II) COMPLÉMENTS SUR LES LIMITES.

Dans tout ce chapitre f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

RAPPEL : si I est une partie non vide de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{R}^I = \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication est :

- un anneau commutatif, non intègre dès que $|I| \geqslant 2$.

L'élément nul de cet anneau est 0_I : $\left\{\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}\right.$ et l'élément unité 1_I : $\left\{\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}\right.$.

- un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) Définition générale.

Données : x_0 et l des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (on n'impose pas que x_0 appartienne à D_f) ;

on dit que f a pour *limite* l *en* x_0 (ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0, ou encore que $f(x)$ *tend vers* l quand x *tend vers* x_0) si pour tout voisinage W de l, il existe un voisinage V de x_0 tel que si x est dans V, et f définie en x, alors $f(x)$ est dans W, de manière imagée : $f(x)$ peut être rendu aussi voisin qu'on veut de l, à condition de prendre x assez voisin de x_0 :

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \ \ \exists V \text{ voisinage de } x_0 \ / \ \forall x \in D_f \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

Soit de la manière la plus condensée possible :

$$\boxed{\forall W \in \mathcal{V}(l) \ \ \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \ / \ f(V \cap D_f) \subset W}$$

Notations : $l = \lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ou $f \underset{x_0}{\to} l$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} l$.

PROP (unicité de la limite en un point adhérent à l'ensemble de définition) :

Si tout voisinage de x_0 rencontre D_f (c'est-à dire que leur intersection est non vide, - on dit alors que x_0 est *adhérent* à D_f) alors il y a unicité de la limite éventuelle de f en x_0.

REM 1: ceci justifie la notation fonctionnelle $\lim\limits_{x_0} f$.

REM 2 : si x_0 n'est pas adhérent à D_f tout élément l pourrait être limite de f en x_0 ; on ne considérera donc que des limites en des points adhérents à D_f : le fait d'écrire $l = \lim\limits_{x_0} f$ suppose donc que x_0 est adhérent à D_f.

2) Traduction dans les cas de points finis ou infinis.

PROP : la définition générale de $l = \lim\limits_{x_0} f$ ci-dessus se traduit des façons suivantes :

	l fini	$l = +\infty$	$l = -\infty$
x_0 fini	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in D_f$ $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \Rightarrow f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in D_f$ $\|x - x_0\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon$		
$x_0 = +\infty$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0 \ \forall x \in D_f$ $x \in [A, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0 \ \forall x \in D_f$ $x \geqslant A \Rightarrow \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon$		
$x_0 = -\infty$			

Exemple : une fonction constante admet sa valeur constante comme limite en tout point.

Autres exemples : E1

REMARQUE : la définition ci-dessus englobe le cas des suites qui sont des fonctions (très) particulières ; par exemple, la définition ci-dessus donne, pour $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0 \ \forall n \geqslant n_0 \ \ n > A \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

qui est bien équivalent à la définition classique :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_1 \geqslant n_0 \;\; \forall n \geqslant n_1 \;\; |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

(prendre $n_1 = \max(n_0, \overline{E}(A))$ dans un sens et $A = n_0 + 1$ dans l'autre).

3) Limite restreinte, limite stricte, limite à droite ou à gauche.

a) Limite restreinte.

DEF : si A est une partie de $\mathbb{R}$, x_0 et l des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ avec x_0 adhérent à $D_f \cap A$, on dit que f admet pour A-limite l, ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0 *en restant dans* A si la restriction de f à $D_f \cap A$ possède pour limite l, autrement dit :

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \;\; \exists V \text{ voisinage de } x_0 \;/\; \forall x \in D_f \cap A \;\;\; x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

On écrit : $l = \lim\limits_{x_0} f_{|A} = \lim\limits_{x \overset{x\in A}{\to} x_0} f(x)$, ou $f_{|A} \underset{x_0}{\to} l$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{x\in A}{\to} x_0}{\to} l$.

PROP : si f admet pour A-limite l en x_0, alors elle admet pour A'-limite l pour tout A' inclus dans A tel que x_0 soit adhérent à $D_f \cap A'$:

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} \lim\limits_{x \overset{x\in A}{\to} x_0} f(x) = l \\ A' \subset A \\ x_0 \text{ adhérent à } A' \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim\limits_{x \overset{x\in A'}{\to} x_0} f(x) = l}$$

REM : ce théorème est l'analogue pour les fonctions de celui des sous-suites pour les suites ; il sert principalement à montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

Application A1 : cos et sin n'admettent pas de limite en $+\infty$, la fonction signe n'admet pas de limite en 0, la fonction de Dirichlet δ n'admet de limite en aucun point.

PROP : si $\lim\limits_{x \overset{x\in A_1}{\to} x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \overset{x\in A_2}{\to} x_0} f(x) = l_2$ alors $\lim\limits_{x \overset{x\in A_1\cup A_2}{\to} x_0} f(x)$ existe ssi $l_1 = l_2$.

b) Limite stricte.

DEF : si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à $D_f \setminus \{x_0\}$, on dit que f admet pour limite *stricte* l, ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0 *en restant différent* de x_0 si f admet pour A-limite l avec $A = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, autrement dit

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \;\; \exists V \text{ voisinage de } x_0 \;/\; \forall x \neq x_0 \in D_f \;\;\; x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

On écrit $l = \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} f(x)$, ou encore $f(x) \underset{x \overset{\neq}{\to} x_0}{\to} l$.

Exemple : la fonction nulle en tout point sauf en 0 où elle prend la valeur 1 n'admet *pas* de limite (au sens large) en 0, mais elle admet 0 pour limite *stricte* en 0.

c) Limites à droite et à gauche.

DEF :

- limite à droite : si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à $D_f \cap [x_0, +\infty[$, on dit que f admet pour limite *à droite* l, ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0 *en restant* $\geqslant x_0$, si f admet pour A-limite l avec $A = [x_0, +\infty[$, autrement dit :

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \;\; \exists V \text{ voisinage de } x_0 \;/\; \forall x \geqslant x_0 \in D_f \;\;\; x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

- limite à gauche : si x_0 et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à $D_f \cap]-\infty, x_0]$, on dit que f admet pour limite *à gauche* l, ou que $f(x)$ a pour *limite* l quand x *tend vers* x_0 *en restant* $\leqslant x_0$, si f admet pour A-limite l avec $A =]-\infty, x_0]$, autrement dit :

$$\boxed{\forall W \text{ voisinage de } l \;\; \exists V \text{ voisinage de } x_0 \;/\; \forall x \leqslant x_0 \in D_f \;\;\; x \in V \Rightarrow f(x) \in W}$$

On définit de manière similaire des limites strictes à droite ou à gauche ; sans utiliser les voisinages, ces diverses définitions prennent 12 formes diférentes :

	l fini	$l=+\infty$	$l=-\infty$
$l=\lim\limits_{x \xrightarrow{\neq} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \alpha>0\ \forall x \in D_f$ $0<\lvert x-x_0\rvert \leqslant \alpha \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leqslant \varepsilon$		
$l=\lim\limits_{x \xrightarrow{\geqslant} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \alpha>0\ \forall x \in D_f$ .... $\Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leqslant \varepsilon$		
$l=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \alpha>0\ \forall x \in D_f$ .... $\Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leqslant \varepsilon$		
$l=\lim\limits_{x \xrightarrow{\leqslant} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \alpha>0\ \forall x \in D_f$ .... $\Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leqslant \varepsilon$		
$l=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)$	$\forall \varepsilon>0\ \exists \alpha>0\ \forall x \in D_f$ .... $\Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leqslant \varepsilon$		

Exemple E2:
La fonction de Dirichlet n'admet pas de limite stricte, ni à gauche, ni à droite, en tout point.

PROP (application directe de la dernière prop de a) : si $\lim\limits_{x \xrightarrow{\leqslant} x_0} f(x)=l_1$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{\geqslant} x_0} f(x)=l_2$ alors $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe ssi $l_1=l_2$, et de même si $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)=l_1$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)=l_2$ alors $\lim\limits_{x \xrightarrow{\neq} x_0} f(x)$ existe ssi $l_1=l_2$.

4) Caractérisation séquentielle des limites.
REM : "séquentiel" est un anglicisme : "suite" se dit en anglais "sequence".

TH : pour x_0 et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 adhérent à D_f, $l=\lim\limits_{x_0} f$ ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de D_f de limite x_0, $\lim f(u_n)=l$.
D1 (dans le cas x_0 et l finis)

Exemples d'applications E4.

CORO : f est continue en x_0 ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de D_f de limite x_0, $\lim f(u_n)=f(x_0)$.

NOTE : les propriétés des limites de sommes, produits composées etc. , sont dans le cours de niveau 1.

III) COMPARAISON DES FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT.
Dans tout ce chapitre f et g désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à $D=D_f \cap D_g$.
RAPPEL : "Au voisinage de x_0, $P(x)$" signifie qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que $P(x)$ est vraie pour tout x de $V \cap D$.

1) Fonction négligeable devant une autre.
a) Définitions.
DEF : on dit que f est *négligeable* devant g, ou que g l'*emporte* sur f, s'il existe une fonction ε , telle que, au voisinage de x_0,

$$\boxed{f(x)=\varepsilon(x)\, g(x) \text{ avec } \lim_{x_0} \varepsilon=0}$$

NOTATIONS : $f \underset{x_0}{\ll} g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\ll} g(x)$, ou $f=o_{x_0}(g)$, $f(x)=o_{x_0}(g(x))$, simplifié en général en $f(x)=o(g(x))$ quand il n'y a pas ambiguité.

REM : si $f(x)$ et $g(x)$ sont non nuls au voisinage de x_0, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\boxed{f \underset{x_0}{\ll} g \Leftrightarrow \frac{f}{g} \underset{x_0}{\rightarrow} 0, \text{ ou encore : } \left|\frac{g}{f}\right| \underset{x_0}{\rightarrow}+\infty}$$

b) Propriétés de la relation de négligeabilité :

P1 : $\boxed{f \underset{x_0}{\ll} g \Leftrightarrow |f| \underset{x_0}{\ll} |g|}$, d'où $\boxed{o(f(x)) = o(|f(x)|)}$

P2 : $\boxed{f(x) = o(1) \text{ (ou } f \underset{x_0}{\ll} 1) \Leftrightarrow \lim_{x_0} f = 0}$

P3 : si $\boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f(x) = g(x) + o(g(x)) \\ \lim_{x_0} g = l \end{cases}}$ alors $\boxed{(\text{C}) : \lim_{x_0} f = l}$

P4 transitivité : $\boxed{o(o(f(x))) = o(f(x))}$

autrement dit : si $\boxed{(\text{H}) : h \ll g \text{ et } g \ll f}$ alors $\boxed{(\text{C}) : h \ll f}$

P5 : Comparaison entre $<$ et $\ll$

1. $f(x) < g(x)$ au voisinage de x_0 $\nRightarrow$ $f(x) \underset{x\to x_0}{\ll} g(x)$
2. $f(x) \underset{x\to x_0}{\ll} g(x)$ $\nRightarrow f(x) < g(x)$, même au voisinage de x_0
3. Par contre : $f(x) \underset{x\to x_0}{\ll} g(x) \Rightarrow |f(x)| \leqslant |g(x)|$ au voisinage de x_0

P6 : Multiplicativité : $\boxed{f(x).o(g(x)) = o(f(x)g(x))}$ et $\boxed{o(f(x)g(x)) = f(x).o(g(x))}$

P7 : Compatibilité avec la somme : $\boxed{o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))}$

P8 : $\boxed{\lambda o(f(x)) = o(f(x)) \text{ et } o(\lambda f(x)) = o(f(x))}$

P9 : si $f(x)$ et $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0, alors $\boxed{f \underset{x_0}{\ll} g}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{1}{g} \underset{x_0}{\ll} \dfrac{1}{f}}$

c) Exemples classiques à bien connaître.

1. : si $\alpha < \beta$ $\quad x^\alpha (\ln x)^\gamma \underset{x\to+\infty}{\ll} x^\beta (\ln x)^\delta$ ceci $\forall \gamma, \delta$
2. si $\alpha > \beta$ $\quad x^\alpha |\ln x|^\gamma \underset{x\to 0}{\ll} x^\beta |\ln x|^\delta$ ceci $\forall \gamma, \delta$
3. $x^\alpha (\ln x)^\gamma \underset{x\to+\infty}{\ll} e^x$ ceci $\forall \alpha, \gamma$
4. $e^x \underset{x\to-\infty}{\ll} |x|^\alpha$ ceci $\forall \alpha$

D2

2) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point.

a) Définitions.

DEF : on dit que f est *équivalente à* g en x_0, s'il existe une fonction h , telle que, au voisinage de x_0,

$$\boxed{f(x) = h(x) g(x) \text{ , avec } \lim_{x_0} h = 1}$$

NOTATION : $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$ s'il n'y a pas ambiguité.

REM1 : si $f(x)$ et $g(x)$ sont non nuls au voisinage de x_0, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\boxed{f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f}{g} \underset{x_0}{\to} 1}$$

REM 2 : on peut aussi écrire la définition sous les formes très utiles :

$$\boxed{f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = (1 + o(1)) g(x)} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = g(x) + o(g(x))} \Leftrightarrow \boxed{g(x) - f(x) = o(g(x))}}$$

b) Propriétés.

P10 : la relation d'équivalence des fonctions au voisinage de x_0 est une relation d'équivalence (i.e. réflexive, symétrique et transitive).

P11 : $\boxed{\text{si } l \neq 0,\ f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} l \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\to} l}$
$\boxed{\text{par contre, } f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ au voisinage de } x_0}$

P12 : si $\boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \underset{x_0}{\sim} g \\ \lim\limits_{x_0} g = l \end{cases}}$ alors $\boxed{(\mathrm{C}) : \lim\limits_{x_0} f = l}$

P13 : Multiplicativité : si $\boxed{(\mathrm{H}) : f(x) \sim g(x)}$ alors $\boxed{(\mathrm{C}) : h(x) f(x) \sim h(x) g(x)}$

d'où $\boxed{\text{si } (\mathrm{H}) : \begin{cases} f(x) \sim g(x) \\ h(x) \sim k(x) \end{cases}}$ alors $\boxed{(\mathrm{C}) : f(x) h(x) \sim g(x) k(x)}$

P14 :

si $\begin{cases} f(x) \text{ et } g(x) \neq 0 \text{ au voisinage de } x_0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } f(x) \text{ et } g(x) > 0 \text{ au voisinage de } x_0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\boxed{f(x) \sim g(x)} \Leftrightarrow \boxed{(f(x))^\alpha \sim (g(x))^\alpha}$

$\Leftrightarrow$ en particulier : $\boxed{\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}}$

P15 : (équivalent d'une composée) :

$$\text{si } f(u) \underset{u \to u_0}{\sim} g(u) \text{ et } u(\sim x) \underset{x \to x_0}{\to} u_0 \text{ alors } f(u(x)) \underset{x \to x_0}{\sim} g(u(x))$$

PAR CONTRE : $u(x) \sim v(x)$ N'IMPLIQUE PAS EN GENERAL $f(u(x)) \sim f(v(x))$, en particulier pour $f = \exp$.

POUR OBTENIR UN ÉQUIVALENT DE $e^{u(x)}$, il faut développer $u(x)$ en $v(x) + o(1)$ (et non $o(x)$).

Alors $e^{u(x)} = e^{v(x)+o(1)} = e^{v(x)} e^{o(1)} \sim e^{v(x)}$.

P16 : (théorème des gendarmes pour les équivalents) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) \begin{cases} g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \text{ au voisinage de } x_0 \\ g(x) \sim h(x) \sim k(x) \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : f(x) \sim k(x)}$$

QUE FAIRE EN FACE D'UNE SOMME ?

$$\text{si } \boxed{f(x) << g(x)} \text{ alors } (f(x) + g(x)) \sim g(x)$$

Autrement dit si l'une l'emporte sur l'autre; l'équivalent c'est celui qui l'emporte.

$$\text{si } \boxed{f(x) \sim \lambda h(x) \text{ et } g(x) \sim \mu h(x)} \text{ alors } (f(x) + g(x)) \sim (\lambda + \mu) h(x) \text{ SAUF SI } \lambda + \mu = 0$$

dans ce dernier cas il faut développer $f(x)$ et $g(x)$ avec au moins deux termes.

c) Équivalents classiques.

- une fonction polynôme est équivalente en $+\infty$ à sa fonction monôme de plus haut degré et en 0 à celle de plus bas degré.

$$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \begin{cases} \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n \text{ si } a_n \neq 0 \\ \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p \text{ si } a_p \neq 0 \end{cases}$$

- plus généralement :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{\alpha_k} (\ln x)^{\beta_k} \underset{x \to +\infty}{\sim} \boxed{a_n x^{\alpha_n} (\ln x)^{\beta_n}} \text{ si } \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n \text{ et } a_n \neq 0$$

$\boxed{\sin u \underset{u \to 0}{\sim} \tan u \underset{u \to 0}{\sim} \ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} \operatorname{sh} u \underset{u \to 0}{\sim} \boxed{u}}$

D3

D4 $\boxed{1-\cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}}$

D5 $\boxed{(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha u}$

$\boxed{\sin u = u + o(u)}$, $\boxed{\tan u = u + o(u)}$, $\boxed{\ln(1+u) = u + o(u)}$, $\boxed{e^u = 1 + u + o(u)}$,
$\boxed{\mathrm{sh}\, u = u + o(u)}$, $\boxed{\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)}$, $\boxed{(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)}$.

REM : écrire $\cos u = 1 + o(u)$ suffit souvent.

PAR CONTRE, ÉCRIRE $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$, qui n'est pas faux, NE SIGNIFIE PAS AUTRE CHOSE QUE $\cos u \underset{u\to 0}{\to} 1$; $\cos u \sim 1 + 18u^2$ est tout aussi exact !!!!

3) Fonction dominée par une autre au voisinage d'un point.

DEF : on dit que f est *dominée* par g au voisinage de x_0, (ou que f est au plus de l'ordre de g) s'il existe une fonction b, telle que, au voisinage de x_0,

$$\boxed{f(x) = b(x)\, g(x) \text{ avec } b \text{ bornée au voisinage de } x_0}$$

Autrement dit s'il existe un voisinage V de x_0 et un réel $k > 0$ tel que pour x dans V

$$|f(x)| \leqslant k\, |g(x)|$$

NOTATION : $f(x) = O(g(x))$.

REM : si $f(x)$ et $g(x)$ sont non nuls au voisinage de x_0, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\boxed{f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right) \text{ est bornée au voisinage de } x_0 \Leftrightarrow \left(\left|\frac{f}{g}\right|\right) \text{ est majorée au voisinage de } x_0}$$

Exemple : $x\sin(x) = O(x)$ (quel que soit x_0).

Suite hors programme :

DEF 1 : si $f = 0(g)$ et $g = O(f)$, autrement dit s'il existe un voisinage V de x_0 et deux réels $k, k' > 0$ tel que pour x dans V

$$k\, |g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant k'\, |g(x)|$$

on dit que f et g sont "du même ordre en x_0".

REM : ceci arrive si $f \sim \lambda g$ en x_0 avec $\lambda \neq 0$.

DEF 2 : si, pour un entier $n > 0$, $f(x)$ et x^n sont du même ordre quand x tend vers l'infini, on dit que $f(x)$ est un infiniment grand d'ordre n ,

et si, pour un entier $n > 0$, $f(x)$ et x^n sont du même ordre quand x tend vers 0, on dit que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre n.

Exemples : $\sin x$ est un infiniment petit d'ordre 1 en 0, $1 - \cos x$ est un infiniment petit d'ordre 2 en 0, une expression polynômiale de degré n est un infiniment grand d'ordre n en l'infini.

IV) CONTINUITÉ GLOBALE

1) GÉNÉRALITÉS.

a) Fonction continue sur une partie de $\mathbb{R}$.

DEF : soit I une partie de D_f ; on dit que f est continue *sur* I si la restriction de f à I est continue en chaque point de I, autrement dit si

$$\forall x_0 \in I \quad \lim_{x \overset{x\in I}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

soit

∀.............∀...........∃............∀..........., ... ⇒ ....

Remarquer qu'ici, le α dépend de ε *et* de x_0.

b) Fonction lipschitzienne (Rudolf Lipschitz, 1832 - 1903).

REM :

$$\exists \alpha > 0 \ \ / \ \ |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

est forcément vérifié si on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant K|x - x_0|$$

d'où la

DEF : pour $K > 0$, f est dite K-*lipschitzienne* sur I si

$$\boxed{\forall x, x' \in I \quad |f(x') - f(x)| \leqslant K|x' - x|}$$

et elle est dite *lipschitzienne s'il existe un* $K > 0$ telle que f soit K-*lipschitzienne.*

Interprétation graphique.

PROP : une fonction lipschitzienne est une fonction à taux d'accroissement borné ; plus précisément, f est K-*lipschitzienne* sur I ssi

$$\forall x \neq x' \in I \quad |t_f(x, x')| \leqslant K$$

D6

Exemples E5 :

$x \mapsto x^2$ est $2A-$lipschitzienne sur $[-A, A]$ mais pas lipschitzienne sur $]-\infty+\infty[$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}-$lipschitzienne sur $[\varepsilon, +\infty[$ mais pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\dfrac{1}{\varepsilon^2}-$lipschitzienne sur $[\varepsilon, +\infty[$ mais pas lipschitzienne sur $]0, +\infty[$

c) Fonction *uniformément* continue sur une partie de $\mathbb{R}$.

DEF : on dit que f est *uniformément* continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha > 0 \quad \forall x, x_o \in I \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

CNS à partir des suites : f est *uniformément continue* sur I ssi pour toutes suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I

$$\lim(u_n - v_n) = 0 \Rightarrow \lim(f(u_n) - f(v_n)) = 0$$

(alors que f est *continue* sur I ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de I

$$\lim u_n = l \in I \Rightarrow \lim f(u_n) = f(l)$$

D7

PROP : f lipschitzienne sur $I \Rightarrow f$ uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ continue sur I, mais les réciproques sont fausses.

D8

REM : on en déduit que si I est un intervalle et si f lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I alors f est continue sur I. Là encore, la réciproque est fausse.

d) Fonction continue sur un segment.

TH (de Heine) : toute fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

D9

2) THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES ET THÉORÈME DE WEIERSTRASS.

a) Divers énoncés du théorème.

THÉORÈME (forme 1 du théorème des valeurs intermédiaires, appelée aussi "lemme de Bolzano") :
Une fonction continue sur un intervalle ne peut changer de signe sans s'annuler ; plus précisément :

si $\boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f(a)\,f(b) \leqslant 0 \end{cases}}$ alors $\boxed{(\text{C}) : \exists c \in [a,b] \ / \ f(c) = 0}$

D10

COROLLAIRE (forme 2, habituelle, du théorème des valeurs intermédiaires) :
Une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires ; plus précisément :

si $\boxed{(\text{H}) : f \text{ est continue sur } [a,b]}$ alors $\boxed{(\text{C}) : \forall y_0 \in [f(a), f(b)] \ \ \exists x_0 \in [a,b] \ / \ f(x_0) = y_0}$

D11

REM : (C) s'écrit plus simplement sous la forme : $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$.

COROLLAIRE (forme 3 du théorème des valeurs intermédiaires) :
L'image continue réelle d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$; plus précisément :

si $\boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ I \text{ est un intervalle} \end{cases}}$ alors $\boxed{(\text{C}) : f(I) \text{ est un intervalle}}$

D12

b) Applications

A1 : si f est continue sur un intervalle I et si f change de signe sur I alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans I.

A2 : si f est continue sur intervalle ouvert $]a,b[$ avec $a < b$ et si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) < 0$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f(x) > 0$ (ou $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f(x) < 0$), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$; si de plus f est strictement monotone sur I, cette solution est unique.

D13

A3 : si n est pair, tout réel $\geqslant 0$ possède une unique racine n-ième $\geqslant 0$; si n est impair, tout réel possède une unique racine n-ième réelle.

D14

Notation : $\sqrt[n]{x}$.

A4 : tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle (ou toute équation polynomiale à coefficients réels de degré impair possède au moins une solution réelle).

D15

A5 (définition de e) : il existe un unique réel $x > 1$ tel que $\ln x = 1$.

D16

A6 : le problème du randonneur : un randonneur part un jour J de la vallée à 8 heures et monte à un refuge ; le jour $J+1$, il part du refuge à 8 heures et redescend par le même chemin ; démontrer qu'il existe un point de son chemin où il est passé la veille exactement à la même heure.

D17

A7 : TH de monotonie d'une fonction continue injective :
Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **injective** sur un **intervalle** I et **continue** sur I est strictement monotone sur I.

REM : Bien voir que ce théorème devient faux si l'on ôte l'une des 3 hypothèses en gras.

D18
Démonstration n°1 :

Soit f continue et injective sur I , intervalle.
Raisonnons par l'absurde en supposant que la fonction f n'est pas strictement monotone sur I.
Il existe alors dans I : $a < b < c$ tels que $f(b) \notin [f(a), f(c)]$ ($f(b) \neq f(a)$ et $\neq f(c)$ grâce à l'injectivité).
Si $f(b) < \min(f(a), f(c))$ on choisit un $y \in \left]f(b), \min(f(a), f(c))\right[$ et si $f(b) > \max(f(a), f(c))$ on choisit un $y \in \left]\max(f(a), f(c)), f(b)\right[$.
Dès lors, le TVI (appliqué une fois sur $]a, b[$ et une fois sur$]b, c[$) dit qu'il existe $x_1 \in]a, b[$ et $x_2 \in]b, c[$tels que $f(x_1) = y$ et $f(x_2) = y$. C'est absurde puisque f est injective. Donc f est bien strictement monotone sur I.

Démonstration n ° 2:

$$\text{Hypothèse}\left\{\begin{array}{|l|}\hline f \text{ est continue sur } I \text{ intervalle} \\ \hline \forall x, y \in I \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \\ \hline\end{array}\right.$$

Soient x_0 et y_0 dans I avec $x_0 < y_0$; alors, soit $f(x_0) < f(y_0)$, soit $f(x_0) > f(y_0)$: on va se placer dans le premier cas et montrer que f est croissante (de la même façon, on montrerait que f est décroissante dans le deuxième).

Soient $x_1 < y_1 \in I$: le but est de démontrer que $f(x_1) < f(y_1)$;

Pour $t \in [0, 1]$, posons $\left\{\begin{array}{l} x(t) = tx_1 + (1-t)x_0 = bar((x_1, t), (x_0, 1-t)) \\ y(t) = ty_1 + (1-t)y_0 = bar((y_1, t), (y_0, 1-t)) \end{array}\right.$
Comme I est un intervalle, $x(t)$ et $y(t)$ appartiennent toujours à I.

Posons enfin $g(t) = f(y(t)) - f(x(t))$; g est continue sur $[0, 1]$ et $g(0) = f(y_0) - f(x_0) > 0$

Or $\left\{\begin{array}{l} x_1 < y_1 \\ x_0 < y_0 \end{array}\right. \Rightarrow x(t) < y(t) \quad \forall t \in [0, 1]$; la propriété d'injectivité de f montre alors que g ne s'annule jamais sur $[0, 1]$; par le théorème des valeurs intermédiaires on déduit alors que $g(1) = f(y_1) - f(x_1) > 0$: on bien montré que f est strictement croissante.

A8 : si f est continue sur l'intervalle I et $\alpha = \inf\limits_{x \in I} f(x), \beta = \sup\limits_{x \in I} f(x)$, alors

$$f(I) = [\alpha, \beta], [\alpha, \beta[,]\alpha, \beta] \text{ ou }]\alpha, \beta[$$

D19

c) Type de l'intervalle $f(I)$ en fonction du type de I.

Remarquons que l'image continue d'un intervalle ouvert est un intervalle qui peut être de n'importe quel type.
D20

On a par contre le

THÉORÈME DE WEIERSTRASS (ou théorème des bornes atteintes) :
L'image continue d'un segment est un segment ; plus précisément :
si $\boxed{\text{(H) : } f \text{ est continue sur } [a, b]}$ alors $\boxed{\text{(C) : } \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ / \ f([a, b]) = [\alpha, \beta]}$

REMARQUE : ce théorème peut aussi se mettre sous la forme :

si $\boxed{\text{(H) : }\left\{\begin{array}{c} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \alpha = \inf\limits_{x \in I} f(x), \beta = \sup\limits_{x \in I} f(x) \end{array}\right.}$ alors $\boxed{\text{(C) : }\left\{\begin{array}{l} 1.\ \alpha, \beta \text{ sont réels (autrement dit, } f \text{ est bornée)} \\ 2.\ \alpha, \beta \in f([a, b]) \text{ (autrement dit, } f \text{ "atteint ses bornes")} \end{array}\right.}$

On dit donc couramment : "une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes".

D21
De plus les choses se passent également bien quand la fonction est strictement monotone :

PROP : si f est strictement monotone et continue sur l'intervalle I, alors I et $f(I)$ sont de même type ; plus précisément, si f est continue sur I et $a < b$:

	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$I = [a, b]$	$f(I) =$	$f(I) =$
$I =]a, b]$	$f(I) =$	$f(I) =$
$I = [a, b[$	$f(I) =$	$f(I) =$
$I =]a, b[$	$f(I) =$	$f(I) =$