Dans tout ce cours, K désigne un corps commutatif.

I) DÉFINITIONS

1) Corps des fractions rationnelles à coefficients dans un corps.

PROP (admise) et DEF : pour tout anneau commutatif intègre A, il existe un corps noté $K(A)$, unique à isomorphisme près, contenant A comme sous anneau et dont tout élément s'écrit comme le quotient d'un élément de A par un élément non nul de A :

$$K(A) = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a, b \in A, b \neq 0 \right\}$$

Ce corps $K(A)$ s'appelle le *corps des fractions* de A.

Exemple : $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

DEF : le corps des fractions de l'anneau des polynômes à coefficients dans K est appelé le corps des *fractions rationnelles* à coefficients dans K, et noté $K(X)$:

$$K(X) = \left\{ \frac{A}{B} \ / \ A, B \in K[X], B \neq 0 \right\}$$

Une fraction rationnelle est donc le quotient de deux polynômes.

2) Écriture sous forme de fraction irréductible.

PROP : toute fraction rationnelle $F \in K(X)$ s'écrit de façon unique sous la forme $F = \dfrac{A}{B}$ avec A et B polynômes premiers entre eux et B unitaire ; A est le *numérateur réduit* de F et B son *dénominateur réduit.* On dit que A/B est la forme *irréductible* de F.

D1

E1 : forme irréductible de $\dfrac{X^{n+1}-1}{3(X^2-1)}$.

3) Racines et pôles d'une fraction rationnelle.

DEF : les *racines* d'une fraction rationnelle sont les racines de son numérateur réduit, et ses *pôles* celles de son dénominateur réduit, avec les ordres de multiplicité correspondants.

E2 : racines et pôles de $\dfrac{X^4-1}{X^2(X+1)}$, sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$.

REM : sur $\mathbb{C}$, toute fraction rationnelle qui n'est pas un polynôme a au moins un pôle.

4) Degré d'une fraction rationnelle.

PROP et DEF : si $F \in K(X)$ s'écrit $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$, alors $\deg A - \deg B = \deg C - \deg D$; par définition, cet entier est le *degré* de F.

D2

REM : une fraction rationnelle de degré positif n'est pas forcément un polynôme !

PROP : si F et G sont deux fractions rationnelles, alors

$$\boxed{\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)\,,\ \deg(FG) = \deg F + \deg G}$$

D3

5) Substitution d'un scalaire à l'indéterminée ; fonction rationnelle.

DEF : si F est une fraction rationnelle d'écriture irréductible A/B et x un scalaire non pôle de F, on pose $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$; la *fonction* rationnelle associée à F, d'ensemble de définition $K \setminus \{\text{pôles de } F\}$ est la fonction $x \mapsto F(x)$.

PROP : si deux fractions rationnelles prennent les mêmes valeurs en tout point d'une partie infinie de K, alors elles sont égales.

D4

DEF : une fonction f de K dans K est dite rationnelle sur une partie I de son ensemble de définition s'il existe une fraction rationnelle $F \in K(X)$ telle que $\forall x \in I \ \ f(x) = F(x)$.

REM : d'après la prop. ci-dessus, cette fraction rationnelle est unique si I est infini.

6) Partie entière d'une fraction rationnelle.

PROP et DEF : si $F \in K(X)$ s'écrit $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$, alors le quotient de la division euclidienne de A par B est le même que celui de la division euclidienne de C par D ; on appelle ce polynôme la *partie entière* (ou *polynomiale*) de F ; notation : $E(F)$ ou $\lfloor F \rfloor$.

$F - E(F)$ est la *partie fractionnaire* de F.

La fonction polynômiale associée à la partie entière de F est appelée la partie entière de la fonction polynomiale associée à F.

D5

E3

PROP : si F est de degré < 0, $E(F) = 0$, et sinon $\deg(E(F)) = \deg(F)$ (et donc $E(F) = 0 \Leftrightarrow \deg F < 0$).

D6

CNS : un polynôme Q est la partie entière d'une fraction rationnelle F si et seulement si $F - Q$ est de degré strictement négatif.

D7

APPLICATION : la partie entière d'une somme est la somme des parties entières :

$$E(F+G) = E(F) + E(G)$$

D8

REM : ceci différencie la notion de partie entière dans les entiers et dans les rationnels.

APPLICATION : la partie entière d'un fonction rationnelle f de degré > 0 est une fonction polynomiale asymptote à f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

II) DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES.

1) Introduction sur des exemples.

E4

2) Partie polaire d'une fraction rationnelle.

TH 1 : Soit $F \in K(X)$, x_0 un pôle d'ordre k de F ;
alors il existe un unique $(a_1, ..., a_k) \in K^k$ et une unique $G \in K(X)$ tels que

$$F = \frac{a_1}{X - x_0} + ... + \frac{a_k}{(X - x_0)^k} + G$$
avec x_0 non pôle de G

DEF : $\dfrac{a_1}{X - x_0} + ... + \dfrac{a_k}{(X - x_0)^k}$ est la partie polaire de F relative au pôle x_0 et a_q est le *résidu d'ordre* q de F relatif au pôle x_0 (et a_1 est le *résidu* tout court).

Nous allons d'abord montrer un LEMME : Soit $F = \dfrac{A}{(X - x_0)^k Q} \in K(X)$, ($x_0$ pôle d'ordre $k \geqslant 1$ de F), alors il existe un unique $a_k \in K$ et une unique $G = \dfrac{A_1}{(X - x_0)^{k-1} Q_1} \in K(X)$ ayant x_0 pour pôle d'ordre $k - 1$ tels que

$$F = \frac{a_k}{(X - x_0)^k} + G$$

On a : $a_k = \dfrac{A(x_0)}{Q(x_0)}$.

ANALYSE

si $F \left(= \dfrac{A}{(X - x_0)^k Q} \right) = \dfrac{a_k}{(X - x_0)^k} + \dfrac{A_1}{(X - x_0)^{k-1} Q_1}$ en multipliant par $(X - x_0)^k$, on obtient : $\dfrac{A}{Q} = a_k + (X - x_0) \dfrac{A_1}{Q_1}$, donc, en faisant $X := x_0$

$$a_k = \frac{A(x_0)}{Q(x_0)}$$

SYNTHESE

Posons $a_k = \dfrac{A(x_0)}{Q(x_0)}$ et $G = F - \dfrac{a_k}{(X - x_0)^k} = \dfrac{A}{(X - x_0)^k Q} - \dfrac{a_k}{(X - x_0)^k} = \dfrac{A - a_k Q}{(X - x_0)^k Q}$.

Comme $(A - a_k Q)(x_0) = A(x_0) - a_k Q(x_0) = 0$, il existe A_1 tel que $A - a_k Q = (X - x_0) A_1$
et on peut écrire $F = \dfrac{a_k}{(X - x_0)^k} + \dfrac{A_1}{(X - x_0)^{k-1} Q}$ ce que nous voulions (et remarquons qu'on a même $Q_1 = Q$)

Exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{X+1}{(X-1)^2(X^2+1)} &= \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{X+1}{(X-1)^2(X^2+1)} - \frac{a}{(X-1)^2} = \frac{}{(X-1)^2} + \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{(X-1)^2(X^2+1)} \\
&= \frac{}{(X-1)^2} + \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{(X-1)^2(X^2+1)} \\
&= \frac{}{(X-1)^2} + \frac{}{(X-1)(X^2+1)} \\
&= \frac{}{(X-1)^2} - \frac{}{X-1} + \frac{}{(X-1)(X^2+1)} + \frac{}{X-1} \\
&= \frac{}{(X-1)^2} - \frac{}{X-1} + \frac{}{(X-1)(X^2+1)} \\
&= \boxed{\frac{}{(X-1)^2} - \frac{}{X-1} + \frac{}{(X^2+1)}}
\end{aligned}$$

D9 par récurrence sur k :

Pour $k = 0$, $G = F$

Supposons que le théorème 1 soit vrai à l'ordre $k - 1$, et montrons-le à l'ordre k.
Soit donc x_0 un pôle d'ordre k de F; on a donc : $F = \dfrac{A}{(X - x_0)^k Q}$ où A et Q sont des polynômes, $Q(x_0) \neq 0$.

D'après le lemme $F = \dfrac{a_k}{(X - x_0)^k} + \dfrac{A_1}{(X - x_0)^{k-1} Q}$, a_k unique.
On applique l'hypothèse de récurrence à $F_1 = \dfrac{A_1}{(X - x_0)^{k-1} Q}$ et on obtient bien

$$\begin{aligned}
F &= \frac{a_k}{(X-x_0)^k} + F_1 = \frac{a_k}{(X-x_0)^k} + \frac{a_1}{X-x_0} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{(X-x_0)^{k-1}} + G = +\frac{a_1}{X-x_0} + \ldots + \frac{a_k}{(X-x_0)^k} + G \\
&\text{avec } x_0 \text{ non pôle de } G
\end{aligned}$$

les a_i uniques, donc G aussi.

Remarque : cette démonstration est algorithmique (même si on verra des méthodes plus simples plus loin) ; on détermine $a_k = \dfrac{A(x_0)}{Q(x_0)}$, puis $F_1 = F - \dfrac{a_k}{(X - x_0)^k}$; on simplifie par $X - x_0$ et on détermine a_{k-1} etc.

TH 2 : toute fraction rationnelle est somme de ses parties polaires et d'une fraction rationnelle sans pôle ; cette écriture s'appelle la *décomposition de F en éléments simples de première espèce.*
Plus précisément, si $F = \dfrac{A}{(X - x_1)^{\alpha_1} \ldots. (X - x_p)^{\alpha_p} Q}$ avec Q sans racine dans K, alors

$$F = F_1 + \ldots + F_p + \frac{B}{Q} \text{ où } F_i \text{ est la partie polaire de } F \text{ relative à } x_i$$

D10

COROLLAIRE : toute fraction rationnelle de dénominateur scindé est la somme de ses parties polaires $\boxed{\text{et de sa partie entière.}}$
D11

3) Calcul direct du résidu d'ordre maximum.

On sait que si $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{(X-x_0)^k Q} = \dfrac{a_1}{X-x_0} + ... + \dfrac{a_k}{(X-x_0)^k} + G$ alors $a_k = \underline{\qquad}$; ceci nécessite la connaissance du polynôme Q, qui n'est parfois pas simple à obtenir ; mais la prop suivant permet de calculer a_k uniquement à partir de A et B :

PROP : $a_k = k!\dfrac{A(x_0)}{B^{(k)}(x_0)}$, et donc, en particulier si x_0 est un pôle simple :

$$a_1 = \frac{A(x_0)}{B'(x_0)}$$

D12

APPLICATIONS E5

1) $B = (X-x_1)...(X-x_n)$, $G = \dfrac{A}{B} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{..../....}{X-x_k} + ...$

2) sur $\mathbb{C}$, $\dfrac{1}{X^n-1} = ...$

4) Décomposition en éléments simples de première et deuxième espèce dans $\mathbb{R}[X]$.

TH : soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle réelle irréductible dont le dénominateur est décomposé en produit de facteurs irréductibles : $B = (X-x_1)^{\alpha_1}...(X-x_p)^{\alpha_p}\left(X^2+u_1X+v_1\right)^{\beta_1}...\left(X^2+u_qX+v_q\right)^{\beta_q}$.

Alors on peut écrire, sous une unique forme :

$$\begin{aligned} F &= E(F) + \left(\frac{a_{11}}{X-x_1} + ... + \frac{a_{1\alpha_1}}{(X-x_1)^{\alpha_1}}\right) + ... + \left(\frac{a_{p1}}{X-x_p} + ... + \frac{a_{p\alpha_p}}{(X-x_p)^{\alpha_p}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{b_{11}X+c_{11}}{X^2+u_1X+v_1} + ... + \frac{b_{1\beta_1}X+c_{1\beta_1}}{(X^2+u_1X+v_1)^{\beta_1}}\right) + ... + \left(\frac{b_{q1}X+c_{q1}}{X^2+u_qX+v_q} + ... + \frac{b_{q\beta_q}X+c_{q\beta_q}}{(X^2+u_qX+v_q)^{\beta_q}}\right) \end{aligned}$$

Par exemple : $\dfrac{2X^5+X^2+8}{(X-2)^3(X^2+2X+2)^2}$ s'écrit sous la forme :

III) MÉTHODES PRATIQUES DE DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES.

NB : fonction $\left\{\begin{array}{c}\text{mathematica}\\ \text{maple}\end{array}\right.$ de décomposition en éléments simples : $\left\{\begin{array}{c}\text{Apart[F]}\\ \text{convert(F,parfrac,x)}\end{array}\right.$.

Cas du dénominateur scindé.

1. Simplifier la fraction.
2. Déterminer la partie entière par division euclidienne.
3. Écrire a priori la décomposition avec des coefficients indéterminés.
4. On peut toujours mettre au même dénominateur et égaler les coefficients des numérateurs (méthode "Obélix", risques d'erreurs) ; on obtient alors un système d'équations linéaires à résoudre.

   Exemple : $\dfrac{X^3+1}{X^3(X-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X^3} + \dfrac{d}{X-1} + \dfrac{e}{(X-1)^2}$ aboutit au système $\left\{\begin{array}{c} a+d=0 \\ -2a+b-d+e=1 \\ a-2b+c=0 \\ b-2c=0 \\ c=1 \end{array}\right.$

   Mais on peut souvent avoir plus rapide !
5. S'il n'y a qu'un pôle x_0, tout exprimer en fonction de $Y = X - x_0$; la décomposition arrive toute seule.

   Exemple : $\dfrac{X^2+1}{(X-2)^3} = \dfrac{(Y+2)^2+1}{Y^3} = \dfrac{.....}{Y} + \dfrac{........}{Y^2} + \dfrac{.........}{Y^3} = \dfrac{\qquad}{X-2} + \dfrac{\qquad}{(X-2)^2} + \dfrac{\qquad}{(X-2)^3}$.

6. Les résidus d'ordre maximum se calculent directement avec la formule $a_k = \dfrac{A(x_0)}{Q(x_0)} \left(= k! \dfrac{A(x_0)}{B^{(k)}(x_0)} \right)$.
   (a) Si tous les pôles sont simples, c'est fini.
   Exemples : $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)...(X+n)}, \dfrac{X^n}{X^n-1}, \dfrac{X^{n+1}}{X^n-1}$.
   (b) On peut retrancher les fractions obtenues de la fraction de départ, simplifier, et chercher les résidus précédents etc... (c'est la méthode utilisée dans la démonstration)

7. Faire des valeurs particulières (non pôles) donne des relations, mais en général, seuls 0, 1 et -1 ne donnent pas des calculs inextricables.
   Exemple : $\dfrac{X}{(X-1)^2(X+1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(X-1)^2} + \dfrac{a}{X-1} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{X+1}$
   $X := 0$ donne immédiatement $a =$ ....

8. Si la fraction rationnelle est paire ou impaire, changer X en $-X$ et utiliser l'unicité.
   Exemple E6 : $\dfrac{X}{(X^2-1)^2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X+1} + \dfrac{d}{(X+1)^2}$
   L'imparité donne :
   Calcul de b (d'où d)
   $X := 0$ donne une relation déjà connue. Pour le dernier coeff à calculer, voir 10.

9. Si la fraction rationnelle est réelle et qu'il y a des pôles complexes, conjuguer ; les résidus des pôles conjugués sont conjugués.
   Exemple : $\dfrac{X}{(X^2+1)^2} = \dfrac{a}{X-i} + \dfrac{b}{(X-i)^2} + \dfrac{c}{X+i} + \dfrac{d}{(X+i)^2}$
   La conjugaison donne :

10. La méthode qui sauve : s'il reste encore q coefficients à calculer, multiplier par X^q et égaler les parties entières des deux membres. On obtient l'égalité de deux polynômes de degré $\leqslant q-1$, d'où q relations, et les q coefficients restants.

    Exemples : terminer E6.
    E7 : $\dfrac{X^3+1}{X^3(X-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X^3} + \dfrac{d}{X-1} + \dfrac{e}{(X-1)^2}$

    (a) multiplier par X^3 et faire $X := 0$ donne $c = 1$.
    (b) multiplier par $(X-1)^2$ et faire $X := 1$ donne $e = 2$.
    (c) multiplier par X^3 et prendre les parties entières des deux membres donne
    $\left\lfloor \dfrac{X^3+1}{X^2-2X+1} \right\rfloor = aX^2 + bX + 1 + d \left\lfloor \dfrac{X^3}{X-1} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \dfrac{X^3}{X^2-2X+1} \right\rfloor$
    soit $X + 2 = aX^2 + bX + 1 + d\left(X^2+X+1\right) + 2(X+2)$
    d'où $\begin{cases} 0 = a + d \\ 1 = b + d + 2 \\ 2 = 1 + d + 4 \end{cases}$
    Pour (c) on aurait aussi pu faire d'abord $X := -1$ qui donnait une relation, puis multiplier par X^2 et prendre les parties entières des deux membres.

    E8 : $\dfrac{X}{(X-1)^2(X+3)^2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X+3} + \dfrac{d}{(X+3)^2}$
    Calcul de b et d
    $X := 0$ donne :
    Multiplier par X donne :
    résultat : $a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ...., $d =$ ....

11. Un cas particulier à connaître.

    PROP (application directe des dérivées logarithmiques) : si P est scindé,

$$\frac{P'}{P} = \sum_{a=\text{racine de }P} \frac{\text{ordre}(a)}{X-a}$$