B) CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce chapitre f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I) DÉRIVATION.

1) Définitions.

DEF : soit x_0 un point tel que f soit définie *au voisinage* de x_0 ; on dit que f est *dérivable* en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et x tend vers une limite finie quand x tend vers x_0.

PROP : cette définition peut se mettre sous les diverses formes, À BIEN CONNAÎTRE :

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et $\in\mathbb{R}$	1 bis. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}$ existe et $\in\mathbb{R}$
2. $\exists a\in\mathbb{R}\ \ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a+\underset{x\to x_0}{o}(1)$	2 bis. $\exists a\in\mathbb{R}\ \ \dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=a+\underset{u\to 0}{o}(1)$
3. $\exists a\in\mathbb{R}\ \ f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$	3 bis. $\exists a\in\mathbb{R}\ \ \boxed{f(x_0+u)=f(x_0)+au+\underset{u\to 0}{o}(u)}$
	4 bis. $\begin{cases}\exists a\in\mathbb{R}^*\ \ \boxed{f(x_0+u)-f(x_0)\underset{u\to 0}{\sim}au}\\ \text{ou } f(x_0+u)-f(x_0)=\underset{u\to 0}{o}(u)\end{cases}$

D1

DEF : soit D'_f l'ensemble des points où f est dérivable ; la fonction d'ensemble de définition D'_f qui à x_0 fait correspondre $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelée la *dérivée* de f et est notée f' (notation de Lagrange) ou $D(f)$.

On a donc, pour $x\in D'_f$

$$\boxed{f'(x)=\lim_{x'\to x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}}$$

Notation de Leibniz :

$$\text{si } y=f(x),\ f'(x)\ \text{ est noté } \frac{dy}{dx}\left(=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

E1

PROP et DEF : (Interprétation géométrique) : en notant $M(x,f(x)),M_0(x_0,f(x_0))$,
f est *dérivable* en x_0 ssi la pente de la sécante (M_0M) possède une limite finie quand x tend vers x_0.

La droite passant par M_0 et ayant cette limite pour pente (qui est donc la position limite de la sécante (M_0M)) est par définition la *tangente* à la courbe C_f en M_0.

Son équation cartésienne est :

Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ ou $-\infty$, et si f est continue en x_0, la droite verticale passant par M_0 est la tangente à la courbe C_f en M_0, mais f n'est pas considérée comme dérivable.

DEF : soit x_0 un point tel que f soit définie *au voisinage* $\begin{cases}\text{à gauche}\\ \text{à droite}\end{cases}$ de x_0 ; on dit que f est *dérivable* $\begin{cases}\text{à gauche}\\ \text{à } \textit{droite}\end{cases}$ en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et x tend vers une limite finie quand x tend vers x_0 avec $\begin{cases}x<x_0\\ x>x_0\end{cases}$.

on définit alors comme ci-dessus les deux fonctions dérivées, à droite et à gauche, notées f'_g et f'_d :

$$\boxed{f'_g(x)=\lim_{x'\overset{<}{\to}x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\ ;\ f'_d(x)=\lim_{x'\overset{>}{\to}x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}}$$

PROP : f est dérivable en x_0 ssi elle y est dérivable à droite et à gauche ET les deux dérivées à droite et à gauche sont égales en x_0.

D2

Une fonction dérivable à droite et à gauche de dérivées à droite et à gauche distinctes donne donc un exemple simple de fonction non dérivable.

DEF : une fonction est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I, avec la restriction qu'on n'exige que la dérivabilité à droite pour la borne de gauche, et la dérivabilité à gauche pour la borne de droite (si celles-ci appartiennent à l'intervalle). Une fonction est dérivable sur une réunion d'intervalles non contigus si elle est dérivable sur chacun des intervalles composant cette réunion.

2) Propriétés.

P1 : la dérivabilité (resp. à droite, à gauche) entraîne la continuité (resp. à droite, à gauche), mais la réciproque est fausse.

D3

REM : une fonction dérivable à droite et à gauche est donc continue (mais pas forcément dérivable).

P2 : (dérivabilité de la somme et du produit)

Si f et g sont dérivables en x alors $f+g$ et fg aussi et

$$\begin{cases} (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \\ (fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \end{cases}$$

Ceci provient de ce que

$$\boxed{\begin{array}{l} t_{f+g}(x,x') = t_f(x,x') + t_g(x,x') \\ \hline t_{fg}(x,x') = t_f(x,x').g(x') + f(x).t_g(x,x') \end{array}}$$

D4

REM : on a donc $D'_{f+g} \supset D_f \cap D_g$ et $D'_{fg} \supset D_f \cap D_g$; il n'y a pas forcément égalité, comme le montre l'exemple $f = x \mapsto |x|$ et $g = -f$; on écrit en général

$$\boxed{\begin{array}{l} (f+g)' = f' + g' \\ \hline (fg)' = f'g + fg' \end{array}}$$

mais ceci n'est en toute rigueur valable que si $D'_{f+g} = D_f \cap D_g$ et $D'_{fg} = D_f \cap D_g$.

P3 : (dérivabilité de l'inverse)

Si f est dérivable en x et jamais nulle sur un voisinage de x, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en x, et

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

Ceci provient de ce que

$$\boxed{t_{1/f}(x,x') = -\frac{t_f(x,x')}{f(x)\,f(x')}}$$

D5

REM : avec la même restriction que ci-dessus, on écrira donc :

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$$

P4 : (dérivabilité du quotient, CORO de P2 et P3)

Si f et g sont dérivables en x et g jamais nulle sur un voisinage de x, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}}$$

D6

REM : avec la même restriction que ci-dessus, on écrira donc :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

P5 : (dérivabilité de la composée)

Si f est dérivable en x et g dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x et

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)}$$

D7 (dans un cas restreint) et D'7

D7 utilise

$$t_{g\circ f}(x, x') = t_g(f(x), f(x')).t_f(x, x') \text{ (valable seulement si } f(x) \neq f(x'))$$

REM 1 : avec la même restriction que ci-dessus, on écrira donc :

$$\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'}$$

REM 2 : avec la notation de Leibniz, cela donne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}, \text{ avec } y = f(x), z = g(y)$$

APPLICATIONS :

$\lvert f\rvert' = \text{signe}(f).f'$
$(\ln\lvert f\rvert)' = \dfrac{f'}{f}$
$(e^f)' = e^f.f'$
$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$
$\left(\dfrac{f}{g^a}\right)' = \dfrac{f'g - \alpha f g'}{g^{\alpha+1}}$
$(f^g)' =$

D8

3) Exemples classiques de fonctions dérivables

E2

4) Dérivées logarithmiques.

DEF : la dérivée logarithmique de f est la dérivée de $\ln\lvert f\rvert$, soit $\dfrac{f'}{f}$:

$$\text{DL}(f) = \frac{f'}{f}$$

Propriétés :

$\text{DL}(fg) = \text{DL}(f) + \text{DL}(g)$
$\text{DL}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \text{DL}(f) - \text{DL}(g)$
$\text{DL}(f^\alpha) = \alpha\,\text{DL}(f)$

D9

E3

5) Dérivabilité d'une fonction réciproque :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **dérivable** et injective sur un **intervalle** I et soit f^{-1} sa fonction réciproque sur I, définie sur $J = f(I)$; alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en tout point } y \text{ de } J \text{ tel que } f'\left(f^{-1}(y)\right) \neq 0 \text{ et } \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Si $f'\left(f^{-1}(y)\right) = 0$, la tangente à la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse y.

D10

6) Application des dérivées au calcul d'une limite de forme $\dfrac{0}{0}$; petite règle de L'Hospital.

PROP : (petite règle de L'Hospital (Guillaume de L'Hospital, 1661-1704))

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont dérivables en } x_0 \\ g(x) \neq 0 \text{ sur un voisinage pointé de } x_0 \\ f(x_0) = g(x_0) = 0 \\ g'(x_0) \neq 0 \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$$

D11

E4

7) Dérivées successives.
a) Définitions.

DEF : on dit que f est (*de classe*) $\mathcal{D}^0$ en x si f est définie en x , et, par convention, $f^{(0)} = \mathcal{D}^0(f) = f$;
pour $n \geqslant 1$, on dit que

$$f \text{ est } (\textit{de classe}) \ \mathcal{D}^n \text{ en } x \text{ (ou que } f \text{ est } n \textit{ fois dérivable} \text{ en } x) \text{ si } \begin{cases} 1. \ f \text{ est de classe } \mathcal{D}^{n-1} \text{ en tout point d'un voisinage de } x \\ 2. \ f^{(n-1)} \text{ est dérivable en } x \end{cases}$$

la dérivée n-ième est alors par définition la dérivée de la dérivée $n-1$-ième :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \text{ (ou } D^n(f) = D\left(D^{n-1}(f)\right))$$

Notation de Leibniz : si $y = f(x)$, $\boxed{f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}}$.
On dit que f est (*de classe*) $\mathcal{C}^\infty$ en x (ou qu'elle est *infiniment dérivable* en x) si elle est de classe $\mathcal{D}^n$ pour tout n.
On dit que f est (*de classe*) $\mathcal{C}^n$ en x si elle y est de classe $\mathcal{D}^n$ et si $f^{(n)}$ est continue en x.

Par conséquent :

f est ... en x	signifie que
$\mathcal{D}^0$	f est définie en x
$\mathcal{C}^0$	f est continue en x
$\mathcal{D}^1$	f est dérivable en x
$\mathcal{C}^1$ (ou f est continûment dérivable en x)	f est dérivable au voisinage de x et f' est continue en x
$\mathcal{D}^2$	f est dérivable au voisinage de x et f' est dérivable en x
$\mathcal{C}^2$	f est de classe $\mathcal{D}^2$ au voisinage de x et f'' est continue en x

REM : une fonction de classe C^∞ en x l'est forcément aussi sur un voisinage de x !
PROP :

1. $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow ... \Rightarrow \mathcal{C}^n \Rightarrow \mathcal{D}^n \Rightarrow ... \Rightarrow \mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{D}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0 \Rightarrow \mathcal{D}^0$
2. Toutes les réciproques aux implications ci-dessus sont fausses
3. $\left(f^{(n)}\right)^{(m)} = f^{(n+m)} = \left(f^{(m)}\right)^{(n)}$ (autrement dit : $D^n \circ D^m = D^{n+m}$)

D12

E5 :

$D^n\left(x \mapsto x^\alpha\right) = \left(x \mapsto \alpha^{\underline{n}}\, x^{\alpha-n}\right)$ avec $\alpha^{\underline{n}} = \alpha\left(\alpha-1\right)..\left(\alpha-n+1\right)$
$D^k\left(x \mapsto x^n\right) = \left(x \mapsto n^{\underline{k}}\, x^{n-k}\right)$ avec $n^{\underline{k}} = n\left(n-1\right)..\left(n-k+1\right) = k!\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$
$\exp^{(n)} = \exp$
$\cos^{(n)}\left(x\right) =$
$\sin^{(n)}\left(x\right) =$

b) Opérations sur les dérivées successives.

P1 : si f et g sont $\mathcal{C}^n$ $(n \in \overline{\mathbb{N}})$ en x alors $f+g$ aussi et pour n fini, $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

P2 : si f et g sont $\mathcal{C}^n$ en x alors fg aussi et on a la formule, dite de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + ... + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}g^{(k)} + ... + nf'g^{(n-1)} + fg^{(n)} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}g^{(k)}}$$

En particulier : $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
D13
E6

P3 : si f est $\mathcal{C}^n$ en x avec $f(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est $\mathcal{C}^n$ en x.
D14

On en déduit que si $g(x) \neq 0$ et f et g sont $\mathcal{C}^n$ en x alors $\dfrac{f}{g}$ aussi.
P4 : si f est $\mathcal{C}^n$ en x et g est $\mathcal{C}^n$ en $f\left(x\right)$ alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^n$ en x.
D15

P5 : fonction réciproque d'une fonction de classe C^n :

On suppose que f est injective, de classe C^n sur un intervalle I et que f' n'est jamais nulle sur I ; alors

$$f^{-1} \text{ est de classe } C^n \text{ sur } J = f\left(I\right).$$

D16

c) Anneau et espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

NOTATION : pour I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $n \in \overline{\mathbb{N}}$ on pose

$$\mathcal{C}^n\left(I, \mathbb{R}\right) = \{f \in \mathbb{R}^I \;/\; f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ en tout point de } I\}$$

REM : on définit ainsi une infinité d'ensembles strictement emboîtés les uns dans les autres :

$$\mathcal{C}^\infty\left(I, \mathbb{R}\right) \subset ... \subset \mathcal{C}^n\left(I, \mathbb{R}\right) \subset ... \subset \mathcal{C}^1\left(I, \mathbb{R}\right) \subset \mathcal{C}^0\left(I, \mathbb{R}\right) = \mathcal{C}\left(I, \mathbb{R}\right) \subset \mathbb{R}^I$$

PROP : munis de l'addition et de la multiplication interne des fonctions, ces ensembles sont des *sous-anneaux non intègres* de $\mathbb{R}^I$, et munis de l'addition et de la multiplication externe, c'en sont des *sous-espaces vectoriels*.
D17

REM : si I est un intervalle fermé ou semi-ouvert, on définit aussi $\mathcal{C}^n\left(I, \mathbb{R}\right)$, avec des dérivées à droite à la borne de gauche, et des dérivées à gauche à la borne de droite.

II) THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS.
1) Extremums d'une fonction dérivable.

DEF : soit x_0 un élément de D_f ;

on dit que f présente (ou possède) un $\left\{\begin{array}{l}\textit{maximum absolu}\\ \textit{minimum absolu}\end{array}\right.$ en x_0 si

$$\forall x \in D_f \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant f(x_0) \\ f(x) \geqslant f(x_0)\end{array}\right.$$

on dit que f présente (ou possède) un $\left\{\begin{array}{l}\textit{maximum (local)}\\ \textit{minimum (local)}\end{array}\right.$ en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que la restriction de f à V possède un $\left\{\begin{array}{l}\text{maximum absolu}\\ \text{minimum absolu}\end{array}\right.$ en x_0 ; autrement dit,

$$\exists \alpha > 0\ \forall x \in D_f \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant f(x_0) \\ f(x) \geqslant f(x_0)\end{array}\right.$$

Un *extremum* est un maximum ou un minimum.
E7

TH : si f est dérivable en x_0, l'existence d'un extremum local en x_0 entraîne la nullité de la dérivée de f en x_0, mais la réciproque est fausse.

D18
ATTENTION : ce résultat est faux si l'on suppose seulement que f est dérivable à droite, ou à gauche, en x_0.
E 8

2) Théorème de Rolle (Michel Rolle, 1652 - 1719).

a) Énoncé du théorème.
TH de Rolle (corollaire du théorème de Weierstrass et du théorème précédent) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \left\{\begin{array}{l} a \neq b \\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b)\end{array}\right.} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \exists c \in]a,b[\ /\ f'(c) = 0}$$

D19

REMARQUE 1 : Ce théorème s'énonce de façon géométrique sous la forme légèrement affaiblie suivante :

> Si une courbe de fonction dérivable sur un intervalle possède une sécante horizontale, alors elle possède aussi une tangente horizontale.

REMARQUE 2 : les hypothèse de ce théorème sont à bien connaître ; si l'on supprime l'une d'entre-elles, le "théorème" devient faux.
D20

REMARQUE 3 : on verra en exercice que ce théorème est faux pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

b) Applications.

A1 : si f est dérivable sur un *intervalle* I et y possède deux racines distinctes (i.e. deux solutions de l'équation $f(x) = 0$) alors f' possède au moins une racine sur I.
D21

A2 : si f est n fois dérivable sur un *intervalle* I et y possède $n+1$ racines distinctes alors $f^{(n)}$ possède au moins une racine sur I.
D22

3) Théorème des accroissements finis.

a) Énoncé du théorème.

TH des accroissements finis (corollaire du théorème de Rolle), abrégé en TAF :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} a \neq b \\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \exists c \in]a,b[\ / \begin{array}{|c|}\hline f'(c) = t_f(a,b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \hline \text{soit } f(b) = f(a) + (b-a) f'(c) \\ \hline \end{array}}$$

D23

REMARQUE 1 : ce théorème n'est autre qu'une version "oblique" du théorème de Rolle ; il s'énonce en effet de façon géométrique sous la forme légèrement affaiblie suivante :

$$\boxed{\text{Toute sécante d'une courbe de fonction dérivable sur un intervalle est parallèle à l'une des tangentes.}}$$

REMARQUE 2 : La formule

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

s'appelle "formule des accroissements finis", par opposition à la définition de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{dy}{dx}$$

faisant intervenir des accroissements "infinitésimaux".

REMARQUE 3 : on peut énoncer le TAF sous la forme équivalente suivante :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} u \neq 0 \\ f \text{ est continue sur } [x_0, x_0+u] \\ f \text{ est dérivable sur }]x_0, x_0+u[\end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \exists \theta \in]0,1[\ / \ f(x_0+u) = f(x_0) + u f'(x_0 + \theta u)}$$

D24

Il faut alors bien prendre garde que le nombre θ ainsi défini dépend de u (et de x_0 !)

REMARQUE 4 : sous une forme affaiblie, on peut aussi énoncer :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : f \text{ est dérivable sur un intervalle } I} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \forall x, y \in I \ \ \exists z \in [x,y] \ / \ f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)}$$

D25

Il faut ici aussi bien prendre conscience que z dépend de x et y.

E9

b) Inégalités des accroissements finis.

TH : si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors

$\boxed{\text{si } a \leqslant b \quad (b-a) \min\limits_{[a,b]} f' \leqslant f(b) - f(a) \leqslant (b-a) \max\limits_{[a,b]} f'}$ (inégalité des accroissements finis, version "encadrement")

$\boxed{|f(b) - f(a)| \leqslant |b-a| \max\limits_{[a,b]} |f'|}$ (inégalité des accroissements finis, version "valeurs absolues")

D26

Remarque : ce théorème est totalement équivalent au suivant :

TH : si f est continue sur $[a,b]$, alors

$$\boxed{\text{si } a \leqslant b \quad (b-a) \min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a) \max_{[a,b]} f}$$

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant |b-a| \max_{[a,b]} |f|}$$

Dont les inégalités prennent alors le nom "d'inégalités de la moyenne".
D27

4) Applications du Théorème des accroissements finis.

Le théorème des accroissements finis permet déduire de certaines propriétés de la dérivée f', des propriétés de la fonction f.

Dans ce paragraphe, la notation $\overset{\circ}{I}$ pour un intervalle I désigne l'intervalle privé de ses bornes.

a) Relations entre le signe de la dérivée et le sens de variation.

α) Monotonie large.

TH :

si $\boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I} \end{cases}}$ alors $\boxed{(\text{C}) : f \text{ est } \begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases} \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I} \;\; f'(x) \begin{cases} \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \end{cases}}$

D 28

En simplifiant, on peut dire qu'une fonction dérivable est monotone sur un intervalle si et seulement si sa dérivée y est de signe constant.

CORO :

si $\boxed{(\text{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I} \end{cases}}$ alors $\boxed{(\text{C}) : f \text{ est constante sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I} \;\; f'(x) = 0}$

ATTENTION : pour ces théorèmes le fait que I soit un intervalle est primordial ; par exemple la fonction signe est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ et pourtant, elle n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$, et la fonction "inverse" est de dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ et pourtant, elle n'y est pas monotone.

CORO du CORO : deux fonctions ayant des dérivées égales sur un intervalle diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

β) Monotonie stricte.

Première remarque : une fonction strictement croissante et dérivable, peut avoir une dérivée qui s'annule.
E10

PROP : une fonction est strictement $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$ sur un intervalle I si et seulement si

1. Elle y est $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$.
2. Elle n'est constante sur aucun intervalle $[a,b], a < b$ inclus dans I

D29

COROLLAIRE : Si f est continue sur un intervalle I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, elle est strictement $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$ sur I si et seulement si

1. $\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) \begin{cases} \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \end{cases}$
2. L'ensemble des points de $\overset{\circ}{I}$ où f' s'annule ne contient aucun intervalle $[a,b], a < b$.

D30

REMARQUE 1 : la condition 2. peut aussi s'énoncer sous la forme.

2 bis. Entre deux éléments (distincts) de $\overset{\circ}{I}$, il existe toujours au moins un élément x tel que $f'(x)\begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$.

REMARQUE 2 : une partie de $\mathbb{R}$ ne contenant pas d'intervalle $[a,b], a<b$, est dite "d'intérieur vide" ; la condition 2. peut donc aussi s'énoncer :

$$\boxed{2.\ \left\{x \in \overset{\circ}{I} \ / \ f'(x)=0\right\} \text{ est d'intérieur vide}}$$

REMARQUE 3 : en pratique l'ensemble des points où f' s'annule est presque toujours fini, donc vérifie la condition 2.

On peut cependant trouver des fonctions strictement monotones telles que cet ensemble est infini, voire même égal à $\mathbb{Q}$! E10

b) Caractérisation des fonctions lipschitziennes parmi les fonctions dérivables.

PROP : Si f est continue sur un intervalle I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $K>0$, f est K-*lipschitzienne* sur I si et seulement si

$$\boxed{\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad |f'(x)| \leqslant K}$$

Un fonction dérivable sur un intervalle y est donc lipschitzienne si et seulement si sa dérivée y est bornée.

D31

E11

c) Théorème de prolongement de la dérivée.

Introduction : on a vu plus haut qu'il était possible que $f'(x_0)$ existe et que $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} f'(x)$ n'existe pas.

On va voir ici que l'inverse est impossible.

PROP (application du TAF) :

si $\boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue à droite en } x_0 \\ f \text{ est dérivable sur }]x_0, x_0+\alpha[\text{ avec } \alpha>0 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}}$ alors $\boxed{(\mathrm{C}) : f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \text{ et } f'_d(x_0)=l}$

D32

Ayant une proposition similaire avec une dérivée à gauche, on en déduit le théorème de prolongement de la dérivée :

si $\boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue en } x_0 \\ f \text{ est dérivable sur }]x_0-\alpha, x_0[\cup]x_0, x_0+\alpha[\text{ avec } \alpha>0 \\ \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}}$ alors $\boxed{(\mathrm{C}) : f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ en } x_0 \text{ et } f'(x_0)=l}$

On peut en déduire :

TH dit "de prolongement des dérivées" :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{sur } I \backslash \{x_0\}, \text{ avec } p \in \overline{\mathbb{N}^*} \\ \forall k \in [|1, p|] \lim\limits_{x \overset{x \in I}{\to} x_0} f^{(k)}(x) = l_k \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

$$\text{alors } \boxed{(\mathrm{C}) : f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{sur } I \text{ et } f^{(k)}(x_0) = l_k \text{ pour } k \in [|1, p|]}$$

D33

E12

IV) FONCTIONS CONVEXES.

1) Partie convexe du plan.

DEF : $X \subset P$ est dite *convexe* si tout segment joignant deux points de A est inclus dans A, autrement dit :

$$\forall A, B \in X \qquad [AB] \subset P$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\forall A, B \in X \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{BAR}\begin{pmatrix} A & B \\ 1-t & 1-t \end{pmatrix} \in P$$

E1

2) Fonctions convexes.

a) Définition par inégalité de convexité.

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout point d'un intervalle I.

DEF (CNS 1, géométrique, pour qu'une fonction soit convexe) :

désignons par $\left\{\begin{array}{l} X^+ = \{M(x,y) \ / \ x \in I \text{ et } y \geqslant f(x)\} \\ X^- = \{M(x,y) \ / \ x \in I \text{ et } y \leqslant f(x)\} \end{array}\right.$ la bande verticale formée des points situés $\left\{\begin{array}{l} \text{au-dessus} \\ \text{au-dessous} \end{array}\right.$ de la courbe de f sur I.

Alors f est dite $\left\{\begin{array}{l} \textit{convexe} \\ \textit{concave} \end{array}\right.$ sur I si $\left\{\begin{array}{l} X^+ \\ X^- \end{array}\right.$ est convexe.

REM immédiate : f est concave ssi $-f$ est convexe.

CNS 2 (par l'inégalité de convexité).

f est $\left\{\begin{array}{l} \textit{convexe} \\ \textit{concave} \end{array}\right.$ sur I ssi $\forall x_1, x_2 \in I \ \ \forall t \in [0,1] \quad f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$.

D1

E2 : montrer que $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et $g : x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, concave sur $\mathbb{R}_-$.

Question : que dire d'une fonction à la fois convexe et concave ?

REM : on exprime de façon imagée cette définition en disant qu'une fonction est $\left\{\begin{array}{l} \text{convexe} \\ \text{concave} \end{array}\right.$ lorsque sa courbe est toujours située en-dessous de ses cordes (les cordes d'une courbe étant les segments joignant deux points de cette courbe)..

b) HORS PROGRAMME : Définitions par croissance du taux d'accroissement.

LEMME : soient $a < b < c, a', b', c'$ des réels, $t \in]0,1[$ tel que $b = (1-t)a + tc$,

et $b'' = (1-t)a' + tc'$, $A\left|\begin{array}{l} a \\ a' \end{array}\right.$, $B\left|\begin{array}{l} b \\ b' \end{array}\right.$, $B'\left|\begin{array}{l} b \\ b'' \end{array}\right.$, $C\left|\begin{array}{l} b \\ b'' \end{array}\right.$.

Alors, pour que le point B soit en dessous du point B' (c'est-à-dire que $b \leqslant b'$), il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

1. pente(AB) $\leqslant$pente(BC) (soit $\dfrac{b'-a'}{b-a} \leqslant \dfrac{c'-b'}{c-b}$)
2. pente(AB) $\leqslant$pente(AC) (soit $\dfrac{b'-a'}{b-a} \leqslant \dfrac{c'-a'}{c-a}$)
3. pente(AC) $\leqslant$pente(BC) (soit $\dfrac{c'-a'}{c-a} \leqslant \dfrac{c'-b'}{c-b}$)

On en déduit les 3 CNS de convexité suivantes :

CNS 3 (théorème du skate-board) : f est convexe sur $I \Leftrightarrow \forall a < b, a' < b' \in I \quad \left\{\begin{array}{l} a \leqslant a' \\ b \leqslant b' \end{array}\right. \Rightarrow t_f(a,b) \leqslant t_f(a', b')$ (autrement dit, lorsque les extrémités de l'intervalle augmentent, le taux d'accroissement correspondant augmente).

CNS 4 : f est convexe sur $I \Leftrightarrow \forall x_0 \in I$, la fonction $x \mapsto t_f(x_0, x)$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

CNS 5 : f est convexe sur $I \Leftrightarrow \forall a < b < c \in I \quad t_f(a,b) \leqslant t_f(b,c)$

D2 :
CNS2 $\Rightarrow$ CNS3 se prouve grâce au lemme, en regardant d'abord le cas $a < b \leqslant a' < b$, puis le cas $a \leqslant a' \leqslant b \leqslant b'$ (mais $a < b$ et $a' < b'$).
CNS3 $\Rightarrow$ CNS4 et CNS 4 $\Rightarrow$ CNS 5 sont assez immédiats
CNS5 $\Rightarrow$ CNS2 se déduit du lemme.

c) HORS PROGRAMME : Continuité et dérivabilité d'une fonction convexe.
TH (corollaire de la CNS 4) : si f est convexe sur I, f est dérivable à droite et à gauche en tout point de l'intérieur de I, soit $]\inf I, \sup I[$.

COROLLAIRE : une fonction convexe sur un intervalle est toujours continue sur l'intérieur de cet intervalle.
D3

Exemple de fonction convexe non continue aux bornes de l'intervalle, exemple de fonction convexe non dérivable : E3.

REM : en fait, on peut démontrer qu'une fonction f est convexe sur un intervalle ouvert I ssi elle est dérivable à gauche et à droite en tout point de I, et que f'_g (ou f'_d) est croissante sur I.

d) Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions dérivables.

TH : une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe sur I ssi sa dérivée est croissante sur I.

D4 : l'implication directe se montre facilement à partir du théorème du skate-board, et la réciproque utilise le théorème des accroissements finis pour aboutir à la CNS 5.

COROLLAIRE : une fonction 2 fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I ssi sa dérivée seconde est positive ou nulle sur I.

e) Inégalité de convexité multiple.

PROP : si f est convexe sur I, $x_1, .., x_n$ n points de I, $t_1, .., t_n$ n réels $\geqslant 0$ de somme égale à 1, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

D5, par récurrence sur n.

APPLICATION, en prenant $f = -\ln$: si $x_1, .., x_n > 0$ et $t_1, .., t_n$ sont n réels $\geqslant 0$ de somme égale à 1, alors

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

d'où en particulier, avec $t_i = 1/n$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ (la moyenne géométrique est } \leqslant \text{ à la moyenne arithmétique)}$$

D6

f) HORS PROGRAMME : Convexité stricte.

DEF : f est $\left\{\begin{array}{l} \textit{strictement convexe} \\ \textit{strictement concave} \end{array}\right.$ sur I ssi $\forall x_1 \neq x_2 \in I \quad \forall t \in]0,1[\quad f((1-t)x_1 + t x_2) < (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$.

Les théorèmes du e) deviennent alors :

TH : une fonction dérivable sur un intervalle I est strictement convexe sur I ssi sa dérivée est strictement croissante sur I.

COROLLAIRE : une fonction 2 fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I ssi sa dérivée seconde est positive ou nulle et jamais nulle sur un segment non réduit à un point inclus dans I.

E4 : $x \mapsto x^{2n}$, exp, $-\ln$ sont strictement convexes sur leur ensemble de définition.

V) FORMULE DE TAYLOR YOUNG.

1) Polynôme de Taylor (Brook Taylor, 1685-1731) d'ordre n d'une fonction n fois dérivable en un point.

Dans le cours sur les polynômes, on a montré la formule de Taylor pour les polynômes :

PROP : si $P \in K[X]$ et $n \geqslant \deg P$, alors

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k}$$

Et on a montré dans le cours d'algèbre linéaire qu'étant donnés $n+1$ éléments d'un corps K : $y_0, y_1, ..., y_n$, et un élément x_0 de K, il existe un unique polynôme de degré $\leqslant n$: $P \in K_n[X]$ tel que $P(x_0) = y_0, P'(x_0) = y_1, ...P^{(n)}(x_0) = y_n$.

COROLLAIRE : Ce polynôme s'écrit :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{k!} (X - x_0)^k = y_0 + y_1 (X - x_0) + \frac{y_2}{2} (X - x_0)^2 + ... + \frac{y_n}{n!} (X - x_0)^n}$$

D1

On peut donc poser la

DEF : étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fois dérivable en x_0, le *polynôme de Taylor* d'ordre n de f en x_0 est l'unique polynôme $T_{(n,f,x_0)}$ à coefficients réels de degré $\leqslant n$ ayant la même valeur et les mêmes n premières dérivées en x_0 que f en x_0.

$T_{(n,f,x_0)}$ est donc défini par :

$$\boxed{\begin{array}{l} T_{(n,f,x_0)} \in \mathbb{R}_n[X] \\ \hline \forall k \in [|0, n|] \;\; T^{(k)}_{(n,f,x_0)} (x_0) = f^{(k)} (x_0) \end{array}}$$

Il est donné par l'expression :

$$T_{(n,f,x_0)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)} (x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

La fonction polynomiale associée au polynôme de Taylor d'ordre n est appelée la fonction de Taylor d'ordre n de f en x_0.

REM : le polynôme de Taylor d'*ordre* n n'est pas forcément de *degré* n !

PROP, montrant qu'on peut toujours se ramener au cas $x_0 = 0$:

si f est une fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fois dérivable en x_0, soit g définie par $g(u) = f(x_0 + u)$, alors les polynômes de Taylor de f et g sont reliés par la relation :

$$\boxed{T_{(n,f,x_0)} (X) = T_{(n,g,0)} (X - x_0)}$$

D2

DEF : on dit qu'un polynôme est tronqué à l'ordre p si on remplace tous ses coefficients de degré $> p$ par des 0.

PROP : le polynôme de Taylor d'ordre p en 0 d'une fonction polynomiale f de degré n est le polynôme tronqué à l'ordre p du polynôme P associé à f ; par conséquent $T_{(p,f,0)} = P$ dès que $p \geqslant n$.

D3

Polynômes de Taylor à savoir par coeur :

$T_{(n,\exp,0)}(x) =$
$T_{(2p+1,\sin,0)}(x) = T_{(2p+2,\sin,0)}(x) =$
$T_{(2p,\cos,0)}(x) = T_{(2p+1,\cos,0)}(x) =$
$T_{(3,\tan,0)}(x) =$
$T_{(2p+1,\sinh,0)}(x) = T_{(2p+2,\sinh,0)}(x) =$
$T_{(2p,\cosh,0)}(x) = T_{(2p+1,\cosh,0)}(x) =$
$f(x) = (1+x)^{\alpha}$; $T_{(n,f,0)}(x) =$
cas $\alpha = n$: on retrouve la formule du binôme :
cas $\alpha = -1,\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}; T_{(n,f,0)}(x) =$
cas $\alpha = -p, p \in \mathbb{N},\ f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^p}; T_{(n,f,0)}(x) =$
cas $\alpha = -\dfrac{1}{2}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}; T_{(n,f,0)}(x) =$
cas $\alpha = \dfrac{1}{2}, f(x) = \sqrt{1+x}; T_{(3,f,0)}(x) =$

D4
Pour les exemples suivants, nous utiliserons le lemme ci-après, qui montre que pour obtenir le polynôme de Taylor d'une fonction, il suffit d'intégrer le polynôme de Taylor de sa dérivée, sans oublier de mettre la bonne constante d'intégration.

LEMME :

$$\boxed{T'_{(n,f,x_0)} = T_{(n-1,f',x_0)}}$$

D5

$f(x) = \ln(1+x); T_{(n,f,0)}(x) =$
$T_{(7,\arcsin,0)}(x) = T_{(8,\arcsin,0)}(x) =$
$T_{(2p+1,\arctan,0)}(x) = T_{(2p+2,\arctan,0)}(x) =$

D6
Voici par exemple le tracé des fonctions de Taylor de la fonction cos en 0 :

```
plot([seq((convert(series(cos(x),x=0,2*k+1),polynom)),k=0..5),cos(x)],x=-5..5,y=-1.2..1.2);
```

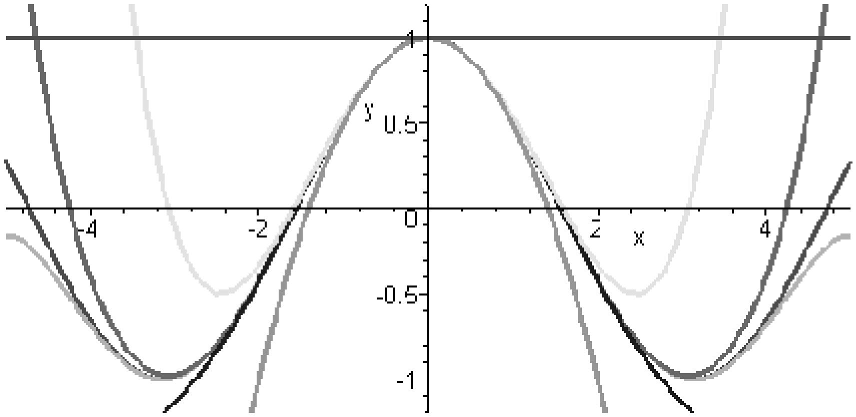
2) Formule de Taylor-Young.

DEF : le *reste de Taylor* à l'ordre n de f est la différence entre f et sa fonction de Taylor :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = T_{(n,f,x_0)}(x) + R_{(n,f,x_0)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{(n,f,x_0)}(x)$$

Il existe diverses *formules de Taylor* (Taylor-Young, Taylor-Lagrange, Taylor avec reste intégral), qui sont en fait diverses manières d'évaluer ce reste de Taylor ; les *inégalités de Taylor* sont, quant à elles, diverses manières d'encadrer ce reste, ou de majorer sa valeur absolue.

TH de TAYLOR-YOUNG (W.H. Young, 1862-1946) :



Si f est n fois dérivable en x_0 ($n \geqslant 1$) alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{(n,f,x_0)}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

ce qui peut s'écrire sous les diverses formes :

$$R_{(n,f,x_0)}(x) \underset{x \to x_0}{\ll} (x - x_0)^n \ , \ f(x) = T_{(n,f,x_0)}(x) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)}$$

D7

La démonstration sera faite en deux étapes :
1) Prouver que cela revient à démontrer que si g est n fois dérivable en 0 ($n \geqslant 1$) avec $g^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(u)}{u^n} = 0$$

2) Démontrer ceci par récurrence sur n.

REM : pour $n = 1$, la formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

est en fait la formule de définition de la dérivabilité.

CORO : si f est C^∞ en x_0, alors pour tout naturel n :

$$\boxed{f(x_0 + u) = f(x_0) + f'(x_0)u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}u^n + o(u^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}u^k + \boxed{o(u^n)}}$$

et donc :

$$\boxed{f(x_0 + u) = f(x_0) + f'(x_0)u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}u^n + O\left(u^{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}u^k + \boxed{O\left(u^{n+1}\right)}}$$

D8

Exemples à connaître par coeur :

$\dfrac{1}{1-u} = 1+u+u^2+....+u^n+o(u^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} u^k + o(u^n)$; $\dfrac{1}{1+u} =$
$\ln(1-u) =$ $\quad\quad\quad$ $\ln(1+u) =$
$\dfrac{1}{(1-u)^2} =$ $\quad\quad\quad$ $\dfrac{1}{(1+u)^2} =$
$(1+u)^\alpha = 1+\alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n) = \sum\limits_{k=0}^{n}$
$\dfrac{1}{(1-u)^\alpha} = 1+\alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}u^2 + ...+$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-u}} = 1+\dfrac{1}{2}u \quad u^2 \quad u^3 + ... + \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}u^n + o(u^n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k}u^k + o(u^n)$;
$\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = 1-\dfrac{1}{2}u \quad u^2 \quad u^3.... + (-1)^{\cdots}\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}u^n + o(u^n) =$
$\sqrt{1-u} = 1-\dfrac{1}{2}u - \quad u^2 - \quad u^3 - .... - \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}\dfrac{u^n}{2n-1} + o(u^n)$; $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{1}{2}u \quad u^2 \quad u^3 - ....$
$e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{}+\dfrac{u^4}{}+\dfrac{u^5}{}+....+\dfrac{u^n}{n!}+o(u^n) = \sum\limits_{k=0}^{n}$
$\cosh u = \mathit{partie\ paire}(e^u) = 1+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^4}{}+...+\dfrac{u^{2p}}{}+o\left(u^{2p}\right)$ (ou $o\left(u^{2p+1}\right)$) $= \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\sinh u = \mathit{partie\ impaire}(e^u) = u+\dfrac{u^3}{}+\dfrac{u^5}{}...+\dfrac{u^{2p+1}}{}+o\left(u^{2p+1}\right)$ (ou $o\left(u^{2p+2}\right)$) $= \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\cos u = 1-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^4}{}+...+(-1)^{\cdots}\dfrac{u^{2p}}{}+o\left(u^{2p}\right)$ (ou $o\left(u^{2p+1}\right)$) $= \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\sin u = u-\dfrac{u^3}{}+\dfrac{u^5}{}...+(-1)^{\cdots}\dfrac{u^{2p+1}}{}+o\left(u^{2p+1}\right)$ (ou $o\left(u^{2p+2}\right)$) $= \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\tan u = u+\dfrac{u^3}{3}+\dfrac{2}{15}u^5+\dfrac{17}{315}u^7+o\left(u^8\right)$
$\tanh u = u-\dfrac{u^3}{3}+\dfrac{2}{15}u^5-\dfrac{17}{315}u^7+o\left(u^8\right)$
$\dfrac{1}{1+u^2} = 1-u^2+u^4+...+(-1)^{\cdots}u^{2p}+o\left(u^{2p+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{p}$
$\arctan u = \vdots$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1+\dfrac{u^2}{..}+\dfrac{..}{..}u^4+o\left(u^5\right)$
$\arcsin u = \vdots$

D9

VI) DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1) Définition, unicité, du développement limité polynomial.

LEMME : si un polynôme à coefficients réels P de degré $\leqslant n$ vérifie $P(u) = \underset{u \overset{\neq}{\to} 0}{o}(u^n)$ alors $P = 0$.

D9

DEF : on dit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage pointé de x_0 (i.e. sur $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\setminus\{x_0\}$) possède un développement limité (polynomial) à l'ordre n en x_0 s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que

$$\boxed{\lim_{u \overset{\neq}{\to} 0} \frac{f(x_0+u) - \sum_{k=0}^{n} a_k u^k}{u^n} = 0}$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$\boxed{f(x_0+u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k + o\left(u^n\right)}$$

ou bien :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x-x_0\right)^k + \underset{x \to x_0}{o}\left(\left(x-x_0\right)^n\right)}$$

PROP (unicité du développement limité) : les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$, s'ils existent, sont uniques. De plus, si f possède un développement limité à l'ordre m en x_0 avec $m \geqslant n$, les $n+1$ premiers coefficients de ce développement sont $a_0, a_1, ..., a_n$.
D10

Vocabulaire : ces coefficients s'appellent les "coefficients" du développement limité, l'expression $\sum_{k=0}^{n} a_k u^k$, sa *partie régulière* et la fonction polynomiale f_n telle que $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x-x_0\right)^k$ est la *fonction polynomiale approchée à l'ordre* n de f en x_0.

Si r est le rang du premier a_k non nul (s'il y en a un) , $a_r u^r$ est appelé la *partie principale* du développement limité ; c'est un équivalent de $f(x_0+u)$ quant u tend vers 0.

REM 1 : si une fonction possède un développement à l'ordre n en x_0, elle en possède à tout ordre $\leqslant n$, obtenus en tronquant le premier.

REM 2 : posséder un développement limité à l'ordre 0 en x_0 (i.e.$\exists a_0 \ / \ f(x_0+u) = a_0 + o\left(1\right)$) signifie "avoir une limite stricte (égale à a_0) en x_0" ; dans ce cas, on posera toujours $f\left(x_0\right) = a_0$ de sorte que, dorénavant, la fonction f sera considérée comme continue en x_0.

E1

REM 3 : posséder un développement limité à l'ordre 1 en x_0 (i.e. .$\exists a_0, a_1 \ / \ f(x_0+u) = a_0 + a_1 u + o\left(u\right)$) signifie "être dérivable en x_0".

Le théorème de Taylor-Young vu dans le chapitre précédent permet d'obtenir un développement limité polynomial :

PROP : si f est n fois dérivable en x_0 alors elle possède un développement limité polynomial à l'ordre n en x_0 :

$$f(x_0+u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k + o\left(u^n\right) \text{ avec } a_k = \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}$$

Exemple : si on sait à l'avance que f est 5 fois dérivable en 3 et que $f\left(3+u\right) = 5u - 2u^2 - \frac{1}{5}u^5 + o\left(u^5\right)$, alors

$$f(3) = ..., f'(3) = ..., f''(3) = ..., f'''(3) = ..., f^{(4)}(3) = ..., f^{(5)}(3) = ...$$

ATTENTION : la réciproque est fausse dès que $n \geqslant 2$: une fonction peut très bien avoir un développement limité à l'ordre 2 en un point et ne pas être 2 fois dérivable en ce point (tout simplement parce que sa dérivée peut n'exister qu'en ce point, et non au voisinage).
E2

PROP : la partie régulière d'un DL en 0 d'une fonction paire est une expression polynomiale paire, et la partie régulière d'un DL en 0 d'une fonction impaire est un une expression polynomiale impaire.
D11

2) Opérations sur les développements limités polynomiaux.

La règle qu'il faut avoir en vue lorsqu'on fait des opérations sur les DL, est que

$$o(u^n) + o(u^m) = o\left(u^{\min(n,m)}\right)$$

En raccourci : dans une somme, c'est le petit o de plus bas degré "qui l'emporte".

a) Somme de deux développements limités.

E3 : $\cosh x\, e^{2x}$ à l'ordre 5 en 0, $\sin x \cos 2x$ à l'ordre 5 en 0, $\sin x$ à l'ordre 5 en $\pi/3$.

PROP : si

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f(x_0+u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k + o(u^n) \\ g(x_0+u) = \sum_{k=0}^{m} b_k u^k + o(u^m) \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : (f+g)(x_0+u) = \sum_{k=0}^{p} (a_k+b_k) u^k + o(u^p) \text{ avec } p = \min(n,m)}$$

D12

MORALITÉ : RIEN NE SERT DE DÉVELOPPER A DES ORDRES DIFFÉRENTS, L'ORDRE DE LA SOMME SERA LE PLUS PETIT DES DEUX.

b) Produit de deux développements limités.

E4 : $\arctan x \ln\left(1+x^2\right)$ à l'ordre 7 en 0.

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f(x_0+u) = \sum_{k=p}^{n} a_k u^k + o(u^n) \quad \text{avec } a_p \neq 0 \\ g(x_0+u) = \sum_{k=q}^{m} b_k u^k + o(u^m) \quad \text{avec } b_q \neq 0 \end{cases}}$$

$$\text{alors } \boxed{(\mathrm{C}) : (fg)(x_0+u) = \underbrace{a_p b_q u^{p+q} + \dots + c_r u^r}_{\substack{\text{produit des deux parties régulières} \\ \text{tronqué à l'ordre } r}} + o(u^r) \text{ avec } r = \min(q+n, p+m)}$$

D13

MORALITÉ : si on veut un développement du produit à l'ordre r il faut développer f à l'ordre $r-$ (valuation du DL de g) et g à l'ordre $r-$ (valuation du DL de f).

SI DONC LES DEUX DÉVELOPPEMENTS ONT UNE VALUATION NULLE, POUR AVOIR UN ORDRE r DANS LE PRODUIT, IL FAUT DÉVELOPPER CHACUN A L'ORDRE r (le produit des deux polynômes, de degré $\leqslant 2r$, devra donc être tronqué à l'ordre r).

E5

c) Composée de deux développements limités.

E6 : $\ln \cos x$, à l'ordre 6 en 0.

PROP (dans le cas où le deuxième développement commence par un terme en u) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} f(x_0+u) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k u^k}_{=P(u)} + o(u^n) \\ \begin{cases} g(u) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} b_k u^k}_{=Q(u)} + o(u^m) \quad \text{avec } b_1 \neq 0 \\ \text{(bien noter que le DL de } g \text{ est en 0 et que } b_0 = 0) \end{cases} \end{cases}}$$

$$\text{alors } \boxed{(\mathrm{C}) : f(x_0+g(u)) = \underbrace{a_0 + a_1 b_1 u + \dots + c_r u^r}_{P(Q(u)) \text{ tronqué à l'ordre } r} + o(u^r) \text{ avec } r = \min(n,m)}$$

MORALITÉ : dans le cas où le DL de g est de valuation 1, RIEN NE SERT DE DÉVELOPPER A DES ORDRES DIFFÉRENTS, l'ordre du développement de $f(x_0+g(u))$ SERA LE PLUS PETIT DES DEUX.
D14

PROP : cas général (en exercice)

$$\boxed{\text{si (H) : } \begin{cases} f(x_0+u) = a_0 + \underbrace{\sum_{k=p}^{n} a_k u^k}_{=P(u)} + o(u^n) \quad \text{avec } a_p \neq 0, p \geqslant 1 \\ g(u) = \underbrace{\sum_{k=q}^{m} b_k u^k}_{=Q(u)} + o(u^m) \quad \text{avec } b_q \neq 0 \end{cases}}$$

$$\text{alors } \boxed{\text{(C) : } f(x_0+g(u)) = \underbrace{a_0 + a_p (b_q)^p u^{pq} + \ldots + c_r u^r}_{P(Q(u)) \text{ tronqué à l'ordre } r} + o(u^r) \text{ avec } r = \min(m+q(p-1), qn)}$$

MORALITÉ : pour des calculs les plus économiques possibles, il faut prendre $m+q(p-1) = qn = r$, soit $m = q(n-p+1) = r - q(p-1)$. Si donc on veut un DL à l'ordre r, il faut prendre $n = \overline{E}\left(\frac{r}{q}\right)$ et $m = q(n-p+1)$; lorsque $q = p = 1$, on retrouve la règle simple : $\boxed{n = m = r}$.

E7

d) Inverse d'un développement limité.

E8

$$\boxed{\frac{1}{\cos x} = \text{...(ordre 6)}}$$

Méthode : si $f(x_0+u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k + o(u^n)$ avec $a_0 \neq 0$, on écrit

$$\frac{1}{f}(x_0+u) = \frac{1}{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k u^k + o(u^n)} = \frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} u^k + o(u^n)}_{=U}}\right) = \frac{1}{a_0}\frac{1}{1+U}$$

Le développement de $1/f$ en x_0 s'obtient donc en composant celui de $\frac{1}{1+U}$ avec celui de U.
E9

e) Quotient de deux développements limités.

On écrit $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ et on utilise b) et d).
E10 : $\tan x$ en 0 à l'ordre 7.

En conclusion, on peut dire que si f et g ont des développements limités polynomiaux à l'ordre n en x_0, alors $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) et $f \circ g$ (si $x_0 = 0$ et $g(0) = 0$), également, au même ordre .

3) Développements limités généralisés.

E11

DEF : soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ tels que si $i\neq j$, $f_i \underset{x_0}{\ll} f_j$ ou $f_j \underset{x_0}{\ll} f_i$; on dit qu'une fonction f définie au voisinage pointé de x_0 possède un développement limité (généralisé) suivant l'*échelle* $(f_i)_{i\in I}$ s'il existe des indices $i_1,...i_n\in I$ tels que :

$$f(x)=a_1f_{i_1}(x)+a_2f_{i_2}(x)+...+a_nf_{i_n}(x)+\underset{x\to x_0}{o}(f_{i_n}(x)),\ \text{avec } f_{i_1}\underset{x_0}{\gg}f_{i_2}\underset{x_0}{\gg}...\underset{x_0}{\gg}f_{i_n}$$

$a_1f_{i_1}(x)$ est la *partie principale* du DL, $a_1f_{i_1}(x)+a_2f_{i_2}(x)+...+a_nf_{i_n}(x)$, sa *partie régulière*, et $f_{i_n}(x)$ sa *précision.*

REM : un développement limité polynomial correspond donc au cas $x_0\in\mathbb{R}$ avec l'échelle $\left(x\to(x-x_0)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exemples classiques :

ex 1) $x_0=+\infty$ avec l'échelle $\left(x\mapsto x^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ (on parle alors souvent de développement "asymptotique").

On obtient des DL de la forme :

$$f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^m}\right)$$

et bien entendu, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}a_nx^n$ si $a_n\neq0$.

par exemple, si f possède un DL polynomial en 0, $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ possède un DL de ce type quand $x\to+\infty$.

E12

ex 2) $x_0=0$ avec l'échelle $\left(x\mapsto x^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$

on obtient des DL de la forme :

$$f(x)=\frac{b_m}{x^m}+...+\frac{b_1}{x}+a_0+a_1x...+a_nx^n+\underset{x\to0}{o}(x^n)$$

On retrouve ici les DLP comme cas particuliers.

Par exemple, si f possède un DL polynomial en 0, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^m}$ possède un DL de ce type quand $x\to0$.

Dans ce cadre rentrent les trois développements à savoir retrouver rapidement :

$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}+\underset{x\to0}{o}(x^6)$
$\coth x=\frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\frac{2x^5}{945}\underset{x\to0}{o}(x^6)$
$\frac{1}{\sin x}=$

E13

ex 3) (généralisation du 1)) $x_0=+\infty$ avec l'échelle $\left(x\mapsto x^\alpha(\ln x)^\beta\right)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$

On obtient des DL du style :

$$f(x)=-x(\ln x)^2+\frac{(\ln x)^3}{x^3}+2x\ln x+x^2\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}+3\frac{x^2}{\ln x}+x\sqrt{x}+\underset{x\to+\infty}{o}(............)$$

(remettre les fonctions dans l'ordre et indiquer le petit o) :

$$f(x)=.............-...........-............-...........-...........-.......-..........+\underset{x\to+\infty}{o}(............)$$

Exemples classiques :

- la relation $h_n=\ln n+\gamma+o(1)$ vue dans le cours sur les suites est un développement de ce type.

- la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ équivaut au développement asymptotique :

$$\boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1)}$$

ex 4) (généralisation du 2)) $x_0 = 0$ avec l'échelle $\left(x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta\right)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$

On obtient des DL du style :

$$f(x) = 3\frac{x\sqrt{x}}{\ln x} - \frac{2}{x^2} + 1 + x^2\sqrt{x} + \frac{(\ln x)^3}{x^3} - x(\ln x)^2 + x\sqrt{x} + \underset{x\overset{>}{\to}0}{o}(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

(remettre les fonctions dans l'ordre et indiquer le petit o):

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots + \underset{x\overset{>}{\to}0}{o}(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Exemple à savoir retrouver E14 :

$$\boxed{\arccos(1-u) = \sqrt{2u} + \frac{1}{12}u\sqrt{2u} + \frac{3}{160}u^2\sqrt{2u} + o\left(u^2\sqrt{u}\right)}$$

la méthode la plus rapide étant d'utiliser la relation :

$$\boxed{\arccos(1-u) = 2\arcsin\sqrt{\frac{u}{2}}}$$

VII) PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

1) Déterminer l'ensemble de définition.

2) Déterminer un ensemble d'étude.

a) Rechercher une une relation du type $f(x+T) = f(x)$ ou $f(x+T) = -f(x)$ avec $T > 0$.

Dans le premier cas, f est T-périodique et on étudie la fonction sur $[a, a+T] \cap D_f$; la courbe complète est obtenue par translations de la courbe sur $[a, a+T]$, de vecteurs $kT\overrightarrow{i}, k \in \mathbb{Z}$.

Dans le deuxième cas, on étudie la fonction sur $[a, a+T] \cap D_f$; la courbe complète est obtenue par translations de la courbe sur $[a, a+T]$, de vecteurs $kT\overrightarrow{i}, k \in \mathbb{Z}$, accompagnée de symétrie par rapport à Ox quand k est impair. Remarquons que dans ce cas, f est $2T$-périodique.

c) Rechercher une relation du type $f(b-x) = f(x)$ ou $f(b-x) = -f(x)$ (lorsque $b = 0$, f est paire ou impaire).

On étudie alors f sur $[b/2, +\infty[\cap D_f$, ou sur $[b/2, b/2 + T/2] \cap D_f$ si le a) a été concluant. On effectuera une symétrie par rapport à $x = b/2$ dans le premier cas, et par rapport à $B(b/2, 0))$ dans le deuxième.

On étudie donc f sur un certain ensemble $D_1 \subset D_f$.

E15 : $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

3) Déterminer les limites aux bornes ouvertes des intervalles composant l'ensemble d'étude.

Dans le cas d'une limite finie en une borne finie, prolonger f par continuité.

E16 : $f(x) = x^x$

4) Étudier la dérivabilité.

En général, la fonction est, par les théorèmes généraux, C^∞ sur un ensemble $D_2 \subset D_1$. Reste à examiner les points litigieux (points où les $\sqrt{}$ s'annulent par exemple) et les prolongements par continuité.

E17 : $f(x) = x^{x^2}, g(x) = x\sqrt{\sin x}$.

5) Calculer $f'(x)$ pour $x \in D_2$.

6) Rechercher le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signes, faisant intervenir autant de fonctions auxiliaires que nécessaire et en déduire les variation de f dans la dernière ligne du tableau.

E18 : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}, g(x) = \ln^2 x + x\ln x + x^2$.

7) Ébaucher le tracé de la courbe, en reliant les points remarquables du tableau précédent, tracés avec leurs tangentes.
8) Étudier les branches infinies.
a) si $\lim\limits_{x\to+\infty(\text{ou } -\infty)} f(x) = l \in \mathbb{R}$, la droite $y = l$ est asymptote horizontale.
b) si $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = x_0$ est asymptote verticale.
c) si $\lim\limits_{x\to+\infty(\text{resp. } -\infty)} f(x) = \pm\infty$.
α) Direction asymptotique.

DEF : on dit que C_f admet une *direction asymptotique* au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) si le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite l quand $x \to +\infty$(ou $-\infty$).
Quand $l = +\infty$, on parle de direction asymptotique *verticale.*
Quand $l = 0$, on parle de direction asymptotique *horizontale.*
Quand $l = a \in \mathbb{R}^*$, on parle de direction asymptotique (oblique) de pente a.
Interprétation géométrique : la courbe admet une direction asymptotique au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi la droite $(OM(x))$ possède une position limite quand $x \to +\infty$ (resp. $-\infty$).
ATTENTION : QUI DIT DIRECTION ASYMPTOTIQUE NE DIT PAS FORCÉMENT (DROITE) ASYMPTOTE.
Exemples :
$*$ $y = \sin x$, $y = \ln x, y = \sqrt{x}$ possèdent une direction asymptotique horizontale, mais pas d'asymptote.
$*$ $y = ax + \sin x$, $y = ax + \ln x, y = ax + \sqrt{x}$ possèdent une direction asymptotique oblique de pente a, mais d'asymptote.
$*$ $y = x^2$, $y = e^x$ possèdent une direction asymptotique verticale, mais pas d'asymptote.
REM : la direction asymptotique est donnée par la partie principale $pp(f)(x)$ du développement de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ (resp. $-\infty$)
si $pp(f)(x) \gg x$, la direction asymptotique est verticale
si $pp(f)(x) \ll x$, la direction asymptotique est horizontale
si $pp(f)(x) = ax$, la direction asymptotique est oblique de pente a.
Attention : il peut ne pas y avoir de direction asymptotique ; exemple : $y =$

DEF : lorsqu'il y a une direction asymptotique verticale, ou lorsqu'il y a une direction asymptotique de pente a et que $\lim(f(x) - ax)$ a une limite INFINIE, on dit que la branche est parabolique.

E19

β) Asymptote, courbe asymptote.
DEF : la fonction g est *asymptote* à f (ou la courbe C_g est asymptote à la courbe C_f) au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty(\text{resp. } -\infty)} f(x) - g(x) = 0$ (ce qui peut s'écrire $f(x) = g(x) + \underset{x\to+\infty(\text{resp. } -\infty)}{o}(1)$).
Si C_g est une droite (soit $g(x) = ax + b$), on parle d'*asymptote* tout court.

Méthode pratique :
Déterminer un développement asymptotique de $f(x)$ quand $x \to +\infty$(resp. $-\infty$) à la précision 1 :

$$f(x) = \underbrace{pp(f)(x) + ... + b}_{=g(x)} + o(1)$$

La courbe asymptote est alors $y = g(x)$ et la direction asymptotique est donnée par la partie principale, comme décrit ci-dessus ; si $f(x) = ax + b + o(1)$ il y a une asymptote.

E20 : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, g(x) = \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$
REM : on cherchera aussi la position par rapport à l'asymptote ; celle-ci sera déterminée par un terme supplémentaire $h(x)$ dans le développement ci-dessus :

$$f(x) = \underbrace{pp(f)(x) + ... + b}_{=g(x)} + h(x) + o(h(x))$$

On aura alors en effet $f(x) - g(x) \sim h(x)$, et la position sera déterminée grâce au

LEMME : si deux fonctions sont équivalente en un point, elles ont le même signe au voisinage de ce point.
REM : on obtient souvent un développement de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Remplir alors ce tableau avec les différents cas possibles :

$a \neq 0$	....
$a = 0$ et $b \neq 0$	
$a = b = 0$	

REM : lorsque f est une fonction rationnelle, prendre comme fonction asymptote la partie entière (puisque la partie fractionnaire tend vers 0 en l'infini).

E21 : $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$.