VI) FONCTIONS USUELLES.

1) FONCTIONS LOGARITHME

a) Introduction.

On recherche des fonctions transformant des produits en sommes, i.e.

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Rem : si une telle fonction est définie en 0, alors elle est nulle partout, ce qui est peu intéressant.

D1

Par contre, on va démontrer le

TH : Si

$$\begin{cases} \forall x, y > 0 \ \ f(xy) = f(x) + f(y) \\ \text{et } f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\end{cases}$$

alors $f(1) = 0$ et il existe une constante k telle que

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{k}{x}$$

D2

DEF : On désigne par ln (logarithme népérien) l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, qui s'annule en 1, autrement dit :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

REM : la conclusion du TH ci-dessus peut donc s'énoncer :

$$\exists k \in \mathbb{R} \ \ / \ \ f = k \ln$$

D3

b) Propriétés de la fonction ln.

P1 $\forall x, y > 0 \ \ \ln xy = \ln x + \ln y$
P2 $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x > 0 \ \ \ln x^n = n \ln x$
P3 $\forall x > 0 \ \ \ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$
P4 $\forall n \in \mathbb{Z} \ \ \forall x > 0 \ \ \ln x^n = n \ln x$
P5 $\forall r \in \mathbb{Q} \ \ \forall x > 0 \ \ \ln x^r = r \ln x$
P6 la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
P7 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
P8 $\forall x > 0 \ \ \ln x \leqslant x - 1$ (à bien visualiser)
P9 $\forall x > 0 \ \ \ln x \leqslant 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$
P10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (à savoir interpréter graphiquement)
P11 $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
P12 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

D4

c) Étude de la fonction ln et définition de e.

PROP et DEF : il existe un unique réel $e > 1$ tel que $\ln e = 1$; la tangente à la courbe de ln au point de coordonnées $(e, 1)$ passe par O.

D5
On démontre que $e \simeq 2,718\ 28\ 18\ 28\ 45\ 90\ 45.....$ (plus facile à retenir que π !)

d) Fonctions logarithme de base a.

Le théorème D3 du 1) est en fait une équivalence :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x, y > 0 \;\; f(xy) = f(x) + f(y) \\ f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \;\; / \;\; f = k \ln}$$

D6
DEF : si $a > 0$ et $\neq 1$, la fonction logarithme de base a est l'unique fonction dérivable f sur $]0, +\infty[$ vérifiant

$$\forall x, y > 0 \;\; f(xy) = f(x) + f(y) \;\text{ et }\; f(a) = 1$$

Notations : $\log_a$, $\log_{10} = \log$ (en python : ln s'écrit log , et log : log10)
PROP :

$P1$	$\forall x > 0 \;\; \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
$P2$	$\forall a, b, c > 0,\; a, b \neq 1 \quad \log_a b . \log_b c = \log_a c$ (relation de Chasles)

D7

2) Notions sur les fonctions réciproques.

DEF : f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ (mais pouvant être définie sur un ensemble plus grand que I) ; soit $J = f(I) = \{y \in \mathbb{R} \;/\; \exists x \in \mathbb{R} \;/\; y = f(x)\}$ l'image de I par f.

On dit que la restriction de f à I possède une fonction réciproque si pour tout y de J il existe un *unique* élément x de I tel que $y = f(x)$. Dans ce cas, on définit la fonction réciproque f^{-1} de f sur I comme la fonction qui à y de J fait correspondre cet élément x.

On a donc

$$y = f(x) \text{ avec } x \in I \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ avec } y \in J$$

ATTENTION : ne pas confondre f^{-1} et $1/f$!!!!!

REM 1 : $M(x, y)$ appartient à la courbe de f sur I ssi $N(y, x)$ appartient à la courbe de f^{-1} sur J : ces deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

REM 2 : si f est strictement monotone sur I, alors f possède sur I une fonction réciproque, mais la réciproque est fausse.

D8
* Continuité de f^{-1}

TH : si f est strictement monotone et continue sur un *intervalle* I, alors f^{-1}est strictement monotone de même sens que f et continue sur J.

D 9 (pour la monotonie seulement) .

* Dérivabilité de f^{-1}.

TH : si f est strictement monotone et dérivable sur un *intervalle* I, alors f^{-1} est dérivable en tout point $y = f(x)$ de J tel que $f'(x) \neq 0$ et alors

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Si $f'(x) = 0$, alors la tangente à la courbe de f^{-1} en $N(y, x)$ est verticale.

D10 (très partielle).

Exemples : E1 : $f(x) = x^2, x^3, x^3 + x$, $\mathrm{x}^3 - 3x$ (cf. exercice 1)

3) FONCTIONS EXPONENTIELLE
a) Définitions et propriétés de la fonction exp.

DEF : la fonction exp est la fonction réciproque de ln :

$$\boxed{x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x}$$

Justification de cette définition : D11

Propriétés :

P1 $\forall x, y \quad \exp(x+y) = \exp x \exp y$
P2 $\forall x \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$
P3 $\forall x \ \forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp(rx) = (\exp x)^r$
P4 $\exp 1 = e$

D12

NOTATION : comme $\exp r = e^r$ pour r rationnel, $\exp x$ est noté e^x pour tout x réel ; les propriétés précédentes se réécrivent donc

P1 $\forall x, y \ \ e^{x+y} = e^x e^y$
P2 $\forall x \ \ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
P3 $\forall x \ \forall r \in \mathbb{Q} \quad e^{rx} = (e^x)^r$
P4 $e^1 = e$

b) Étude de la fonction exp.

PROP : l'ensemble de définition de exp est $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable (donc continue).

Calcul de $\exp'$:

$$\exp' y = \exp y$$

D13

CORO : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions du type

$$x \mapsto \lambda e^{ax}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

D14

P6 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
P7 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (interprétation graphique)
P8 $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$
P9 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

D15

Tracé de la courbe.

c) Exponentielle de base a

DEF : si $a > 0$ et $\neq 1$, la fonction exponentielle en base a est la réciproque de la fonction logarithme en base a :

$$\boxed{x = \exp_a y \text{ (ou } a^y) \Leftrightarrow y = \log_a x}$$

PROP :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a x = a^x = e^{x \ln a}$$
$$\log_a (b^x) = x \log_a b$$

D16

Remarque : il faut comprendre $\log_a x$ comme l'exposant de a si l'on exprime x comme puissance de a ; par exemple, $\log(2014)$ est le nombre x tel que $2014 = 10^x$; on trouve $2014 = 10^{3,304059466.....}$

d) Symbole a^b.

DEF :

1	$a^0 = 1$ quel que soit a (y compris $a = 0$)
2	si b est un *entier* > 0 $a^b = \underbrace{a.a.....a}_{b \text{ fois}}$ quel que soit a
3	si b est un *entier* < 0 $a^b = \dfrac{1}{a^{-b}}$ seulement pour $a \neq 0$
4	si $a > 0$ et b quelconque, $a^b = e^{b \ln a}$.

REMARQUES :
- a^b n'est donc défini pour tout b que si $a > 0$; si vous devez étudier une fonction $x \mapsto a(x)^{b(x)}$ vous devrez toujours l'étudier pour $a(x) > 0$.

- $\sqrt[3]{x}$ est défini pour tout x, tandis que $x^{1/3}$ n'est donc défini que pour $x > 0$!!!!

PROPRIÉTÉS :

1	$a^{b+c} = a^b a^c \quad (a > 0)$
2	$a^{b-c} = \dfrac{a^b}{a^c} \quad (a > 0)$
3	$\left(a^b\right)^c = a^{bc} = (a^c)^b \quad (a > 0)$

D17

Exemple de mésaventure pouvant arriver si l'on ne prend pas $a > 0$:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

ATTENTION : a^{b^c} se lit $a^{(b^c)}$, de même, en python, a**b**c est interprété comme a**(b**c) mais attention, sur certaines calculatrices, $a \wedge b \wedge c$ est interprété comme $(a \wedge b) \wedge c$!!!!
Moralité : en informatique, mieux vaut mettre les parenthèses.

e) Fonctions puissances.

Étude de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ suivant les différentes valeur de α.

D18

Exo : déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{1 + x^\beta}$, puis $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x^\alpha}{1 + x^\beta}$ suivant les valeurs de α et β.

4) FONCTIONS HYPERBOLIQUES

a) Définitions.

DEF : Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique sont respectivement les parties paire et impaire de la fonction exponentielle :

$$\boxed{\text{ch}x\ (\text{ou }\cosh\ x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \ \text{sh}\,x(\text{ou }\sinh\ x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}}$$

Les fonctions tangente et cotangente hyperbolique sont définies par :

$$\boxed{\text{th}\ x\ (\text{ou }\tanh x) = \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\ x}, \coth x = \frac{\text{ch}\ x}{\text{sh}\,x}}$$

Remarque :

$$\boxed{\text{th}\ x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}$$

b) Propriétés.

1.	$\begin{cases} e^x = \text{ch}\ x + \text{sh}\,x \\ e^{-x} = \text{ch}\ x - \text{sh}\,x \end{cases}$
2.	$\begin{cases} \text{ch}^2 x - \text{sh}^2\,x = 1 \\ 1-\text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} \\ \coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\text{sh}^2\,x} \end{cases}$
3.	$\begin{cases} \text{ch}\ (a+b) = \text{ch}\ a\text{ch}\ b + \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b,\ \text{ch}\ (a-b) = \text{ch}\ a\text{ch}\ b - \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b \\ \text{sh}\,(a+b) = \text{sh}\,a\ \text{ch}\ b + \text{ch}\ a\,\text{sh}\,b,\ \ \text{sh}\,(a-b) = \text{sh}\,a\ \text{ch}\ b - \text{ch}\ a\,\text{sh}\,b \\ \text{th}\ (a+b) = \dfrac{\text{th}\ a + \text{th}\ b}{1+\text{th}\ a\ \text{th}\ b},\ \ \text{th}\ (a-b) = \dfrac{\text{th}\ a - \text{th}\ b}{1-\text{th}\ a\ \text{th}\ b} \end{cases}$
4.	$\begin{cases} \text{ch}\ 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2\,x = \dfrac{1+\text{th}^2 x}{1-\text{th}^2 x} \\ \text{ch}\ x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2},\ \ \text{avec } t = \text{th}\dfrac{x}{2} \end{cases}$
5.	$\begin{cases} \text{ch}\ 2x = 2\text{ch}^2 x - 1 \\ 1+\text{ch}\ x = 2\text{ch}^2\dfrac{x}{2} \end{cases}$
6.	$\begin{cases} \text{ch}\ 2x = 1 + 2\,\text{sh}^2\,x \\ \text{ch}\ x - 1 = 2\,\text{sh}^2\,\dfrac{x}{2} \end{cases}$
7.	$\begin{cases} \text{sh}\,2x = 2\,\text{sh}\,x\cosh x = \dfrac{2\ \text{th}\ x}{1-\text{th}^2 x} \\ \text{sh}\,x = \dfrac{2t}{1-t^2},\ \ \text{avec } t = \text{th}\dfrac{x}{2} \end{cases}$

D19

b) Étude de ch et sh.

PROP : ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et ch$'$ = sh et sh$'$ =ch.

REM : sh$'$ (0) =ch(0) = 1 donc $\dfrac{\text{sh}\ u}{u} \underset{u\to 0}{\to} 1.$

Tableau de variations et limites au bornes.

REM : les courbes de ch et sh sont asymptotes en $+\infty$ à la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^x$.

Tracé des courbes.

D20

c) Étude de th et coth.

PROP : th est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\text{th}' = \dfrac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2$ (à savoir par coeur).
coth est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\text{coth}' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2} = 1 - \text{coth}^2$ (inutile de retenir).

D21
Tableaux de variations et limites au bornes.

Tracé des deux courbes dans le même graphique.

Pourquoi des fonctions *circulaires* et *hyperboliques* ?

Car elles permettent de paramétrer, les premières un cercle, les deuxièmes une hyperbole, en effet :

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$
$$x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} x = \pm\text{ch } t \\ y = \text{sh } t \end{cases}$$

5) FONCTION RECIPROQUE DE sin.

DEF : la fonction arcsin (ou $\sin^{-1}$) est la fonction réciproque de la restriction de sin à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} x = \arcsin y \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sin x \\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Justification de cette définition : D22

Exemples de calculs : E2

PROP : l'ensemble de définition de arcsin est $[-1,1]$, elle y est continue, mais elle n'est dérivable que sur $]-1,1[$.

D23

Tracé de la courbe.
Calcul de $\arcsin'$:

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

D24

CORO :

$$\forall x \in \,]-1,1[\qquad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$$

D 25
PROP : la fonction arcsin est impaire :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x$$

D26

6) FONCTION RECIPROQUE DE cos.
DEF : la fonction arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0,\pi]$:

$$\begin{cases} x = \arccos y \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Justification de cette définition : D27

Exemples de calculs : E3

PROP : l'ensemble de définition de arccos est $[-1,1]$, elle y est continue, mais elle n'est dérivable que sur $]-1,1[$.

D28

Tracé de la courbe ; pb du point d'intersection des courbes de cos et d'arccos.
Calcul de arccos$'$:

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

D29

PROP : on a les relations :

$$\begin{array}{lcll} \forall x & \in & [-1,1] & \arccos(-x) = \pi - \arccos x \\ \forall x & \in & [-1,1] & \arccos x = \pi/2 - \arcsin x \end{array}$$

D30
Rem : la deuxième relation montre que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite : ......
Ceci fait qu'on utilise plutôt la fonction arcsin, qui est impaire.

7) Fonction réciproque de tan.
DEF : la fonction arctan est la fonction réciproque de la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$x = \arctan y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = \tan x \\ x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\end{array} \right.$$

Justification de cette définition : D31

Exemples de calculs : E4

PROP : l'ensemble de définition de arctan est $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable (donc continue).

D32

Tracé de la courbe.
Calcul de arctan$'$:

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}$$

D33

CORO :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

D34

PROP : la fonction arctan est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan(-x) = -\arctan x$$

PROP :

$$\begin{aligned}\arctan\frac{1}{x} &= \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\arctan x \text{ si } x>0\\ -\dfrac{\pi}{2}-\arctan x \text{ si } x<0\end{cases}\\ \arctan a+\arctan b &= \arctan\frac{a+b}{1-ab}\begin{cases}\text{tout court si } ab<1\\ +\pi \text{ si } ab>1 \text{ et } a \text{ et } b>0\\ -\pi \text{ si } ab>1 \text{ et } a \text{ et } b<0\end{cases}\end{aligned}$$

D35

E5 : calculer $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}$; $\arctan 2+\arctan 3$.
Exercice : définir de la même façon la fonction arccot, réciproque de cot sur $]0,\pi[$, et montrer la relation :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \operatorname{arccot} x=\pi/2-\arctan x$$

Suite HORS PROGRAMME : FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES.

8) FONCTION RECIPROQUE DE sh.

DEF : la fonction argsh (ou argsinh) est la fonction réciproque de sh :

$$x=\text{argsh } y\Leftrightarrow y=\operatorname{sh} x$$

Justification de cette définition : D36

NOTE : arg est l'initiale d'argument, à prendre dans le sens suivant : l'argument de $f(x)$ est x.
PROP : argsh est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$.

D37

Tracé de la courbe.
Calcul de argsh :

$$\text{argsh}'y=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

D38

CORO :

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\text{argsh } x$$

PROP : la fonction argsh est impaire.

9) FONCTION RECIPROQUE DE ch.
DEF : la fonction argch est la fonction réciproque de la restriction de ch à $[0,+\infty[$:

$$\begin{cases}x=\text{argch } y\\ y\in[1,+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\text{ch } x\\ x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Justification de cette définition : D39

PROP : l'ensemble de définition de argch est $[1,+\infty[$, elle y est continue, mais elle n'est dérivable que sur $]1,+\infty[$.

D40

Tracé de la courbe.
Calcul de argch$'$:

$$\operatorname{argch}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

D41

10) FONCTION RECIPROQUE DE th.
DEF : la fonction argth est la fonction réciproque de th :

$$\left\{\begin{array}{c} x = \operatorname{argth} y \\ y \in \left]-1,1\right[\end{array}\right. \Leftrightarrow y = \operatorname{th} x$$

Justification de cette définition : D42

PROP : l'ensemble de définition de la fonction argth est $\left]-1,1\right[$, et elle y est dérivable (donc continue).

D43

Tracé de la courbe.
Calcul de argth$'$:

$$\operatorname{argth}' y = \frac{1}{1-y^2}$$

D44

PROP : la fonction argth est impaire.

EXERCICE : montrer les expressions explicites :

$\operatorname{argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $\operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.