III. FONCTIONS CIRCULAIRES

1) DEF :

$\cos x = \overline{OA}$

$\sin x = \overline{OB}$

$\tan x = \overline{IN}$, si N existe, i.e. $x \neq \pi/2 \mod \pi$

$\cot x = \overline{JP}$, si P existe, i.e. $x \neq 0 \mod \pi$

PROP :

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, si $x \neq \pi/2 \mod \pi$
$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, si $x \neq 0 \mod \pi$

D1

2) FORMULES CLASSIQUES

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
(1′) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, (diviser (1) par $\cos^2 x$)
(1″) $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, (diviser (1) par $\sin^2 x$)

A savoir par coeur ou à l'aide d'un dessin : jamais à partir des formules $\cos(a+b)$ etc. :

symétrie/ Ox	symétrie / O	symétrie / Oy	symétrie / $y = x$	rotation angle $\pi/2$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

On en déduit : $\cos(x + n\pi) =$ ...., $\sin(x + n\pi) =$ ....

Fonctions circulaires d'une somme :

(2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	(3) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	(4) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
(2') $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	(3') $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	(4') $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

D2

Formules de l'angle double, et de l'angle moitié, à savoir toutes par coeur, et retrouver :

(5) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (vient de (2))
(5') $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ (mettre $\cos^2 x$ en facteur dans (5) et utiliser (1'))
(5″) $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ avec $t = \tan \dfrac{x}{2}$

(6) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ (vient de (5) et (1))
(6') $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
(6") $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$

(7) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ (vient de (5) et (1))
(7') $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
(7") $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

(8) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (vient de (3))
(8′) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
(8″) $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ (mettre $\cos^2 x$ en facteur dans (8) et utiliser (1′))
(8‴) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ avec $t = \tan\frac{x}{2}$

(9) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (vient de (4))
(9’) $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ avec $t = \tan\frac{x}{2}$ (vient de (9) ou du quotient de (8‴) et (5″))

(10) $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ (vient du quotient de (7”) et (8′))

D3

Formules de l’angle triple :

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$	$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$
$\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$	$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

D4

Formules de linéarisation (produits en sommes) :

(11) $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ (faire (2) + (2′))
(12) $\sin a\sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$ (faire (2′) − (2))
(13) $\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ (faire (3) + (3’))

Applications : E1

Formules d’antilinéarisation (sommes en produits) :

(14) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ (prendre (11) avec $p = a+b$ et $q = a-b$)
(15) $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ (prendre (12) avec $p = a+b$ et $q = a-b$)
(16) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ (prendre (13) avec $p = a+b$ et $q = a-b$)
(16’) $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ (changer q en $-q$ dans (16))

On en déduit $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
D5

Plus généralement :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

φ étant défini modulo 2π par :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

D6

Rem : l'angle φ est l'un des angles du triangle rectangle de côtés a et b.

3) Équations trigonométriques :

$$\boxed{\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = x + 2k\pi}$$

$$\boxed{\cos x = \cos y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = \pm x + 2k\pi}$$

$$\boxed{\sin x = \sin y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = x + 2k\pi \text{ ou } \pi - x + 2k\pi}$$

$$\boxed{\tan x = \tan y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = x + k\pi}$$

D7

4) Valeurs remarquables

x	$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{..} - \frac{\pi}{..}$	$\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{\ \ } + \sqrt{\ \ }}{\ \ }$	$\frac{\sqrt{\ \ }\sqrt{\ \ + \sqrt{\ \ }}}{\ \ }$								
$\sin x$	$\frac{\sqrt{\ \ } - \sqrt{\ \ }}{\ \ }$	$\frac{\sqrt{\ \ } -}{\ \ }$			$\frac{\sqrt{\ \ }\sqrt{\ \ - \sqrt{\ \ }}}{\ \ }$					
$\tan x$		$\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$			$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$					
$\cot x$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$1 + \sqrt{2}$		$\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$					

D8

5) Étude de la fonction cosinus.

a) Réduction de l'ensemble d'étude.

Il suffit d'étudier cos sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On obtiendra toute la courbe par une symétrie par rapport à Oy, suivie d'une symétrie glissée d'axe Ox et de vecteur de cordonnées $(\pi{,}0)$, puis de translations de vecteurs $(2k\pi, 0)$.

D9

b) Variations et tracé de la courbe.

D10

6) Étude de la fonction sinus.

a) Réduction de l'ensemble d'étude.

Il suffit d'étudier sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On obtiendra toute la courbe par une symétrie par rapport à O, suivie d'une symétrie glissée d'axe Ox et de vecteur de cordonnées $(\pi{,}0)$, puis de translations de vecteurs $(2k\pi, 0)$.

D11

b) Variations et tracé de la courbe.

D12

Rem : la courbe de sin se déduit de celle de cos par une translation de vecteur $\pi/2\,\overrightarrow{i}$.

Ceci provient de la relation :

D13

7) Étude de la fonction tangente.

a) Dérivabilité.

PROP : la fonction tan est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

D14

b) Réduction de l'ensemble d'étude.

Il suffit d'étudier tan sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On obtient toute la courbe par symétrie par rapport à O et des translations de vecteurs de coordonnée $(k\pi, 0)$.

D16

c) Variations et tracé de la courbe.

D17

Exercice : faire sur le même modèle l'étude de la fonction cot et trouver la transformation faisant passer d'une courbe à l'autre.