Les hélices géométriques.

Robert FERREOL
ferreol@mathcurve.com

Dans le langage courant, le terme « hélice » désigne principalement un système propulseur à pales pour bateaux ou avions. Cependant la double hélice de la molécule d'ADN popularise la notion que nous allons étudier, dont l'exemple le plus courant est l'escalier en colimaçon, ou encore le tunnel hélicoïdal.
Cette notion est fidèle à l'étymologie puisque le mot hélice vient du latin helix, lui-même issu du grec heliks et signifiant « enroulement en spirale », en particulier pour désigner les plantes grimpantes ou les coquilles d'escargots.
Mais pourquoi les hélices de bateaux sont elles ainsi appelées (emploi attesté depuis 1803) ? Cela vient de ce que lorsque le bateau avance à vitesse constante, le mouvement de son hélice dans un repère fixe est… hélicoïdal, et que tous les points de l'hélice décrivent justement des hélices mathématiques.

On peut donc définir les hélices circulaires comme les traces laissées dans l'espace par les points d'une droite, ou d'un objet quelconque, se déplaçant d'un mouvement composé d'une rotation uniforme autour d'un axe, et d'une translation uniforme dans la direction de cet axe, mouvement justement dit « hélicoïdal ».
Si l'on considère la trace de deux points disposés symétriquement par rapport à l'axe, on obtient la fameuse double hélice de l'ADN, mais aussi la structure de certains escaliers de monuments anciens comme le château de Chambord. Cet escalier conçu par Léonard De Vinci, l'une des attractions principales du château, permettait de descendre en évitant de croiser des personnes empruntant l'autre partie…

fig 1 : l'escalier monumental du château de Chambord. (http://www.artefake.com/L-ESCALIER-MAGIQUE-DE-CHAMBORD.html)

Moins connu, mais superbe : l'escalier à double révolution de l'ancien hôtel de Hollande, rue Radziwill à Paris. Son existence m'a été donnée par mon beau-père E. Calais, peu avant son décès.

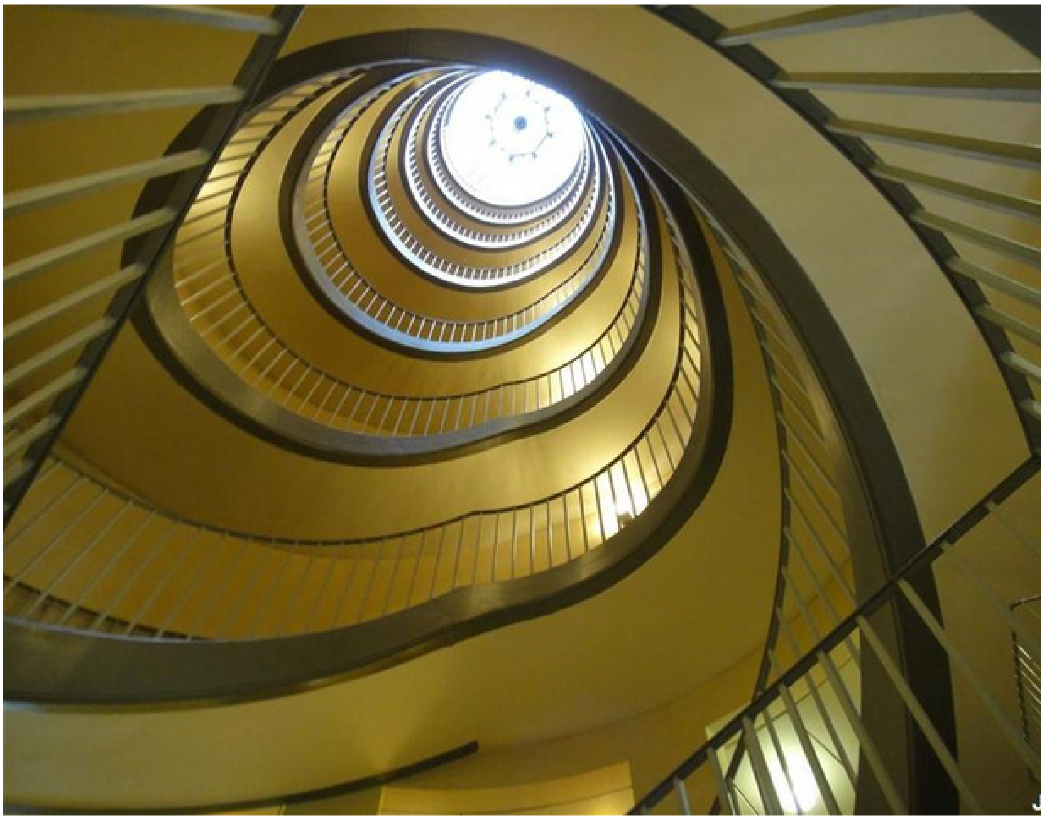

fig 2 : Escalier de l’ancien hôtel de Hollande http://paris-bise-art.blogspot.fr/

L’hélice circulaire peut aussi être définie par le fait qu’elle est tracée sur un cylindre de révolution placé verticalement, en conservant constamment une pente constante. Cela signifie qu’une tangente à l’hélice croisera un plan horizontal en formant constamment le même angle.
Les mathématiciens, toujours en mal de généralisation, vont conserver cette propriété pour définir ce qu’est une hélice au sens général : une courbe de pente constante, dont les tangentes forment un angle constant avec un plan horizontal.

Mais avec cette définition, on perd la notion d’enroulement : n’importe quelle route de montagne qui s’élève régulièrement suit une hélice mathématique !

Une route française s’enroule pourtant régulièrement : celle du Puy-de Dôme, car elle est tracée sur un volcan de forme quasi conique :

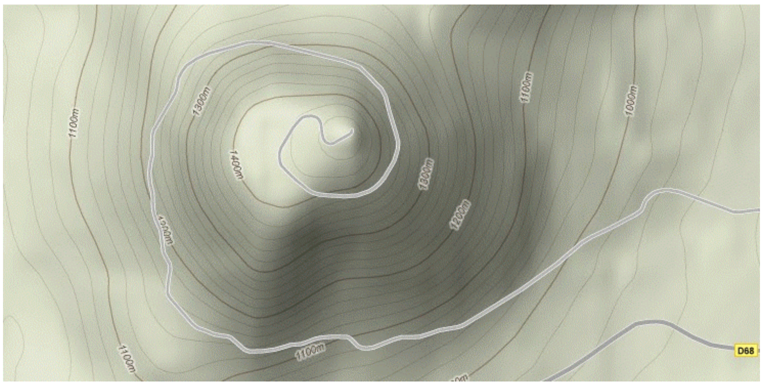

fig 3 : la route hélicoïdale du Puy-de-Dôme

Toute courbe gauche est tracée sur un cylindre (généralisé) formé des droites passant par la courbe et parallèles à une direction donnée. En particulier toute hélice est tracée sur un cylindre vertical, mais possède alors une propriété bien spéciale : si on développe le cylindre en un plan, l'hélice se transforme en une droite. Cette propriété est caractéristique : les hélices sont les « droites » (ou géodésiques) des cylindres généraux.

Une hélice est souvent désignée par sa base (section horizontale du cylindre sur lequel elle est tracée) ; ainsi bien sûr les hélices circulaires, mais aussi les hélices elliptiques, ou paraboliques, ou encore hyperboliques, dont la base est une conique, ellipse, parabole ou hyperbole.

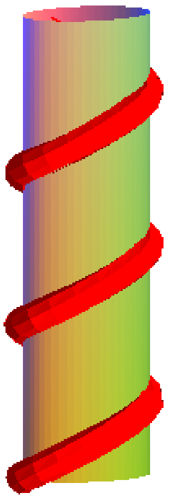

fig 4 : une hélice elliptique

Il existe cependant d'autres moyens de construire des hélices, à partir d'une surface quelconque : choisir un plan qui sera décrété horizontal, et tracer une courbe faisant un angle α constant avec ce plan : l'angle étant donné, il existera exactement deux hélices tracée sur la surface et passant par un point donné, mais à condition que l'angle du plan tangent à la surface avec l'horizontale soit supérieur à α.
Concrètement, si l'on taille des marches de hauteur et de profondeur constantes dans une montagne par exemple, le chemin suivi, de pente constante, sera une hélice.

Cet autre procédé de création d'hélice entraîne une certaine confusion dans la nomenclature de hélices ; ainsi, une *hélice conique* n'est pas une hélice dont la base est une conique, mais une hélice tracée sur un cône de révolution, d'axe vertical ; on montre que sa base est alors une spirale logarithmique.

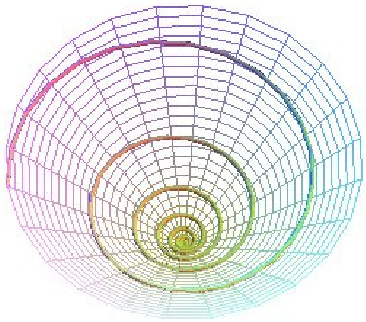

fig 5 : hélice conique

l’hélice sphérique est l’hélice tracée sur la sphère (là, pas besoin de préciser la verticale) ; sa base est une épicycloïde, et on notera qu’elle ne va pas jusqu’au pôle, où la pente est nulle !

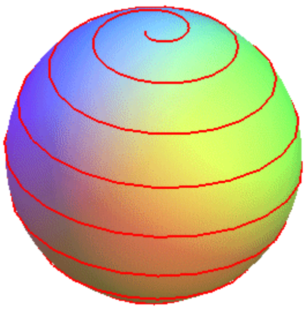

fig 6 : hélice sphérique

L’hélice torique est tracée sur un tore d’axe vertical :

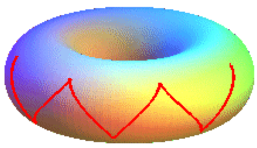

fig 7 : hélice de pente 1 du tore

Nous laissons le lecteur imaginer ce que seraient les hélices d’un tore dont l’axe serait placé horizontalement…

La tangente à l’hélice forme un angle constant avec un plan horizontal, mais une erreur classique est de penser qu’elle forme un angle constant avec les courbes de niveaux, sections de la surface avec des plans horizontaux. Comme la tangente à l’hélice se trouve dans le plan tangent à la surface, l’angle entre cette tangente et celle de la courbe de niveau n’est égal à l’angle entre la tangente et un plan horizontal que lorsque le plan tangent est vertical, ce qui est le cas des cylindres verticaux par exemple.

Ces courbes tracées sur la surface faisant un angle constant avec les courbes de niveau ont été dénommées par Snellius en 1624 « loxodromies », du grec loksos « oblique » et dromos « course » ; vue leur importance en marine, puisque les loxodromies terrestres sont les courbes faisant un angle constant avec les parallèles, donc aussi avec les méridiens, autrement dit avec le nord, elles ont d’abord été étudiées dans le cas de la sphère.

On remarquera dans la figure ci-dessous que la loxodromie de la sphère s'enroule autour du pôle, contrairement à l'hélice, qui, elle, s'arrête dès que la pente du méridien est inférieure à sa propre pente.

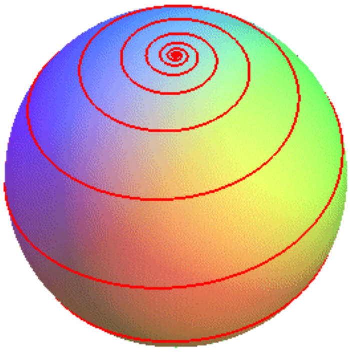

fig 8 : loxodromie de la sphère.

D'après la remarque ci-dessus, les loxodromies et les hélices sont identiques dans le cas d'une surface cylindrique verticale, donc en particulier, l'hélice circulaire est aussi une loxodromie du cylindre.

Mais revenons aux hélices circulaires ; très usitées en architecture, pour leur élégance, et leur utilité.

La perspective d'un escalier en spirale de phare (ci-contre celui du phare des baleines dans l'Ile de Ré) est pour moi un spectacle de toute beauté.
Mais on peut se demander quelle courbe plane est suivie par cette projection conique d'hélice circulaire : on pourrait imaginer que c'est une projection orthogonale d'hélice conique que nous avons vue ci-dessus, soit une spirale logarithmique ; eh bien non, la réponse est une spirale hyperbolique, d'équation polaire $\rho = a / \theta$. Comme souvent, il faut se méfier des raisonnements hâtifs !

fig 9 : escalier du phare des baleines.

Quelques références pour obtenir les équations de toutes ces courbes :
http://www.mathcurve.com/courbes3d/helice/helice.shtml page donnant des liens vers les diverses hélices.

http://www.mathcurve.com/courbes2d/hyperbolic/hyperbolic.shtml pour la spirale hyperbolique

http://www.mathcurve.com/courbes2d/cochleoid/cochleoid.shtml autre courbe projection conique d’hélice circulaire.