

I) SYSTÈMES LINÉAIRES.

0) Exemples introductifs.

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ x + 2y + z - 2t = -3 \\ 2x + y - z + t = 2 \\ x - 2y + z - t = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 2z + t = 2 \\ x + 2y - z + 2t = 3 \\ x + 2y - 2z + 2t = 4 \\ x + 2y + z - t = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 2z + t = 2 \\ x + 2y - z + 2t = 3 \\ x + 2y - 2z + 2t = 4 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 2t = 2 \\ x + 3y - 3z + 3t = 3 \\ y - 2z + t = 1 \end{cases}$$

1) Définitions et notations.

DEF : si n et p sont deux entiers ≥ 1 , on désigne par *matrice* à n lignes et p colonnes à éléments dans \mathbb{R} une application de $[[1, n]] \times [[1, p]]$ dans \mathbb{R} ; l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Notation d'une matrice : $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, ou par un tableau rectangulaire :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{np} \end{bmatrix}.$$

Une matrice à une seule ligne est appelée "matrice-ligne" et une matrice à une seule colonne une "matrice-colonne".

Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients dans \mathbb{R} est défini par la donnée d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

à n lignes et p colonnes (appelée la *matrice* du système), et d'une matrice colonne à n termes $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ (appelée le "second membre" du système) et s'écrit :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & : E_1 \\ \dots & \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ip}x_p = b_i & : E_i \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{np}x_p = b_n & : E_n \end{cases}$$

(S) équivaut donc à " $\forall i \in [[1, n]] \quad E_i$ " avec $E_i : \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j = b_i$.

Résoudre le système (S), c'est déterminer, soit en extension s'il est fini, soit de façon paramétrique s'il est infini, l'ensemble S des éléments $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ vérifiant (S).

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p / \forall i \in [[1, n]] \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j = b_i \right\}$$

Attention, le nombre de solutions du système est donc le nombre d'éléments de S ; par exemple, le système $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ n'a pas deux solutions 3 et 1, mais une solution (3, 1).

2) Méthode de résolution par ÉCHELONNEMENT.

a) Manipulations élémentaires.

Il y en a 3, et 3 seulement :

1. Échanger deux équations :	$\begin{cases} E \\ F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \\ E \end{cases}$
2. Multiplier une équation par un élément λ de K non nul :	$E \Leftrightarrow \lambda E$
3. Ajouter une équation à une autre :	$\begin{cases} E \\ F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E \\ F + E \end{cases}$

REM : DANS LA MANIP 3, L'ÉQUATION QUI A SERVI À MODIFIER UNE AUTRE ÉQUATION DOIT RESTER TELLE QUELLE DANS LE SYSTÈME (éventuellement multipliée par un λ non nul par la manip 2).

Exemples : les équivalences suivantes peuvent-elles se ramener à une suite de manipulations élémentaires ??

$$\begin{cases} E \\ F \end{cases} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} E \\ F + \lambda E \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}; \quad \begin{cases} E \\ F \end{cases} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} E + F \\ F - E \end{cases}$$

$$\begin{cases} E \\ F \end{cases} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} E + \lambda F \\ F + \mu E \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \quad \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} E + F \\ F + G \\ G + E \end{cases}$$

$$\begin{cases} E \\ F \\ G \\ H \end{cases} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} E + F \\ F + G \\ G + H \\ H + E \end{cases}$$

D1

Moralité : ne jamais faire de combinaisons "en boucle".

b) Méthode de résolution par échelonnement (pivot de Gauss).

PROP : si $n, p \geq 2$, on peut toujours, à l'aide de manipulations élémentaires, ramener le système

$$(S) : \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_n \end{cases} \text{ à un système } (S') : \begin{cases} E'_1 \\ E'_2 \\ \dots \\ E'_n \end{cases} \text{ tel que le sous système } (T') \text{ formé des } n-1 \text{ équations } E'_2, \dots, E'_n \text{ ne fasse plus}$$

intervenir que $p-1$ inconnues au plus.

D2

L'algorithme du pivot de Gauss consiste à effectuer ces manipulations pour obtenir (T') , puis à refaire ces manipulations sur (T') , ceci jusqu'à obtenir un sous-système n'ayant plus qu'une inconnue, ou plus qu'une équation.

Exemples E2

$$\text{On aboutit alors à un système } (S_{\text{échélonné}}) : \begin{cases} a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1j}x_j + \dots + a'_{1p}x_p = b'_1 & : F'_1 \\ \dots & \dots \\ a'_{i1}x_1 + \dots + a'_{ij}x_j + \dots + a'_{ip}x_p = b_i & : F'_i \\ \dots & \dots \\ a'_{n1}x_1 + \dots + a'_{nj}x_j + \dots + a'_{np}x_p = b_n & : F'_n \end{cases} \text{ qui s'écrit en fait :}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \underbrace{a'_{1,j_1}}_{\neq 0} x_{j_1} + & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & +a'_{1p} x_p = b'_1 \\ & & \underbrace{a'_{2,j_2}}_{\neq 0} x_{j_2} + & \dots & \dots & \dots & \dots & +a'_{2p} x_p = b'_2 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \underbrace{a'_{i,j_i}}_{\neq 0} x_{j_i} + & \dots & +a'_{ip} x_p = b'_i \\ & & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & \underbrace{a'_{r,j_r}}_{\neq 0} x_{j_r} + & +a'_{rp} x_p = b'_r \\ & & & & & & & 0 = b'_{r+1} \\ & & & & & & & 0 = b'_n \end{array} \right.$$

qui est dit "échelonné" ; les r équations de premier membre non nul, et les inconnues correspondantes $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ sont dites "principales" ; le nombre r est appelé le *rang* du système (on démontrera que ce nombre est toujours le même quelle que soit la façon d'échelonner le système). Les $p - r$ inconnues non principales sont dites "secondaires".

Les $n - r$ dernières équations sont appelées les "équations de compatibilité" ; si l'un des b'_i est non nul , le système est dit "incompatible" : S est vide.

Sinon, on termine la résolution du système en faisant passer les inconnues secondaires dans le deuxième membre et en exprimant, en commençant par le bas, successivement chaque inconnue principale en fonction des inconnues secondaires.

S'il y a alors des inconnues secondaires, le système est dit "indéterminé" et le nombre $p - r$ est appelé "l'ordre de l'indétermination". S'il n'y en a pas, la solution est unique.

Exemple :
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m^2 \end{cases}$$

Remarques importantes :

- un système dont le second membre est nul possède toujours comme solution la solution nulle $(0, \dots, 0)$: il est donc toujours compatible ; un tel système est dit "homogène", ou "sans second membre".
- le rang d'un système ne dépend pas du second membre ; tous les systèmes compatibles de même matrice ont donc la même indétermination que celle du système sans second membre associé.

Premier cas, le plus simple : $n = p = r$ (ssi il n'y a ni inconnue secondaire, ni équation de compatibilité) ; le système est dit "de CRAMER" (Gabriel Cramer, 1704 - 1752).

Le système échelonné est triangulaire :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \underbrace{a'_{11}}_{\neq 0} x_1 + & \dots & \dots & \dots & \dots & & & +a'_{1n} x_n = b'_1 \\ & & \underbrace{a'_{22}}_{\neq 0} x_2 + & \dots & \dots & \dots & & +a'_{2n} x_n = b'_2 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \underbrace{a'_{ii}}_{\neq 0} x_i + & \dots & +a'_{in} x_n = b'_i \\ & & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & & \underbrace{a'_{nn}}_{\neq 0} x_n = b'_n \end{array} \right.$$

Il y a dans ce cas toujours solution unique.

Deuxième cas : $n > r, p = r$ (ssi il n'y a pas d'inconnue secondaire, mais il y a des équations de compatibilité).

Soit le système est incompatible, soit il est compatible et, après avoir supprimé les équations de compatibilité, on retombe sur un système de Cramer d'ordre r .

Troisième cas : $n = r, p > r$ (ssi il y a des inconnues secondaires, mais pas d'équation de compatibilité).

Il y a toujours une infinité de solutions, avec une indétermination d'ordre $p - r$.

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \underbrace{a'_{1,j_1} x_{j_1}}_{\neq 0} + & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & + a'_{1_p} x_p = b'_1 \\ & & & & & & & & & & & + a'_{2_p} x_p = b'_2 \\ & & & & & & & & & & & + a'_{i_p} x_p = b'_i \\ & & & & & & & & & & & + a'_{n_p} x_p = b'_n \\ & & & & & & & & & & & + a'_{n_p} x_p = b'_n \end{array} \right.$$

Quatrième cas : $n > r, p > r$ (ssi il y a des inconnues secondaires, et des équations de compatibilité).

Soit le système est incompatible, soit il est compatible et, après avoir supprimé les équations de compatibilité, on retombe sur le cas précédent.

BLAGUE : pourquoi un gauss est-il égal à $\pi/2$? Car.....

II) Points, vecteurs.

1) Généralités.

* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff (ABDC)$ est un parallélogramme $\iff [AD]$ et $[BC]$ ont même milieu

(équivalent aussi à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \stackrel{def}{=} \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

* étant donné un point A et un vecteur \vec{u} , il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; ce point B pourra être noté

$$B = A + \vec{u}$$

(par contre, on ne peut pas additionner deux points).

Notations :

D , droite, \overrightarrow{D} droite vectorielle associée à D (ou encore direction de D), ensemble des vecteurs joignant deux points de D .

P plan, \overrightarrow{P} plan vectoriel associé à P (ou encore direction de P), ensemble des vecteurs joignant deux points de P .

E_3 l'espace (sous-entendu : de dimension 3), $\overrightarrow{E_3}$ l'ensemble de ses vecteurs.

Attention : une droite est un ensemble de points ; donc un pointune droite, tandis qu'une droite.....un plan.

Rem : si $O \in D, \overrightarrow{D} = \{ \overrightarrow{OM} / M \in D \}$, si $O \in P, \overrightarrow{P} = \{ \overrightarrow{OM} / M \in P \}$, et si $O \in E_3, \overrightarrow{E_3} = \dots\dots\dots$

D1
 DEF : des points sont dits alignés s'ils appartiennent à une même droite, coplanaires s'ils appartiennent à un même plan. Des vecteurs sont dits colinéaires s'ils appartiennent à une même droite vectorielle, coplanaires s'ils appartiennent à un même plan vectoriel.

PROP :

si $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / \vec{v} = \lambda \vec{u}$
 si \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires, \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires $\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$.

III) Droites et plans.

1) Droites.

Une droite est entièrement définie par la donnée :

- de deux de ses points A et B ; on a alors

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff A, B, M \text{ sont alignés} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB} \\ &\iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} / M = A + \lambda \overrightarrow{AB}} \end{aligned}$$

- d'un de ses points A et d'un vecteur *directeur* \vec{u} (c'est-à-dire un vecteur non nul de sa direction) ; on a alors :

$$\begin{aligned} M \in \text{droite}(A, \vec{u}) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \vec{u} \\ &\iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} / M = A + \lambda \vec{u}} \end{aligned}$$

2) Plans.

Un plan est entièrement défini par la donnée :

- de trois de ses points A, B, C non alignés ; on a alors

$$\begin{aligned} M \in (ABC) &\iff A, B, C, M \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / M = A + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}} \end{aligned}$$

- de deux de ses points A et B , et d'un vecteur \vec{u} de sa direction, non colinéaire à \overrightarrow{AB} ; on a alors :

$$\begin{aligned} M \in \text{plan}(A, B, \vec{u}) & \\ &\iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{u} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / M = A + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \vec{u}} \end{aligned}$$

- d'un de ses points A , et de deux vecteurs non colinéaires \vec{u}, \vec{v} de sa direction ; on a alors :

$$\begin{aligned} M \in \text{plan}(A, \vec{u}, \vec{v}) & \\ &\iff \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / M = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}} \end{aligned}$$

(\vec{u}, \vec{v}) est appelé un couple de vecteurs *directeurs* de P , ou une *base* de \vec{P} .

3) Parallélisme.

a) Droites entre elles.

DEF : deux droites sont parallèles si elles ont la même direction :

$$D \parallel D' \iff \vec{D} = \vec{D}'$$

Remarque : deux droites parallèles sont forcément coplanaires (i.e. incluses dans un même plan)

Attention : dans le plan, deux droites sont parallèles ssi elles sont confondues ou d'intersection vide, mais on peut trouver dans l'espace deux droites d'intersection vide et non parallèles (donc forcément non coplanaires).

On dit parfois qu'un vecteur est *parallèle* à une droite pour dire qu'il appartient à sa direction.

b) Droites et plans.

DEF : une droite est parallèle à un plan si sa direction est incluse dans celle du plan

$$D \parallel P \iff \vec{D} \subset \vec{P}$$

PROP : dans E_3

$$D \parallel P \iff D \subset P \text{ ou } D \cap P = \emptyset$$

On dit parfois qu'un vecteur est *parallèle* à un plan pour dire qu'il appartient à sa direction.

c) Plans entre eux.

DEF : deux plans sont parallèles s'ils ont la même direction :

$$P \parallel Q \iff \vec{P} = \vec{Q}$$

PROP : dans E_3

$$P \parallel Q \iff P = Q \text{ ou } P \cap Q = \emptyset$$

4) Systèmes de coordonnées et représentations des droites et plans.

4.1) Dans le plan.

a) Coordonnées cartésiennes.

DEF : un repère (cartésien) du plan est un triplet $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ formé d'un point et de deux vecteurs non colinéaires.

Le couple $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est appelé une *base* du plan vectoriel associé.

PROP et DEF : tout $\left\{ \begin{array}{l} \text{point } M \\ \text{vecteur } \vec{u} \end{array} \right.$ possède un unique couple de coordonnées, dites *cartésiennes*, (x, y) dans $\left\{ \begin{array}{l} R \\ B \end{array} \right.$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \end{array} \right.$$

On écrit $M(x, y)$ ou $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$, idem pour \vec{u} .

DEF : une *représentation cartésienne* d'une partie du plan est une condition nécessaire et suffisante portant sur (x, y) pour qu'un point $M(x, y)$ appartienne à cette partie.

PROP : toute droite du plan possède une représentation cartésienne de type paramétrique :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{array} \right.$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $\vec{u}(a, b)$ est un vecteur directeur de la droite et $M_0(x_0, y_0)$ un point de cette droite.

REM : en pratique, on omet parfois le $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mais il ne faut pas oublier qu'il est indispensable pour donner un sens à la phrase.

D4

CORO : toute droite du plan possède une représentation cartésienne du type :

$$ax + by = c$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$, unique à un coefficient multiplicatif près, appelée "équation cartésienne".

D5

EX : l'équation de la droite passant par $(a, 0)$ et $(0, b)$, avec $ab \neq 0$ s'écrit (et se retient facilement) sous la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

REM : les droites non parallèles à Oy ont une unique équation cartésienne du type $y = ax + b$, celles parallèles à Oy , une unique équation du type $x = a$.

4.2) Dans l'espace.

a) Coordonnées cartésiennes.

DEF : un repère (cartésien) de E_3 est un quadruplet $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé d'un point et de trois vecteurs non coplanaires.

PROP et DEF : tout $\left\{ \begin{array}{l} \text{point } M \\ \text{vecteur } \vec{u} \end{array} \right.$ possède un unique triplet de coordonnées, dites *cartésiennes*, (x, y, z) dans $\left\{ \begin{array}{l} R \\ B \end{array} \right.$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{array} \right.$$

On écrit $M(x, y, z)$ ou $M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$.

DEF : une *représentation cartésienne* d'une partie de l'espace est une condition nécessaire et suffisante portant sur (x, y, z) pour qu'un point $M(x, y, z)$ appartienne à cette partie.

PROP : tout plan possède une représentation cartésienne de type paramétrique :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a + \mu d \\ y = y_0 + \lambda b + \mu e \\ z = z_0 + \lambda c + \mu f \end{array} \right.$$

telle que $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(d, e, f)$ sont deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de ce plan.

D6

CORO : tout plan possède une équation cartésienne du type :

$$ax + by + cz = d$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, unique à un coefficient multiplicatif près.

D7

REM : les plans non parallèles à Oz ont une unique équation cartésienne du type $z = ax + by + c$, ceux parallèles à Oz , une unique équation du type $y = ax + b$ ou $x = a$.

EX : l'équation du plan passant par $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ et $(0, 0, c)$, avec $abc \neq 0$ s'écrit (et se retient facilement) sous la forme :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

PROP : Les droites de E_3 ont une représentation paramétrique du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{array} \right.$$

où $\vec{u} \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$ est un vecteur directeur de la droite.

On en déduit le système d'équations cartésiennes :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

avec la convention que si un dénominateur est nul, le numérateur correspondant est nul aussi.

D8

Une droite peut aussi être définie par intersection de deux plans, et possède donc une représentation formée de la conjonction de deux équations cartésiennes (on parle alors de système d'équations cartésiennes).

REM : toute droite possède un unique système d'équations cartésiennes du type :

$$\begin{cases} z = ax + b \text{ ou bien } x = a \\ z = cy + d \text{ ou bien } y = c \end{cases}$$

D9

IV) Quelques applications dans le plan ou dans l'espace.

Nous allons définir des applications F de \mathcal{P} dans \mathcal{P} , ou de \mathcal{E}_3 dans \mathcal{E}_3 ; l'image d'un point M par F sera, traditionnellement, notée M' .

DEF : on dit qu'une partie X de P ou E_3 est invariante par F si $F(X) = X$; cela se traduit par l'équivalence ;

$$M \in X \Leftrightarrow M' \in X$$

1) Les translations.

DEF : la translation de vecteur \vec{u} est l'application notée $T_{\vec{u}}$ qui à M fait correspondre $M' = M + \vec{u}$.

REM : elle est donc caractérisée par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

PROP1 : une translation est caractérisée par $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

PROP2: $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$, $T_{\vec{u}}$ est bijective de réciproque $T_{-\vec{u}}$.

D10

Expression analytique de la translation

D11

Exemple : la courbe d'une fonction f périodique de période τ est invariante par la translation de vecteur $\tau \vec{i}$

D12

2) Les homothéties.

DEF : l'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'application notée $H_{\Omega,k}$ qui à M fait correspondre M' défini par

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

PROP1 : une homothétie de rapport $k \neq 1$ est caractérisée par $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$.

PROP2 : $H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,k'} = H_{\Omega,kk'} = H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,k'}$, et si $k \neq 0$, $H_{\Omega,k}$ est bijective de réciproque $H_{\Omega,1/k}$.

PROP3 : La composée de 2 homothéties de rapport k et k' est une homothétie de rapport kk' , éventuellement une translation si $kk' = 1$.

D13

Expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et de rapport k :
$$\begin{cases} x' = x_0 + k(x - x_0) \\ y' = y_0 + k(y - y_0) \\ z' = z_0 + k(z - z_0) \end{cases}$$

PROP : l'expression analytique générale d'une homothétie ou d'une translation est
$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \\ z' = kz + c \end{cases}$$

Si $k \neq 1$, c'est une homothétie, si $k = 1$, c'est une translation.

D14

Exemple : l'image par l'homothétie de centre O et de rapport k d'une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ est la courbe d'équation cartésienne $f\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) = 0$; en particulier l'image de la courbe d'équation $y = f(x)$ est la courbe d'équation $y = kf\left(\frac{x}{k}\right)$.

D15

3) Les symétries centrales.

DEF: les symétries centrales sont les homothéties de rapport -1 : $S_\Omega = H_{\Omega, -1}$.

PROP : $S_{\Omega'} \circ S_\Omega = T_{\vec{u}}$, $S_\Omega \circ T_{\vec{u}} = S_{\Omega'}$, $T_{\vec{u}} \circ S_\Omega = S_{\Omega'}$.

D16

Exemple : les courbes des fonctions impaires sont symétriques par rapport à O .

D17

4) Les projections.

DEF dans le plan ; soient D et D' deux droites sécantes ; la projection de base D et de direction D' (ou "sur D parallèlement à D' ") est l'application qui à M fait correspondre M' défini par

$$\begin{cases} 1) M' \in D \\ 2) (MM') \text{ parallèle à } D' \end{cases}$$

DEF dans l'espace ; soient D et P une droite et un plan sécants ;

la projection de base P et de direction D (ou "sur P parallèlement à D ") est l'application qui à M fait correspondre M' défini par

$$\begin{cases} 1) M' \in P \\ 2) (MM') \text{ parallèle à } D \end{cases}$$

la projection de base D et de direction P (ou "sur D parallèlement à P ") est l'application qui à M fait correspondre M' défini par

$$\begin{cases} 1) M' \in D \\ 2) (MM') \text{ parallèle à } P \end{cases}$$

REM1 : une projection p vérifie $p \circ p = p$

REM2 : une projection définie ci-dessus n'est jamais bijective.

E1 : exemples d'expressions analytiques :

5) Les symétries.

DEF dans le plan ; soient D et D' deux droites sécantes ; la projection de base D et de direction D' (ou "par rapport à D parallèlement à D' ") est l'application qui à M fait correspondre M' défini par

$$\begin{cases} 1) \text{ le milieu de } [MM'] \in D \\ 2) (MM') \text{ parallèle à } D' \end{cases}$$

DEF dans l'espace ; soient D et P une droite et un plan sécants ;

la projection de base P et de direction D (ou "par rapport à P parallèlement à D ") est l'application qui à M fait correspondre M' défini par

$$\begin{cases} 1) \text{ le milieu de } [MM'] \in P \\ 2) (MM') \text{ parallèle à } D \end{cases}$$

la projection de base D et de direction P (ou "par rapport à D parallèlement à P ") est l'application qui à M fait correspondre M' défini par

$$\begin{cases} 1) \text{ le milieu de } [MM'] \in D \\ 2) (MM') \text{ parallèle à } P \end{cases}$$

PROP : une symétrie S vérifie $S \circ S = Id$; elle est donc bijective, d'inverse elle-même (on parle d'"involution").

D18

E2 : exemples d'expressions analytiques