\ln x)^{\beta_k} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^{\alpha_n} (\ln x)^{\beta_n} \text{ si } \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \text{ et } a_n \neq 0$$

-
$$\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \tan u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \text{sh } u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$$

D3

-
$$1 - \cos u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$$

D4 $\boxed{(1+u)^\alpha - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \alpha u}$

D5 $\boxed{\sin u = u + o(u)}, \boxed{\tan u = u + o(u)}, \boxed{\ln(1+u) = u + o(u)}, \boxed{e^u = 1 + u + o(u)},$
 $\boxed{\operatorname{sh} u = u + o(u)}, \boxed{\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)}, \boxed{(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)}.$

REM : écrire $\cos u = 1 + o(u)$ suffit souvent.

PAR CONTRE, ÉCRIRE $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$, qui n'est pas faux, NE SIGNIFIE PAS AUTRE CHOSE QUE $\cos u \underset{u \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$; $\cos u \sim 1 + 18u^2$ est tout aussi exact !!!!

3) Fonction dominée par une autre au voisinage d'un point.

DEF : on dit que f est *dominée* par g au voisinage de x_0 , s'il existe une fonction b , telle que, au voisinage de x_0 ,

$$\boxed{f(x) = b(x)g(x) \text{ avec } b \text{ bornée au voisinage de } x_0}$$

NOTATION : $f(x) = O(g(x))$.

REM : si $f(x)$ et $g(x)$ sont non nuls au voisinage de x_0 , la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\boxed{f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right) \text{ est bornée au voisinage de } x_0 \Leftrightarrow \left(\left|\frac{f}{g}\right|\right) \text{ est majorée au voisinage de } x_0}$$

III) CONTINUITÉ EN UN POINT.

a) Définition.

DEF : f est $\begin{cases} \text{continue} \\ \text{continue à gauche} \\ \text{continue à droite} \end{cases}$ en un point x_0 de son ensemble de définition si $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x \overset{\leq}{\rightarrow} x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x \overset{\geq}{\rightarrow} x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$, autrement

dit, si $\forall \dots \exists \dots \forall \dots, \left\{ \begin{matrix} (\dots) \\ (\dots) \\ (\dots) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \dots$

REM : en fait, f est continue en $x_0 \in D_f$ ssi elle possède une limite en x_0 , car cette limite (au sens large) ne peut être que $f(x_0)$.

Par contre, on peut avoir $\lim_{x \neq x_0} f(x) \neq f(x_0)$ et, si x_0 est adhérent à $\begin{cases} D_f \setminus \{x_0\} \\ D_f \cap]x_0, +\infty[\\ D_f \cap]-\infty, x_0[\end{cases}$, f est $\begin{cases} \text{continue} \\ \text{continue à gauche} \\ \text{continue à droite} \end{cases}$ en

x_0 ssi $\begin{cases} \lim_{x \neq x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x \overset{\leq}{\rightarrow} x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x \overset{\geq}{\rightarrow} x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}.$

b) Propriétés.

PROP : f est continue en $x_0 \in D_f$ ssi elle y est continue à gauche et à droite.

PROP : toute somme, produit, quotient, composée de fonctions continues est continue ; plus précisément :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : f + g \text{ et } fg \text{ sont continues en } x_0}$$

si $\boxed{\text{(H)} : f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0, \text{ avec } g(x_0) \neq 0}$ alors $\boxed{\text{(C)} : \frac{f}{g} \text{ est continue en } x_0}$
 si $\boxed{\text{(H)} : f \text{ est continue en } x_0 \text{ et } g \text{ est continue en } f(x_0)}$ alors $\boxed{\text{(C)} : g \circ f \text{ est continue en } x_0}$

REM : on a les mêmes propriétés pour la *continuité à gauche, ou à droite.*

c) Exemples de fonctions continues.

E2

d) Prolongement par continuité.

PROP et DEF : si $x_0 \notin D_f$ mais est adhérent à D_f , et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l \in \mathbb{R}$, la fonction \tilde{f} , définie par $\tilde{f}(x_0) = l$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in D_f$ est continue en x_0 ; cette fonction s'appelle le *prolongement par continuité* de f en x_0 .

Exemples E3

Remarque importante : lorsque vous devrez étudier une fonction, il faudra automatiquement la prolonger par continuité au points adhérents à l'ensemble de définition (si le cas se présente), et c'est cette fonction prolongée que vous devrez étudier.

e) Caractérisation séquentielle des limites et de la continuité.

REM : "séquentiel" est un anglicisme ; "suite" se dit en anglais "sequence".

TH : pour x_0 et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à D_f , $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f$ ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de D_f de limite x_0 , $\lim f(u_n) = l$.

D5 (dans le cas x_0 et l finis)

Exemples d'applications E4.

CORO : f est continue en x_0 ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de D_f de limite x_0 , $\lim f(u_n) = f(x_0)$.

IV) CONTINUITÉ GLOBALE

1) GÉNÉRALITÉS.

a) Fonction continue sur une partie de \mathbb{R} .

DEF : soit I une partie de D_f ; on dit que f est continue sur I si la restriction de f à I est continue en chaque point de I , autrement dit si

$$\forall x_0 \in I \quad \lim_{x \xrightarrow{I} x_0} f(x) = f(x_0)$$

soit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, x_0 \in I \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Remarquer qu'ici, le α dépend de ε et de x_0 .

b) Fonction *uniformément* continue sur une partie de \mathbb{R} .

DEF : on dit que f est *uniformément* continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, x_0 \in I \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

CNS à partir des suites : f est uniformément continue sur I ssi pour toutes suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I

$$\lim (u_n - v_n) = 0 \Rightarrow \lim (f(u_n) - f(v_n)) = 0$$

(alors que f est continue sur I ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de I

$$\lim u_n = l \in I \Rightarrow \lim f(u_n) = f(l)$$

D6

PROP : f lipschitzienne sur $I \Rightarrow f$ uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ continue sur I , mais les réciproques sont fausses.

D7

REM : on en déduit que si I est un intervalle et si f lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I alors f est continue sur I . Là encore, la réciproque est fausse.

c) Fonction continue sur un segment.

TH (de Heine) : toute fonction continue sur un segment de \mathbb{R} est uniformément continue sur ce segment.

D8

2) THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.

a) Divers énoncés du théorème.

THÉORÈME (forme 1 du théorème des valeurs intermédiaires, appelée aussi "lemme de Bolzano") :

Une fonction continue sur un intervalle ne peut changer de signe sans s'annuler ; plus précisément :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f(a)f(b) \leq 0 \end{cases}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \exists c \in [a, b] / f(c) = 0}$$

D9

COROLLAIRE (forme 2, habituelle, du théorème des valeurs intermédiaires) :

Une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires ; plus précisément :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : f \text{ est continue sur } [a, b]} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \forall y_0 \in [f(a), f(b)] \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = y_0}$$

D10

REM : (C) s'écrit plus simplement sous la forme : $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.

COROLLAIRE (forme 3 du théorème des valeurs intermédiaires) :

L'image continue réelle d'un intervalle de \mathbb{R} est un intervalle de \mathbb{R} ; plus précisément :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ I \text{ est un intervalle} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : f(I) \text{ est un intervalle}}$$

D11

b) Applications

A1 : si f est continue sur un intervalle I et si f change de signe sur I alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans I .

A2 : si f est continue sur intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$ et si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) < 0$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) > 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < 0$), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$; si de plus f est strictement monotone sur I , cette solution est unique.

D12

A3 : si n est pair, tout réel ≥ 0 possède une unique racine n -ième ≥ 0 ; si n est impair, tout réel possède une unique racine n -ième réelle.

D13

Notation : $\sqrt[n]{x}$.

A4 : tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle (ou toute équation polynomiale à coefficients réels possède au moins une solution réelle).

D14

A5 (définition de e) : il existe un unique réel $x > 1$ tel que $\ln x = 1$.

D15

A6 : le problème du randonneur : un randonneur part un jour J de la vallée à 8 heures et monte à un refuge; le jour $J + 1$, il part du refuge à 8 heures et redescend par le même chemin ; démontrer qu'il existe un point de son chemin où il est passé la veille exactement à la même heure.

D16

A7 : TH de monotonie d'une fonction continue injective :

Une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} **injective** sur un **intervalle** I et **continue** sur I est strictement monotone sur I .

REM : Bien voir que ce théorème devient faux si l'on ôte l'une des 3 hypothèses en gras.

D17

Démonstration n°1 :

1ère étape : montrer que si $a < b < c$ appartiennent à I , alors soit $f(a) < f(b) < f(c)$, soit $f(a) > f(b) > f(c)$.

2ème étape : montrer que f est croissante ou décroissante.

Démonstration n° 2:

Hypothèse $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } I \text{ intervalle} \\ \forall x, y \in I \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \end{array} \right.$

Soient x_0 et y_0 dans I avec $x_0 < y_0$; alors, soit $f(x_0) < f(y_0)$, soit $f(x_0) > f(y_0)$: on va se placer dans le premier cas et montrer que f est croissante (de la même façon, on montrerait que f est décroissante dans le deuxième).

Soient $x_1 < y_1 \in I$: le but est de démontrer que $f(x_1) < f(y_1)$;

Pour $t \in [0, 1]$, posons $\begin{cases} x(t) = tx_1 + (1-t)x_0 = \text{bar}((x_1, t), (x_0, 1-t)) \\ y(t) = ty_1 + (1-t)y_0 = \text{bar}((y_1, t), (y_0, 1-t)) \end{cases}$

Comme I est un intervalle, $x(t)$ et $y(t)$ appartiennent toujours à I .

Posons enfin $g(t) = f(y(t)) - f(x(t))$; g est continue sur $[0, 1]$ et $g(0) = f(y_0) - f(x_0) > 0$

Or $\begin{cases} x_1 < y_1 \\ x_0 < y_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) < y(t) \quad \forall t \in [0, 1]$; la propriété d'injectivité de f montre alors que g ne s'annule jamais sur $[0, 1]$; par le théorème des valeurs intermédiaires on déduit alors que $g(1) = f(y_1) - f(x_1) > 0$: on bien montré que f est strictement croissante.

A8 : si f est continue sur l'intervalle I et $\alpha = \inf_{x \in I} f(x)$, $\beta = \sup_{x \in I} f(x)$, alors

$$] \alpha, \beta [\subset f(I) \subset [\alpha, \beta]$$

D18

c) Type de l'intervalle $f(I)$ en fonction du type de I .

Remarquons que l'image continue d'un intervalle ouvert est un intervalle qui peut être de n'importe quel type.

D19

On a par contre le

THÉORÈME DE WEIERSTRASS :

L'image continue d'un segment est un segment ; plus précisément :

si $\boxed{\text{(H)} : f \text{ est continue sur } [a, b]}$ alors $\boxed{\text{(C)} : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / f([a, b]) = [\alpha, \beta]}$

REMARQUE : ce théorème peut aussi se mettre sous la forme :

$$\text{si } (H) : \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \alpha = \inf_{x \in I} f(x), \beta = \sup_{x \in I} f(x) \end{cases} \text{ alors } (C) : \begin{cases} 1. \alpha, \beta \text{ sont réels (autrement dit, } f \text{ est bornée)} \\ 2. \alpha, \beta \in f([a, b]) \text{ (autrement dit, } f \text{ "atteint ses bornes")} \end{cases}$$

On dit donc couramment : "une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes".

D20

1ère démonstration hors programme utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

2ème démonstration (partielle) : soit c la borne supérieure des réels u de $[a, b]$ tels que f soit bornée sur $[a, b]$; on montre que $c = b$.

De plus les choses se passent également bien quand la fonction est strictement monotone :

PROP : si f est strictement monotone et continue sur l'intervalle I , alors I et $f(I)$ sont de même type ; plus précisément, si f est continue sur I et $a < b$:

	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$I = [a, b]$	$f(I) =] \cdot$	$f(I) = [\cdot$
$I =]a, b]$	$f(I) = [\cdot$	$f(I) =] \cdot$
$I = [a, b[$	$f(I) =] \cdot$	$f(I) = [\cdot$
$I =]a, b[$	$f(I) = [\cdot$	$f(I) =] \cdot$

IV) LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS MONOTONES, FONCTIONS RÉCIPROQUES.

1) Théorème de la limite monotone.

TH 1 : soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} monotone sur un ensemble I , $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ dont tout voisinage strict $\left\{ \begin{array}{l} \text{à gauche} \\ \text{à droite} \end{array} \right.$ rencontre I ; alors f possède une limite (finie ou infinie) stricte $\left\{ \begin{array}{l} \text{à gauche} \\ \text{à droite} \end{array} \right.$ en x_0 et

si f est croissante, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\substack{x \in I \\ x < x_0}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\substack{x \in I \\ x > x_0}} f(x)$
si f est décroissante, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\substack{x \in I \\ x < x_0}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\substack{x \in I \\ x > x_0}} f(x)$

D21

Exemple : si f est monotone sur $]0, +\infty[$, on sait grâce à ce théorème que f admet une limite stricte à droite en 0, une limite stricte à droite et à gauche en tout point > 0 et une limite en $+\infty$.

2) Théorème de continuité d'une fonction monotone.

TH 2 : Une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} **monotone** sur un ensemble I tel que $f(I)$ soit un **intervalle** est continue sur I .

REM : Bien voir que ce théorème devient faux si l'on ôte l'une des 2 hypothèses en gras.

D22

Démonstration :

Hypothèse $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est croissante sur } I \text{ (preuve similaire pour } f \text{ décroissante)} \\ J = f(I) \text{ est un intervalle} \end{array} \right.$

Soit $x_0 \in I$ dont tout voisinage strict à gauche rencontre I ; d'après le théorème de la limite monotone

$$l = \sup_{\substack{x \in I \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Remarquons que $l \in J$ puisqu'il est supérieur à au moins un élément de J et inférieur à $f(x_0) \in J$ car f est croissante.

Si l était strictement inférieur à $f(x_0)$, aucun élément de $]l, f(x_0)[$ n'aurait d'antécédent par f , ce qui contredirait le fait que J est un intervalle.

Donc $f(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ et $f|_I$ est continue à gauche en x_0 ; on procède de même à droite : f est donc continue sur I .

3) Application aux fonctions réciproques.

TH 3 Continuité d'une fonction réciproque.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} **continue** et injective sur un **intervalle** I et soit f^{-1} sa fonction réciproque sur I , définie

sur $J = f(I)$; alors

- | |
|---|
| 1. f et f^{-1} sont strictement monotones de mêmes sens |
| 2. f^{-1} est continue sur J |

D23