I) SYSTÈMES LINÉAIRES.

0) Exemples introductifs.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-2z=-3 \\ x-y+z=2 \\ x-2y-z=-6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+y-2z+t=1 \\ x+2y+z-2t=-3 \\ 2x+y-z+t=2 \\ x-2y+z-t=2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+2y-2z+t=2 \\ x+2y-z+2t=3 \\ x+2y-2z+2t=4 \\ x+2y+z-t=-5 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+2y-2z+t=2 \\ x+2y-z+2t=3 \\ x+2y-2z+2t=4 \\ x+2y+z-t=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=1 \\ x+2y-z+2t=2 \\ x+3y-3z+3t=3 \\ y-2z+t=1 \end{array}\right.$$

1) Définitions et notations.

DEF : si n et p sont deux entiers $\geqslant 1$, on désigne par *matrice* à n lignes et p colonnes à éléments dans $\mathbb{R}$ une application de $[|1,n|]\times[|1,p|]$ dans $\mathbb{R}$; l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Notation d'une matrice : $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, ou par un tableau rectangulaire : $\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1_p} \\ ... & & ... & & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{ip} \\ ... & & ... & & ... \\ a_{n1} & ... & & ... & a_{np} \end{bmatrix}$.

Une matrice à une seule ligne est appelée "matrice-ligne" et une matrice à une seule colonne une "matrice-colonne".

Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ est défini par la donnée d'une matrice $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ à n lignes et p colonnes (appelée la *matrice* du système), et d'une matrice colonne à n termes $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$ (appelée le "second membre" du système) et s'écrit :

$$\boxed{(S):\left\{\begin{array}{cccccl} a_{11}x_1+ & ... & +a_{1j}x_j+ & ... & +a_{1_p}x_p=b_1 & :E_1 \\ ... & & ... & & ... & \\ a_{i1}x_1+ & ... & +a_{ij}x_j+ & ... & +a_{ip}x_p=b_i & :E_i \\ ... & & ... & & ... & \\ a_{n1}x_1 & ... & +a_{nj}x_j+ & ... & +a_{np}x_p=b_n & :E_n \end{array}\right.}$$

(S) équivaut donc à "$\forall i\in[|1,n|]\quad E_i$" avec $\boxed{E_i:\sum_{j=} a_{....}x_{..}=b_{..}}$.

Résoudre le système (S), c'est déterminer, soit en extension s'il est fini, soit de façon paramétrique s'il est infini, l'ensemble S des éléments $(x_1,...,x_p)\in\mathbb{R}^p$ vérifiant (S).

$$\boxed{S=\left\{(x_1,...,x_p)\in\mathbb{R}^p\ /\ \forall i\in[|1,n|]\ \sum_{j=} a_{....}x_{..}=b_{..}\right\}}$$

Attention, le nombre de solutions du système est donc le nombre d'éléments de S ; par exemple, le système $\left\{\begin{array}{c} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right.$ n'a pas deux solutions 3 et 1, mais une solution $(3,1)$.

2) Méthode de résolution par ÉCHELONNEMENT.

a) Manipulations élémentaires.

Il y en a 3, et 3 seulement :

1. Échanger deux équations : $\left\{\begin{array}{l} E \\ F \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} F \\ E \end{array}\right.$
2. Multiplier une équation par un élément λ de K non nul : $E \Leftrightarrow \lambda E$
3. Ajouter une équation à une autre : $\left\{\begin{array}{l} E \\ F \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} E \\ F+E \end{array}\right.$

REM : DANS LA MANIP 3, L'EQUATION QUI A SERVI A MODIFIER UNE AUTRE ÉQUATION DOIT RESTER TELLE QUELLE DANS LE SYSTÈME (éventuellement multipliée par un λ non nul par la manip 2).

Exemples : les équivalences suivantes peuvent-elles se ramener à une suite de manipulations élémentaires ??

$\left\{\begin{array}{l} E \\ F \end{array}\right. \overset{?}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} E \\ F+\lambda E \end{array}\right.$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$; $\left\{\begin{array}{l} E \\ F \end{array}\right. \overset{?}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} E+F \\ F-E \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} E \\ F \end{array}\right. \overset{?}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} E+\lambda F \\ F+\mu E \end{array}\right.$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\left\{\begin{array}{l} E \\ F \\ G \end{array}\right. \overset{?}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} E+F \\ F+G \\ G+E \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} E \\ F \\ G \\ H \end{array}\right. \overset{?}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} E+F \\ F+G \\ G+H \\ H+E \end{array}\right.$

D1

Moralité : ne jamais faire de combinaisons "en boucle".

b) Méthode de résolution par échelonnement (pivot de Gauss).

PROP : si $n, p \geqslant 2$, on peut toujours, à l'aide de manipulations élémentaires, ramener le système $(S) : \left\{\begin{array}{l} E_1 \\ ... \\ E_n \end{array}\right.$ à un système $(S') : \left\{\begin{array}{l} E_1' \\ E_2' \\ ... \\ E_n' \end{array}\right.$ tel que le sous système (T') formé des $n-1$ équations $E_2', .., E_n'$ ne fasse plus intervenir que $p-1$ inconnues au plus.

D2

L'algorithme du pivot de Gauss consiste à effectuer ces manipulations pour obtenir (T') , puis à refaire ces manipulations sur (T'), ceci jusqu'à obtenir un sous-système n'ayant plus qu'une inconnue, ou plus qu'une équation.

Exemples E2

On aboutit alors à un système $(S_{échelonné})$: $\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}'x_1+ & ... & +a_{1j}'x_j+ & ... & a_{1_p}'x_p = b_1' & : & F_1' \\ ... & & ... & & ... & & \\ a_{i1}'x_1+ & ... & a_{ij}'x_j+ & ... & a_{ip}'x_p = b_i & : & F_i' \\ ... & & ... & & ... & & \\ a_{n1}'x_1 & ... & a_{nj}'x_j+ & ... & a_{np}'x_p = b_n & : & F_n' \end{array}\right.$ qui s'écrit en fait :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc}
\underbrace{a'_{1,j_1}}_{\neq 0}x_{j_1}+ & ... & ... & & ... & ... & & ... & ... & & ... & +a'_{1_p}x_p = b'_1 \\
 & & & \underbrace{a'_{2,j_2}}_{\neq 0}x_{j_2}+ & ... & ... & & ... & ... & & ... & +a'_{2_p}x_p = b'_2 \\
 & & & & ... & ... & & ... & ... & & ... & ... \\
 & & & & & & \underbrace{a'_{i,j_i}}_{\neq 0}x_{j_i}+ & ... & ... & & ... & +a'_{ip}x_p = b'_i \\
 & & & & & & & ... & ... & & ... & ... \\
 & & & & & & & & & \underbrace{a'_{r,j_r}}_{\neq 0}x_{j_r}+ & ... & +a'_{rp}x_p = b'_r \\
 & & & & & & & & & & & 0 = b'_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & 0 = b'_n
\end{array}\right.$$

qui est dit "échelonné" ; les r équations de premier membre non nul, et les inconnues correspondantes $x_{j_1}, x_{j_1}, ..x_{j_r}$ sont dites "principales" ; le nombre r est appelé le *rang* du système (on démontrera que ce nombre est toujours le même quelle que soit la façon d'échelonner le système). Les $p-r$ inconnues non principales sont dites "secondaires".

Les $n-r$ dernières équations sont appelées les "équations de compatibilité" ; si l'un des b'_i est non nul , le système est dit "incompatible" : S est vide.

Sinon, on termine la résolution du système en faisant passer les inconnues secondaires dans le deuxième membre et en exprimant, en commençant par le bas, successivement chaque inconnue principale en fonction des inconnues secondaires.

S'il y a alors des inconnues secondaires, le système est dit "indéterminé" et le nombre $p-r$ est appelé "l'ordre de l'indétermination". S'il n'y en a pas, la solution est unique.

Exemple : $\left\{\begin{array}{l} x+y+mz=1 \\ x+my+z=m \\ mx+y+z=m^2 \end{array}\right.$

Remarques importantes :

- un système dont le second membre est nul possède toujours comme solution la solution nulle $(0,..,0)$: il est donc toujours compatible ; un tel système est dit "homogène", ou "sans second membre".
- le rang d'un système ne dépend pas du second membre ; tous les systèmes compatibles de même matrice ont donc la même indétermination que celle du système sans second membre associé.

Premier cas, le plus simple : $n=p=r$ (ssi il n'y a ni inconnue secondaire, ni équation de compatibilité) ; le système est dit "de CRAMER" (Gabriel Cramer, 1704 - 1752).

Le système échelonné est triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
\underbrace{a'_{11}}_{\neq 0}x_1+ & ... & ... & ... & ... & +a'_{1_n}x_n = b'_1 \\
 & \underbrace{a'_{22}}_{\neq 0}x_2+ & ... & ... & ... & +a'_{2_n}x_n = b'_2 \\
 & & ... & ... & ... & ... \\
 & & & \underbrace{a'_{ii}}_{\neq 0}x_i+ & ... & +a'_{in}x_n = b'_i \\
 & & & & ... & ... \\
 & & & & & \underbrace{a'_{nn}}_{\neq 0}x_n = b'_n
\end{array}\right.$$

Il y a dans ce cas toujours solution unique.

Deuxième cas : $n>r, p=r$ (ssi il n'y a pas d'inconnue secondaire, mais il y a des équations de compatibilité).

Soit le système est incompatible, soit il est compatible et, après avoir supprimé les équations de compatibilité, on retombe sur un système de Cramer d'ordre r.

Troisième cas : $n = r$, $p > r$ (ssi il y a des inconnues secondaires, mais pas d'équation de compatibilité).

Il y a toujours une infinité de solutions, avec une indétermination d'ordre $p - r$.

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
\underbrace{a'_{1,j_1}}_{\neq 0} x_{j_1} + & \dots\ \dots & \dots\ \dots & \dots\ \dots & \dots & +a'_{1_p} x_p = b'_1 \\
 & \underbrace{a'_{2,j_2}}_{\neq 0} x_{j_2} + & \dots\ \dots & \dots\ \dots & \dots & +a'_{2_p} x_p = b'_2 \\
 & & \dots\ \dots & \dots\ \dots & \dots\ \dots & \\
 & & \underbrace{a'_{i,j_i}}_{\neq 0} x_{j_i} + & \dots\ \dots & \dots & +a'_{ip} x_p = b'_i \\
 & & & \dots\ \dots & \dots\ \dots & \\
 & & & \underbrace{a'_{n,j_n}}_{\neq 0} x_{j_r} + & \dots & +a'_{np} x_p = b'_n
\end{array}\right.$$

Quatrième cas : $n > r, p > r$ (ssi il y a des inconnues secondaires, et des équations de compatibilité).
Soit le système est incompatible, soit il est compatible et, après avoir supprimé les équations de compatibilité, on retombe sur le cas précédent.

II) Points, vecteurs, barycentres.

1) Généralités.

* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \underset{\longrightarrow}{\iff} (A\underset{\longrightarrow}{BD}C)$ est un parallélogramme$\iff [AD]$ et $[BC]$ ont même milieu

(équivaut aussi à $..\underset{\longrightarrow}{=}..$).

* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \overset{def}{=}$ .. (relation de Chasles).

* étant donné un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$; ce point B pourra être noté

$$B = A + \overrightarrow{u}$$

(par contre, on ne peut pas additionner deux points).

* $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB =$ longueur du segment $[AB]$.

Notations :
D, droite, $\overrightarrow{D}$ *droite vectorielle associée* à D (ou encore *direction* de D), ensemble des vecteurs joignant deux points de D.

P plan, $\overrightarrow{P}$ *plan vectoriel associé* à P (ou encore *direction* de P), ensemble des vecteurs joignant deux points de P.

E_3 l'espace (sous-entendu : de dimension 3), $\overrightarrow{E_3}$ l'ensemble de ses vecteurs.

Attention : une droite est un ensemble de points ; donc un point ....une droite,
tandis qu'une droite...................................un plan.

Rem : si $O \in P$, $\overrightarrow{P} = \left\{\overrightarrow{OM}\ /\ M \in P\right\}$, et si $O \in E_3$, $\overrightarrow{E_3} =$ ....

D1
DEF : des points sont dits *alignés* s'ils appartiennent à une même droite, *coplanaires* s'ils appartiennent à un même plan.
Des vecteurs sont dits *colinéaires* s'ils appartiennent à une même droite vectorielle, *coplanaires* s'ils appartiennent à un même plan vectoriel.

PROP :

si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$
si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires $\Longleftrightarrow \exists\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

2) Barycentres.

TH et DEF : on se donne n points pondérés $\begin{pmatrix} A_k \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in E_3 \times \mathbb{R}$, $k = 1..n$.

1er cas : si la somme des coefficients $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ est nulle, le vecteur $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$ est constant (i.e. ne dépend pas du point M)

2ème cas : si la somme des coefficients $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ est non nulle, alors il existe un unique point G, appelé *barycentre des points pondérés* $\begin{pmatrix} A_k \\ \alpha_k \end{pmatrix}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{A_kG} = \overrightarrow{0}$.

On a alors, pour tout point O,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Notation $G = bar\left(\begin{pmatrix} A_k \\ \alpha_k \end{pmatrix}_{k=1..n}\right) = bar\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_n \\ \alpha_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$

D2

Propriété d'associativité du barycentre.
D3

III) Droites et plans.

1) Droites.

Une droite est entièrement définie par la donnée :

- de deux de ses points A et B ; on a alors

$$\begin{aligned} M &\in (AB) \Longleftrightarrow A, B, M \text{ sont alignés} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB} \\ &\Longleftrightarrow \boxed{\exists\lambda \in \mathbb{R} \ / \ M = A + \lambda\overrightarrow{AB}} \\ &\Longleftrightarrow M \text{ est un barycentre de } A \text{ et } B. \end{aligned}$$

- d'un de ses points A et d'un vecteur *directeur* $\overrightarrow{u}$ (c'est-à dire un vecteur non nul de sa direction) ; on a alors :

$$\begin{aligned} M &\in \mathit{droite}\,(A, \overrightarrow{u}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{u} \\ &\Longleftrightarrow \boxed{\exists\lambda \in \mathbb{R} \ / \ M = A + \lambda\overrightarrow{u}} \end{aligned}$$

2) Plans.

Un plan est entièrement défini par la donnée :

- de trois de ses points A,B,C non alignés ; on a alors

$$\begin{aligned} M &\in (ABC) \Longleftrightarrow A, B, C, M \text{ sont coplanaires} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \\ &\Longleftrightarrow \boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ M = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}} \\ &\Longleftrightarrow M \text{ est un barycentre de } A,B,C. \end{aligned}$$

- de deux de ses points A et B, et d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de sa direction, non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$; on a alors :

$$\begin{aligned} M &\in \mathit{plan}\,(A, B, \overrightarrow{u}) \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u} \text{ sont coplanaires} \\ &\Longleftrightarrow \boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ M = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{u}} \end{aligned}$$

- d'un de ses points A, et de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de sa direction ; on a alors :

$$\begin{aligned} M &\in \mathit{plan}\,(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ sont coplanaires} \\ &\Longleftrightarrow \boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ M = A + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}} \end{aligned}$$

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est appelé un couple de vecteurs *directeurs* de P, ou une *base* de $\overrightarrow{P}$.

3) Parallélisme et orthogonalité.

a) Droites entre elles.

DEF : deux droites sont parallèles si elles ont la même direction :

$$D \parallel D' \Longleftrightarrow \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D'}$$

Remarque : deux droites parallèles sont forcément coplanaires (i.e. incluses dans un même plan)

Attention : dans le plan, deux droites sont parallèles ssi elles sont confondues ou d'intersection vide, mais on peut trouver dans l'espace deux droites d'intersection vide et non parallèles (donc forcément non coplanaires).

On dit parfois qu'un vecteur est *parallèle* à une droite pour dire qu'il appartient à sa direction.

L'orthogonalité des vecteurs est dans ce chapitre une notion première (notation $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$) ; par convention, le vecteur nul est considéré comme orthogonal à tout vecteur.

La propriété fondamentale est que si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ alors $\overrightarrow{u} \perp \lambda\overrightarrow{v}$ pour tout λ et si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v_2}$ alors $\overrightarrow{u} \perp (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})$.

On a alors par définition, pour deux droites D, D':

$$D \perp D' \Longleftrightarrow \overrightarrow{D} \perp \overrightarrow{D'} \Longleftrightarrow \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}\ \ \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D'}\quad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$

PROP :

$$\mathit{droite}\,(A, \overrightarrow{u}) \perp \mathit{droite}\,(B, \overrightarrow{v}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$

Remarque : dans le plan, deux droites orthogonales sont forcément sécantes, mais pas dans l'espace ; losqu'on parle de droites *perpendiculaires*, cela signifie qu'elles sont orthogonales et sécantes.

On dit qu'un vecteur est *normal* à une droite pour dire qu'il est orthogonal à tout vecteur de sa direction.

Dans le plan il existe une unique droite D passant par un point donné A et ayant un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul pour vecteur normal :

$$M \in D \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$$

b) Droites et plans.

DEF : une droite est parallèle à un plan si sa direction est incluse dans celle du plan

$$D \parallel P \Longleftrightarrow \overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$$

PROP : dans E_3

$$D \parallel P \Longleftrightarrow D \subset P \text{ ou } D \cap P = \varnothing$$

On dit parfois qu'un vecteur est *parallèle* à un plan pour dire qu'il appartient à sa direction.

DEF pour un plan P et une droite D :

$$D \perp P \Longleftrightarrow \overrightarrow{D} \perp \overrightarrow{P} \Longleftrightarrow \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D} \quad \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P} \quad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$

PROP :

$$\textit{droite}\,(A, \overrightarrow{u}) \perp \textit{plan}\,(B, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$$

Remarque : dans l'espace, un plan et une droite orthogonaux sont forcément sécants.

On dit qu'un vecteur est *normal* à un plan pour dire qu'il est orthogonal à tout vecteur de la direction du plan.

Dans l'espace il existe un unique plan P passant par un point donné A et ayant un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul pour vecteur normal :

$$M \in P \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$$

c) Plans entre eux.

DEF : deux plans sont parallèles s'ils ont la même direction :

$$P \parallel Q \Longleftrightarrow \overrightarrow{P} = \overrightarrow{Q}$$

PROP : dans E_3

$$P \parallel Q \Longleftrightarrow P = Q \text{ ou } P \cap Q = \varnothing$$

DEF :

$$P \perp Q \Longleftrightarrow \text{tout vecteur normal à } P \text{ est orthogonal à tout vecteur normal à } Q.$$

On parle alors de plans perpendiculaires plutôt que de plans orthogonaux.

IV) Systèmes de coordonnées et représentations des droites et plans.

1) Dans le plan.

a) Coordonnées cartésiennes.

DEF : un repère (cartésien) du plan est un triplet $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ formé d'un point et de deux vecteurs non colinéaires ; il est dit orthonormé (ou orthonormal) si $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$ et $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$; il est dit "direct" si $\widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)} \in]0, \pi[\quad [2\pi]$, "indirect" si $\widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)} \in]-\pi, 0[\quad [2\pi]$.

Le couple $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est appelé une *base* du plan vectoriel associé.

PROP et DEF : tout $\left\{\begin{array}{l}\text{point } M \\ \text{vecteur } \overrightarrow{u}\end{array}\right.$ possède un unique couple de coordonnées, dites *cartésiennes*, (x, y) dans $\left\{\begin{array}{l}R \\ B\end{array}\right.$ défini par

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}\end{array}\right.$$

On écrit $M(x,y)$ ou $M\left|\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right.$, idem pour $\overrightarrow{u}$.

DEF : une *représentation cartésienne* d'une partie du plan est une condition nécessaire et suffisante portant sur (x,y) pour qu'un point $M(x,y)$ appartienne à cette partie.

PROP : toute droite du plan possède une représentation cartésienne de type paramétrique :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ \left\{\begin{array}{l}x=x_0+\lambda a\\y=y_0+\lambda b\end{array}\right.$$

avec $(a,b)\neq(0,0)$ tel que $\overrightarrow{u}(a,b)$ est un vecteur directeur de la droite et $M_0(x_0,y_0)$ un point de cette droite.

REM : en pratique, on omet parfois le $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ mais il ne faut pas oublier qu'il est indispensable pour donner un sens à la phrase.

D4

CORO : toute droite du plan possède une représentation cartésienne du type :

$$ax+by=c$$

avec $(a,b)\neq(0,0)$, unique à un coefficient multiplicatif près, appelée "équation cartésienne".

D5

EX : l'équation de la droite passant par $(a,0)$ et $(0,b)$, avec $ab\neq0$ s'écrit (et se retient facilement) sous la forme

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

REM : les droites non parallèles à Oy ont une unique équation cartésienne du type $y=ax+b$, celles parallèles à Oy, une unique équation du type $x=a$.

b) Coordonnées polaires.

Si R est orthonormé direct et θ est un réel, on pose $\overrightarrow{u_\rho}=\cos\theta\,\overrightarrow{i}+\sin\theta\,\overrightarrow{j}=r_\theta\left(\overrightarrow{i}\right)$ et $\overrightarrow{u_\theta}=-\sin\theta\,\overrightarrow{i}+\cos\theta\,\overrightarrow{j}=r_{\frac{\pi}{2}}\left(\overrightarrow{u_\rho}\right)$.

DEF : $\left(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta}\right)$ est la *base polaire* d'angle θ associée à R.

DEF : (ρ,θ) est un couple de *coordonnées polaires* de M si

$$\overrightarrow{OM}=\rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i}+\sin\theta\,\overrightarrow{j}\right)=\rho\,\overrightarrow{u}_\rho$$

Attention : contrairement aux coordonnées cartésiennes, le couple des coordonnées polaires n'est pas unique :

PROP : (ρ,θ) et (ρ',θ') sont des couples de coordonnées polaires du même point M ssi

$\rho=\rho'=0$
ou $\rho'=\rho$ et $\theta'=\theta\ \ [2\pi]$
ou $\rho'=-\rho$ et $\theta'=\theta+\pi\ \ [2\pi]$

D6

2) Dans l'espace.

a) Coordonnées cartésiennes.

DEF : un repère (cartésien) de E_3 est un quadruplet $R=\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ formé d'un point et de trois vecteurs non coplanaires ; il est dit orthonormé (ou orthonormal) si $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=\left\|\overrightarrow{j}\right\|=\left\|\overrightarrow{k}\right\|=1$ et $\overrightarrow{i}\perp\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j}\perp\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{k}\perp\overrightarrow{i}$; il est dit "direct" si un observateur placé dans le demi-espace délimité par Oxy du côté de $\overrightarrow{k}$ voit le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ direct, "indirect" sinon (définition rigoureuse mathématiquement après le cours sur les déterminants).

PROP et DEF : tout $\left\{\begin{array}{c}\text{point } M\\ \text{vecteur } \overrightarrow{u}\end{array}\right.$ possède un unique triplet de coordonnées, dites *cartésiennes*, (x, y, z) dans $\left\{\begin{array}{c}R\\ B\end{array}\right.$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\end{array}\right.$$

On écrit $M(x, y, z)$ ou $M\left|\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right.$.

DEF : une *représentation cartésienne* d'une partie de l'espace est une condition nécessaire et suffisante portant sur (x, y, z) pour qu'un point $M(x, y, z)$ appartienne à cette partie.

PROP : tout plan possède une représentation cartésienne de type paramétrique :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \ \left\{\begin{array}{c}x = x_0 + \lambda a + \mu d\\ y = y_0 + \lambda b + \mu e\\ z = z_0 + \lambda c + \mu f\end{array}\right.$$

telle que $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{v}(d, e, f)$ sont deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de ce plan.

D7

CORO : tout plan possède une équation cartésienne du type :

$$ax + by + cz = d$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, unique à un coefficient multiplicatif près.

D8

REM : les plans non parallèles à Oz ont une unique équation cartésienne du type $z = ax + by + c$, ceux parallèles à Oz, une unique équation du type $y = ax + b$ ou $x = a$.

EX : l'équation du plan passant par $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ et $(0, 0, c)$, avec $abc \neq 0$ s'écrit (et se retient facilement) sous la forme :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

PROP : Les droites de E_3 ont une représentation paramétrique du type :

$$\left\{\begin{array}{c}x = x_0 + \lambda a\\ y = y_0 + \lambda b\\ z = z_0 + \lambda c\end{array}\right.$$

où $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c}a\\ b\\ c\end{array}\right.$ est un vecteur directeur de la droite.

On en déduit le système d'équations cartésiennes :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

avec la convention que si un dénominateur est nul, le numérateur correspondant est nul aussi.

D9

Une droite peut aussi être définie par intersection de deux plans, et possède donc une représentation formée de la conjonction de deux équations cartésienne (on parle alors de système d'équations cartésiennes).

REM : toute droite possède un unique système d'équations cartésiennes du type :

$$\begin{cases} z = ax + b \text{ ou bien } x = a \\ z = cy + d \text{ ou bien } y = c \end{cases}$$

D10

b) Coordonnées cylindriques.

Ici, R est orthonormé direct.

DEF : (ρ, θ, z) est un couple de *coordonnées cylindrique* de M si

$$\overrightarrow{OM} = \rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}\right) + z\,\overrightarrow{k}$$

θ est la longitude, et z la cote.
b) Coordonnées sphériques.

Ici, R est orthonormé direct

DEF : (r, θ, φ) est un couple de *coordonnées sphériques* de M si

$$\overrightarrow{OM} = r\left(\sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi\,\overrightarrow{j}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{k}\right)$$

Attention : ici θ est la colatitude et φ la longitude.

V) Produit scalaire.

1) Définition par le cosinus de l'angle.

DEF : le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est défini par

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$$

(si l'un des vecteurs est nul, $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ n'a pas de sens, mais le produit est considéré comme nul).

Propriété immédiate (symétrie) : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

Propriété fondamentale : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

2) Définition par projection.

Rappels sur les mesures algébriques : si $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ est un repère normé d'une droite D, on pose $\overline{AB} = x_B - x_A$; on a donc $\overline{AB} = AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{i}$ sont de même sens, $\overline{AB} = -AB$ sinon ; si on change $\overrightarrow{i}$ en son opposé, les mesures algébriques sont changées en leur opposé.

PROP : si $A \neq B$, on a

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{C'D'}$$

où C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) ($\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{DD'} \perp \overrightarrow{AB}$).

D11

3) Bilinéarité du produit scalaire.

PROP : le produit scalaire est bilinéaire, c'est-à dire

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\,(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) &= \lambda\vec{u}\,.\,\vec{v}+\mu\vec{u}\,.\,\vec{w}\\ (\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\,.\,\vec{w} &= \text{.....................}\end{aligned}$$

D12

4) Expression dans une base orthonormée.

PROP : dans le plan : si $\vec{u}\,(x,y)$ et $\vec{v}\,(x',y')$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}=$ ....
dans l'espace : si $\vec{u}\,(x,y,z)$ et $\vec{v}\,(x',y',z')$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}=$ ....

D13

5) Applications.

Les repères sont ici supposés orthonormés.

P1 : dans le plan, une droite d'équation $ax+by=c$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(a,b)$, et dans l'espace, un plan d'équation $ax+by+cz=d$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(a,b,c)$.
D14

P2 : $\left\{\begin{array}{l}\text{dans le plan,}\\ \text{dans l'espace,}\end{array}\right.$ la distance du point $\left\{\begin{array}{l}M\,(x,y)\ \text{ à la droite } D: ax+by=c\\ M(x,y,z)\ \text{au plan } P: ax+by+cz=d\end{array}\right.$ passant par A et orthogonal(e) à $\vec{n}$ est égale à

$$\frac{\left|\overrightarrow{AM}.\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \dfrac{|ax+by+cz-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{array}\right.$$

D15
P3 : $\left\{\begin{array}{l}\text{dans le plan,}\\ \text{dans l'espace,}\end{array}\right.$ la distance entre les deux $\left\{\begin{array}{c}\text{droites}\\ \text{plans}\end{array}\right.$ parallèles $\left\{\begin{array}{c}D: ax+by=c \text{ et } D': ax+by=c'\\ P: ax+by+cz=d \text{ et } P': ax+by+cz=d'\end{array}\right.$ passant par A et A' et orthogonaux à $\vec{n}$ est égale à

$$\frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \dfrac{|d'-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{array}\right.$$

D16

VI) Déterminant de deux vecteurs dans le plan.

1) Définition par le sinus de l'angle.

DEF : le *déterminant* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan orienté est défini par

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

(si l'un des vecteurs est nul, $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ n'a pas de sens, mais le produit est considéré comme nul).

REM : si on décide de changer l'orientation du plan, le déterminant est changé en son opposé.
Propriétés immédiates
- antisymétrie : $\det(\vec{u},\vec{v})=-\det(\vec{v},\vec{u})$.

- relation de Diophante : $(\vec{u}\,.\,\vec{v})^2+\det^2(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$

Propriété fondamentale : $\det(\vec{u},\vec{v})=0\iff\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) Définition par l'aire.

PROP : le nombre $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est égal à l'aire algébrique du parallélogramme $(OACB)$ construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (i.e. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{v}$) ; l'aire algébrique est positive si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est directe, négative sinon.

D17

3) Bilinéarité du déterminant.

PROP : le déterminant est bilinéaire, c'est-à dire

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{w}) &= \lambda\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\mu\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})\\ \det(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) &= \text{.................................}\end{aligned}$$

D18

4) Expression dans une base orthonormée directe.

PROP : si $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ alors $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=$ ...., que l'on note $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

D19

Exos :

- déterminer l'aire algébrique du parallélogramme $(ABCD)$ avec $A(1,2)\,,B(3,4)\,,C(6,3)$
- écrire la relation de Diophante avec les coordonnées.

5) Application.

PROP : La distance du point $M(x,y)$ à la droite D passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est égale à

$$\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

D20

VII) Produit vectoriel dans l'espace.

1) Définition par le sinus de l'angle.

DEF : le *produit vectoriel* de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est défini par

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}(\text{ ou }\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})=\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}).\overrightarrow{n}=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}).\overrightarrow{n}$$

où $\overrightarrow{n}$ est, lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, un vecteur de norme 1 normal au plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, ce plan étant orienté par la règle : $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ est directe ssi $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{n}\right)$ l'est.

REM : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, le vecteur $\overrightarrow{n}$ n'est pas défini, mais comme $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=0$, on considère que $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.

Propriétés immédiates (mais importantes !)

- $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
- $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ est une base directe.
- antisymétrie : $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}=-(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$.

- relation de Lagrange : $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2+\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2$.
- la norme du produit vectoriel est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

2) Bilinéarité du produit vectoriel.

PROP : le produit vectoriel est bilinéaire, c'est-à dire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\wedge(\lambda\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{w}) &= \lambda\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}\\ (\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} &= \text{.................................}\end{aligned}$$

D21

3) Expression dans une base orthonormée directe.

PROP : si $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l}x'\\y'\\z'\end{array}\right.$ alors $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l}\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\\[2ex] \begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\\[2ex] \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\end{array}\right.$

D22

Exo : écrire la relation de Lagrange avec les coordonnées.

4) Formule du double produit vectoriel :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} &= (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\ \overrightarrow{v}-(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\ \overrightarrow{u}\\ \overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) &= (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\ \overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\ \overrightarrow{w}\end{aligned}$$

5) Applications.

a) $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe de E ssi

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\text{ est orthonormée et }\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$$

b) Un vecteur directeur de l'intersection de deux plans non parallèles est obtenu par le produit vectoriel des vecteurs normaux à chacun des plans.

c) Un vecteur normal à un plan parallèle à deux droites non parallèles est obtenu par le produit vectoriel des vecteurs directeurs de chacune des droites.

d) La distance du point $M(x,y,z)$ à la droite D passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est égale à

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

D23

VIII) Déterminant (ou produit mixte) de 3 vecteurs.

1) Définition par produit mixte.

DEF : le *déterminant (ou produit mixte)* de trois vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ est défini par

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\ \ (\text{noté aussi }[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}])=(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$$

2) Définition par le volume.

PROP : le nombre $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est égal au volume algébrique du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ - le volume algébrique est positif si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est directe, négatif sinon.

D24

CORO : Propriété fondamentale : $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=0\Longleftrightarrow\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

3) Antisymétrie du déterminant.

PROP (antisymétrie) : si on échange deux vecteurs, le déterminant est changé en son opposé :

$$\det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})=\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})=\det(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=-\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$$

CORO 1 : si l'on effectue une permutation circulaire de $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ le produit mixte reste inchangé :

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}).\overrightarrow{u}=(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}$$

D25

3) Trilinéarité du déterminant.

PROP : le déterminant en dimension 3 est trilinéaire, c'est-à dire

$$\begin{array}{ccc} \text{....................} & & \text{.................................} \\ \det(\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v_1}+\mu\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w}) & = & \lambda\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w})+\mu\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w}) \\ \text{....................} & & \text{..............................} \end{array}$$

D26

4) Expression dans une base orthonormée directe.

PROP : si $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c}x\\y\\z\end{array}\right.,\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c}x'\\y'\\z'\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{w}\left|\begin{array}{c}x''\\y''\\z''\end{array}\right.$, alors $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=$ .... , noté $\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}$

D27

5) Application.

La distance entre les deux droites D et D' non parallèles passant par A et A' et dirigées par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ est égale à

$$\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right\|}$$

D28

IX) Cercles et sphères.

1) définitions.

DEF : dans $\left\{\begin{array}{l}\text{le plan, un }\left\{\begin{array}{c}\textit{cercle}\\ \textit{disque ouvert (fermé)}\end{array}\right.\\ \text{l'espace, une }\left\{\begin{array}{c}\textit{sphère}\\ \textit{boule ouverte (fermée)}\end{array}\right.\end{array}\right.$, est l'ensemble des points situés

$\left\{\begin{array}{l}\text{à une distance donnée (le } \textit{rayon}\text{)}\\ \text{à une distance strictement inférieure (inférieure ou égale) à une distance donnée (le } \textit{rayon}\text{)}\end{array}\right.$

d'un point donné (le *centre*).

Notations : $\begin{array}{lll} C(\Omega,R)=\{M\in P\ /\ \Omega M......\} & D(\Omega,R)=\{M\in P\ /\ \Omega M.......\} & \overline{D}(\Omega,R)=\{M\in P\ /\ \Omega M.......\} \\ S(\Omega,R)=\{M\in E_3\ /\ \Omega M......\} & B(\Omega,R)=\{M\in E_3\ /\ \Omega M......\} & \overline{B}(\Omega,R)=\{M\in E_3\ /\ \Omega M......\}\end{array}$

PROP : toute droite passant par le centre coupe $\left\{\begin{array}{c}\text{le cercle}\\ \text{la sphère}\end{array}\right.$ en deux points, extrémités d'un *diamètre* $\left\{\begin{array}{c}\text{du cercle}\\ \text{de la sphère}\end{array}\right.$.

PROP : $\begin{cases} \begin{cases} \text{le cercle} \\ \text{la sphère} \end{cases} \\ \begin{cases} \text{le disque ouvert} \\ \text{la boule ouverte} \end{cases} \end{cases}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M $\begin{cases} \text{du plan} \\ \text{de l'espace} \end{cases}$ vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} \begin{cases} = 0 \\ < 0 \end{cases}$.

D29

2) Équation cartésienne.

PROP : $\begin{cases} \text{tout cercle du plan} \\ \text{toute sphère de l'espace} \end{cases}$ possède en repère orthonormé une unique équation cartésienne du type :
$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \end{cases}$ et réciproquement, toute équation de ce type est l'équation
$\begin{cases} \text{d'un cercle du plan} \\ \text{d'une sphère de l'espace} \end{cases}$ ou de l'ensemble vide.

D30

Un cercle de l'espace est obtenu par l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Exemple : déterminer le centre et le rayon du cercle intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-19=0$ avec le plan d'équation $2x-y+2z=7$.