IV.1) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Dans tout ce chapitre f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
La notation $\overline{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

1) Définition générale intuitive (une définition précise sera donnée dans le cours d'analyse niveau 2)

Données : x_0 et l des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (on n'impose pas que x_0 appartienne à D_f) ;
on dit que f a pour *limite* l *en* x_0 (ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0, ou encore que $f(x)$ *tend vers* l quand x *tend vers* x_0) si $f(x)$ peut être rendu aussi voisin qu'on veut de l, à condition de prendre x assez voisin de x_0.

Notations : $l = \lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ou $f \underset{x_0}{\to} l$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$.

2) Limite restreinte, limite stricte, limite à droite ou à gauche.

a) Limite restreinte

DEF : si A est une partie de $\mathbb{R}$, x_0 et l des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, on dit que f admet pour A-limite l, ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0 *en restant dans* A si la restriction de f à $D_f \cap A$ possède l pour limite .

On écrit : $l = \lim\limits_{x_0} f_{|A} = \lim\limits_{x \overset{x \in A}{\to} x_0} f(x)$, ou $f_{|A} \underset{x_0}{\to} l$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{x\in A}{\to} x_0}{\longrightarrow} l$.

PROP : si f admet pour A-limite l en x_0, alors elle admet pour A'-limite l pour tout A' inclus dans A:

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} \lim\limits_{x \overset{x\in A}{\to} x_0} f(x) = l \\ A' \subset A \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim\limits_{x \overset{x\in A'}{\to} x_0} f(x) = l}$$

REM : ce théorème sert principalement à montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

Application A1 : cos et sin n'admettent pas de limite en $+\infty$, la fonction signe n'admet pas de limite en 0.

b) Limite stricte.

DEF : si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à $D_f \setminus \{x_0\}$, on dit que f admet pour limite *stricte* l, ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0 *en restant différent* de x_0 si f admet pour A-limite l avec $A = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

On écrit $l = \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} f(x)$, ou encore $f(x) \underset{x \overset{\neq}{\to} x_0}{\longrightarrow} l$.

Exemple : la fonction nulle en tout point sauf en 0 où elle prend la valeur 1 n'admet *pas* de limite (au sens large) en 0, mais elle admet 0 pour limite *stricte* en 0.

c) Limites à droite et à gauche.

DEF :

- limite à droite : si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f admet pour limite *à droite* l, ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0 *en restant* $\geqslant x_0$, si f admet pour A-limite l avec $A = [x_0, +\infty[$.
- limite à gauche : si x_0 et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f admet pour limite *à gauche* l, ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0 *en restant* $\leqslant x_0$, si f admet pour A-limite l avec $A =]-\infty, x_0]$,

On définit de manière similaire des limites strictes à droite ou à gauche.

TH : si $\lim\limits_{x \overset{\leqslant}{\to} x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \overset{\geqslant}{\to} x_0} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

3) Propriétés des limites.

a) Opérations.

PROP 1 (théorème de limite de somme pour les fonctions) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} \lim\limits_{x_0} f = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x_0} g = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim\limits_{x_0} (f+g) = l_1 + l_2}$$

PROP 2 : (théorème de limite de produit pour les fonctions) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} \lim\limits_{x_0} f = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x_0} g = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim\limits_{x_0} (fg) = l_1 l_2}$$

CORO :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \lim_{x_0} f = l \in \mathbb{R}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \lim_{x_0} \lambda f = \lambda l}$$

PROP 3 : (théorème de limite de l'inverse d'une fonction de limite non nulle) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \lim_{x_0} f = l \neq 0 \in \mathbb{R}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim_{x_0} \left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{l}}$$

CORO (de PROP 3 et 4) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} \lim_{x_0} f = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x_0} g = l_2 \neq 0 \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim_{x_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{l_1}{l_2}}$$

PROP 4 (limite infinie d'une somme ou d'un produit de fonctions) :

si $\lim_{x_0} f =$	et si g	alors $\lim_{x_0} (f+g) =$	alors $\lim_{x_0} (fg) =$
$+\infty$	a une limite finie en x_0	$+\infty$	???
$+\infty$	a une limite finie >0 en x_0	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	a une limite finie en x_0	$-\infty$	???
$-\infty$	a une limite finie >0 en x_0	$-\infty$	$-\infty$

PROP 5 (limite infinie ou nulle de l'inverse) : si $f(x)$ est $\neq 0$ au voisinage de x_0, alors

$\lim_{x_0} f = 0 \Leftrightarrow \lim_{x_0} \frac{1}{\lvert f \rvert} = +\infty$
$\lim_{x_0} f = +\infty \Leftrightarrow f(x) > 0$ au voisinage de x_0 et $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$

PROP 6 (théorème de composition des limites) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} \lim_{x_0} f = l \\ \lim_{u_0} g = x_0 & \text{à} \\ u_0 \text{ adhérent à } D_{f\circ g} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim_{u_0} f \circ g = l}$$

b) Inégalités.

PROP 7 (théorème de conservation des inégalités LARGES par passage à la limite finie, pour les fonctions) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \\ \lim_{x_0} f = l_1 \in \mathbb{R} \ ; \lim_{x_0} g = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : l_1 \leqslant l_2}$$

PROP 8 (théorème d'encadrement, ou "des gendarmes" pour les fonctions) : si

$$\boxed{(\mathrm{H}) \begin{cases} g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim_{x_0} g = \lim_{x_0} h = l \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim_{x_0} f = l}$$

A1 : démonstration du fait que $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

D1

PROP 9 (théorème *du* gendarme pour une fonction de limite infinie) :

Une fonction $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \end{cases}$ par une fonction de limite $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ est elle-même de limite $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$.

c) Techniques pour lever une indétermination.

i) Technique du terme prépondérant.

Dans une somme, mettre en facteur le terme prépondérant ($f(x)$ est prépondérant sur $g(x)$ quand x tend vers x_0 si $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ tend vers 0 (ou $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ tend vers $+\infty$) ; en effet, dans ce cas :

$$f(x)+g(x)=f(x)\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right) \text{ a même limite que } f(x)$$

E1

ii) Technique de la quantité conjuguée.
Ecrire $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
E2 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
iii) utilisation de la PROP : $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\tan u}{u}=1$.
D2 : utilisant le LEMME :
Pour $0<u<\dfrac{\pi}{2}$, $\cos u\leqslant\dfrac{\sin u}{u}\leqslant 1$

IV.2) CONTINUITÉ EN UN POINT.
1) Définition.

DEF : f est $\left\{\begin{array}{l}\text{continue}\\ \text{continue à gauche}\\ \text{continue à droite}\end{array}\right.$ en un point x_0 de son ensemble de définition si $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\\ \lim\limits_{x\overset{\leqslant}{\to} x_0} f(x)=f(x_0)\\ \lim\limits_{x\overset{\geqslant}{\to} x_0} f(x)=f(x_0)\end{array}\right.$.

2) Propriétés.

PROP : f est continue en $x_0\in D_f$ ssi elle y est continue à gauche et à droite.

PROP : toute somme, produit, quotient, composée de fonctions continues est continue ; plus précisément :

si $\boxed{\text{(H) : } f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0}$ alors $\boxed{\text{(C) : } f+g \text{ et } fg \text{ sont continues en } x_0}$

si $\boxed{\text{(H) : } f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0\text{, avec } g(x_0)\neq 0}$ alors $\boxed{\text{(C) : } \dfrac{f}{g} \text{ est continue en } x_0}$

si $\boxed{\text{(H) : } f \text{ est continue en } x_0 \text{ et } g \text{ est continue en } f(x_0)}$ alors $\boxed{\text{(C) : } g\circ f \text{ est continue en } x_0}$

REM : on a les mêmes propriétés pour la *continuité à gauche, ou à droite.*
E3 : Exemples.
a) les fonctions polynomiales : continues partout,
b) les fonction rationnelles : continues en tout point où elles sont définies.
c) La fonction $\sqrt{\ }$: idem.
d) la fonction $|.|$ (valeur absolue) : continue partout.
e) Les fonctions sin, cos, tan : idem
f) les fonctions partie entière, partie fractionnaire ; discontinues en tout point entier, continues ailleurs.
D3
3) Prolongement par continuité.
PROP et DEF : si $x_0\notin D_f$, et si $\lim\limits_{x_0} f=l\in\mathbb{R}$, la fonction $\widetilde{f}$, définie par $\widetilde{f}(x_0)=l$ et $\widetilde{f}(x)=f(x)$ pour $x\in D_f$ est continue en x_0 ; cette fonction s'appelle le *prolongement par continuité* de f en x_0.

Exemple E4

Remarque importante : lorsque vous devrez étudier une fonction, il faudra automatiquement la prolonger par continuité aux bornes ouvertes des intervalles composant l'ensemble de définition (si le cas se présente), et c'est cette fonction prolongée que vous devrez étudier.

4) Continuité globale.

DEF : soit I une partie de D_f ; on dit que f est continue *sur* I si la restriction de f à I est continue en chaque point de I, autrement dit si

$$\forall x_0 \in I \quad \lim_{x \overset{x\in I}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$