I INTÉGRALE DOUBLE

1) Intégrale double sur un rectangle.

Données : $a \leqslant b, c \leqslant d$ et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

DEF : on dit que f est *étagée* sur $[a,b] \times [c,d]$ s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, ..., x_n)$ de $[a,b]$ et une subdivision $(y_0, y_1, ..., y_m)$ de $[c,d]$, dites *adaptées* à f, telles que f est constante sur les nm rectangles ouverts $]x_{i-1}, x_i[\times]y_{i-1}, y_i[$ (de valeur λ_{ij}).

DEF : l'intégrale de f étagée sur $[a,b] \times [c,d]$ est par définition le réel

$$I(f) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \lambda_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$

REM : on démontre bien sur que cette définition ne dépend pas des subdivisions adaptées à f.

DEF : supposant f bornée sur $[a,b] \times [c,d]$, on désigne par *intégrale inférieure* de f sur $[a,b]$ la borne supérieure des intégrales des fonctions étagées minorant f sur $[a,b] \times [c,d]$, et par *intégrale supérieure* de f sur $[a,b]$ la ....
.... :

$$\boxed{\begin{array}{l} I^-(f) = \sup\limits_{\left\{\begin{array}{l} g \text{ étagée sur } [a,b]\times[c,d] \\ \forall (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \;\; g(x,y) \leqslant f(x,y) \end{array}\right.} I(g) \\ \hline I^+(f) = \inf\limits_{\left\{\begin{array}{l} h \text{ étagée sur } [a,b]\times[c,d] \\ \forall (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \;\; f(x,y) \leqslant h(x,y) \end{array}\right.} I(h) \end{array}}$$

DEF : f est dite *intégrable (au sens de Riemann)* sur $[a,b] \times [c,d]$ dès que son intégrale inférieure sur $[a,b] \times [c,d]$ est égale à son intégrale supérieure :

$$f \text{ est intégrable sur } [a,b] \times [c,d] \Leftrightarrow I^-(f) = I^+(f)$$

la valeur commune des intégrales inférieure et supérieure de f sur $[a,b] \times [c,d]$ est appelée *intégrale* de f sur $[a,b] \times [c,d]$ et notée $I(f) = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f = \iint\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d}} f(x,y)\, dxdy$.

REM : les définition ci-dessus sont totalement identiques à celle que nous avons données pour l'intégrale simple ; le théorème suivant ramène d'ailleurs le calcul d'une intégrale double au calcul de deux intégrales simples :

TH de FUBINI, pour une intégrale sur un rectangle :

Si f est intégrable sur $[a,b] \times [c,d]$, si les fonctions partielles $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont intégrables (la première sur $[a,b]$, pour tout y de $[c,d]$, la deuxième sur $[c,d]$, pour tout x de $[a,b]$, et si les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_c^d f(x,y)\, dy$ et $y \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,y)\, dx$ sont intégrables (la première sur $[a,b]$, la deuxième sur $[c,d]$), on a alors la formule dite de Fubini :

$$\iint\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d}} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

REM 1 : dans le cas où f est étagée, cette formule provient tout simplement de l'interversion des signe $\sum$:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \lambda_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} (x_i - x_{i-1}) \right) (y_j - y_{j-1})$$

REM : dans le cas particulier important où $f(x,y) = g(x)h(y)$, la formule de Fubini devient :

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} g(x)h(y)\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(x)\,dx$$

D1

Exemple : $\iint\limits_{-R\leqslant x,y\leqslant R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy =$ ....

2) Intégrale double sur une partie du plan.

PROP et DEF : soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ (donc incluse dans un rectangle $[a,b]\times[c,d]$) , f une fonction réelle définie sur D, f_D la fonction définie par : $f_D(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y)\in D$, 0 sinon.

Alors on dit que f est *intégrable* sur D si la fonction f_D est intégrable sur $[a,b]\times[c,d]$ et l'on pose

$$\iint\limits_D f = \iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\,dxdy \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f_D$$

REM : on démontre que cette définition ne dépend pas du rectangle $[a,b]\times[c,d]$ contenant D choisi ; en pratique, on prend donc ce rectangle le plus petit possible.

DEF : on dit que la partie D est *quarrable* si la fonction constante égale à 1 est intégrable sur D et l'intégrale sur D de cette fonction est par définition l'*aire* de D.

$$\text{aire}(D) \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_D (x\mapsto 1) = \iint\limits_{(x,y)\in D} dxdy$$

TH : si D est quarrable, et si f est continue sur D, alors f est intégrable sur D et on peut appliquer la formule de Fubini vue ci-dessus :

$$\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f_D(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f_D(x,y)\,dx\right)dy \text{ (avec } D\subset[a,b]\times[c,d])$$

Remarque 1 : si l'on pose $V_x = \{y\ /\ (x,y)\in D)$ (intersection de D avec une droite Verticale) et $H_y = \{x\ /\ (x,y)\in D)$ (intersection de D avec une droite Horizontale), cette formule devient

$$\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{V_x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_{H_y} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Remarque 2 : en général, la partie D est convexe, et alors

V_x est de la forme $[y_{\min}(x), y_{\max}(x)]$, et H_y est de la forme $[x_{\min}(y), x_{\max}(y)]$

la formule de Fubini devient alors :

$$\boxed{\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} f(x,y)\,dx\right)dy}$$

Exemples E1

3) Propriétés.

P1 : linéarité : $\iint\limits_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint\limits_D f + \mu \iint\limits_D g$

P2 : croissance : si $f \leqslant g$ sur D, $\iint\limits_D f \leqslant \iint\limits_D g$

P3 : additivité sur les parties : si aire$(D_1 \cap D_2) = 0$, $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f = \iint\limits_{D_1} f + \iint\limits_{D_2} g$

P4 : croissance sur les parties : si $D_1 \subset D_2$ et $f \geqslant 0$ sur D_2, $\iint\limits_{D_1} f \leqslant \iint\limits_{D_2} f$

P6 : inégalité triangulaire : $\left| \iint\limits_D f \right| \leqslant \iint\limits_D |f|$

P7 : changement de variable :

$$\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{(u,v)\in D_1} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \left(\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right) \right| dudv$$

si

- D_1 vérifie : $(x(u,v), y(u,v)) \in D \Leftrightarrow (u,v) \in D_1$
- les applications $(u,v) \mapsto x(u,v)$ et $(u,v) \mapsto y(u,v)$ sont de classe C^1 sur D_1
- L'APPLICATION $\varphi : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ EST INJECTIVE sur l'intérieur de D_1

REM 1 : le déterminant $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ est appelé le *jacobien* de l'application φ.

REM 2 : bien noter la valeur absolue qu'il y a autour de ce déterminant, ce qui différencie les intégrales simples des intégrales doubles.

Exemples classiques :

- passage en coordonnées polaires : $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho$, donc

$$\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{\substack{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\in D \\ P(\rho,\theta)}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, |\rho|\, d\rho d\theta$$

où $P(\rho,\theta)$ est une condition sur ρ et θ nécessaire pour avoir la propriété d'injectivité ci-dessus.
D2
E2 :
- $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2 \\ x,y\geqslant 0}} f(x,y)\, dxdy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

APPLICATION : calcul de l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- Cas où φ est affine : $\left\{ \begin{array}{l} x = au + bv + c \\ y = du + ev + f \end{array} \right.$, ; le jacobien est la constante $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ qui n'est autre que le déterminant de φ.

4) Calculs de centres et de moments d'inertie.

DEF : le *centre d'inertie* d'une partie D de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique μ (fonction de D dans $\mathbb{R}$) est par définition le point G défini par :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\iint_D \mu\overrightarrow{OM}}{\iint_D \mu}\text{; soit }\begin{cases} x_G=\dfrac{\iint_{(x,y)\in D}\mu(x,y)\,x\,dxdy}{\iint_{(x,y)\in D}\mu(x,y)\,dxdy}\\ y_G=\dfrac{\iint_{(x,y)\in D}\mu(x,y)\,y\,dxdy}{\iint_{(x,y)\in D}\mu(x,y)\,dxdy}\end{cases}$$

Ce qui donne, pour un domaine homogène ($\mu=cte$)

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\iint_D \overrightarrow{OM}}{\text{aire}(D)}\text{, soit }\begin{cases} x_G=\dfrac{\iint_{(x,y)\in D}x\,dxdy}{\iint_{(x,y)\in D}dxdy}\\ y_G=\dfrac{\iint_{(x,y)\in D}y\,dxdy}{\iint_{(x,y)\in D}dxdy}\end{cases}$$

E3 : pour un demi-disque $x^2+y^2\leqslant R^2, x\geqslant 0$

$$x_G=\frac{\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0}}x\,dxdy}{\dfrac{\pi R^2}{2}}=\frac{2}{\pi R^2}\iint_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant R\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}}\rho\cos\theta\rho d\rho d\theta=\text{..................................}$$

DEF : le *moment d'inertie* d'une partie D de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique μ par rapport à un point A est par définition le réel défini par :

$$\begin{aligned}J_A&=\iint_D \mu MA^2=\iint_{(x,y)\in D}\mu(x,y)\left((x-x_A)^2+(y-y_A)^2\right)dxdy\\ &=m\frac{\iint_{(x,y)\in D}\mu(x,y)\left((x-x_A)^2+(y-y_A)^2\right)dxdy}{\iint_{(x,y)\in D}\mu(x,y)\,dxdy}\ \left(m=\text{masse}(D)=\iint_{(x,y)\in D}\mu(x,y)\,dxdy\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne, pour un domaine homogène

$$J_A=m\frac{\iint_D MA^2}{\text{aire}(D)}=m\frac{\iint_{(x,y)\in D}\left((x-x_A)^2+(y-y_A)^2\right)dxdy}{\iint_{(x,y)\in D}dxdy}$$

E4 : le moment d'inertie d'un disque par rapport à son centre est

$$J_O=m\frac{\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy}{\pi R^2}=m\frac{\iint_{\substack{\cdots\cdots\\ \cdots\cdots}}\text{...........}d\rho d\theta}{\pi R^2}=\text{.....................}$$

II NOTIONS SUR L'INTÉGRALE TRIPLE (HORS PROGRAMME).

La définition se fait de façon similaire, en commençant par les fonctions étagées sur les pavés $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$.

La formule de Fubini possède deux formes distinctes,

- soit en prenant une intégrale simple d'une intégrale double :

$$\iiint_{\substack{a_1\leqslant x\leqslant b_1\\a_2\leqslant y\leqslant b_2\\a_3\leqslant z\leqslant b_3}} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{b_1}\left(\iint_{\substack{a_1\leqslant x\leqslant b_1\\a_2\leqslant y\leqslant b_2}} f(x,y,z)\,dxdy\right)dz$$

et il y a trois façons de procéder ainsi ; on parle alors de procédé de sommation *par tranches.*

- soit en prenant une intégrale double d'une intégrale simple :

$$\iiint_{\substack{a_1\leqslant x\leqslant b_1\\a_2\leqslant y\leqslant b_2\\a_3\leqslant z\leqslant b_3}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{\substack{a_1\leqslant x\leqslant b_1\\a_2\leqslant y\leqslant b_2}}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

et il y a trois façons de procéder ainsi ; on parle alors de procédé de sommation *par piles.*

On en déduit bien sur un procédé de sommation à l'aide de 3 intégrales simples, de 6 façons possibles

$$\iiint_{\substack{a_1\leqslant x\leqslant b_1\\a_2\leqslant y\leqslant b_2\\a_3\leqslant z\leqslant b_3}} f(x,y)\,dxdy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

La notion de partie quarrable devient celle de partie *cubable*, et

$$\operatorname{volume}(D) \overset{\text{def}}{=} \iiint_D (x\mapsto 1) = \iiint_{(x,y,z)\in D} dxdydz$$

Pour une partie D cubable, la formule de sommation par tranches s'écrit

$$\iiint_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_3}^{b_3}\left(\iint_{(x,y)\in H_z} f(x,y,z)\,dxdy\right)dx$$

où $H_z = \{(x,y)\ /\ (x,y,z)\in D\}$ (section de cote z de la partie D), et $a_3 = \min\limits_{\exists(x,y)\ /\ (x,y,z)\in D} z$ et $b_3 = \max\limits_{\exists(x,y)\ /\ (x,y,z)\in D} z$

La formule de sommation par piles devient

$$\iiint_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{(x,y)\in D_1}\left(\int_{V(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

où $V(x,y) = \{z\ /\ (x,y,z)\in D\}$ et $D_1 = \{(x,y)\ /\ \exists z\ /\ (x,y,z)\in D\}$ (projeté de D sur xOy)

En général on utilise cette dernière méthode quand D est une portion de surface comprise entre deux surfaces $z = f_1(x,y)$ et $z = f_2(x,y)$: $D = \{(x,y,z)\ /\ (x,y)\in D_1,\ f_1(x,y)\leqslant z\leqslant f_2(x,y)\}$, ce qui donne :

$$\iint_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{(x,y)\in D_1}\left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

la formule de changement de variable devient

$$\iint_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{(u,v,w)\in D_1} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \right) \right| dudvdw$$

avec des précautions similaires au cas des intégrales doubles.

Exemple classique : passage en coordonnées sphériques ($\theta =$ longitude, $\lambda =$ latitude) : $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = r^2 \cos\lambda$, donc

$$\iint_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{\substack{(r\cos\lambda\cos\theta, r\cos\lambda\sin\theta, r\sin\lambda)\in D \\ P(r,\theta,\lambda)}} f(r\cos\lambda\cos\theta, r\cos\lambda\sin\theta, r\sin\lambda)\, r^2 |\cos\lambda|\, drd\theta d\lambda$$

où $P(r,\theta,\lambda)$ est une condition sur r, θ et λ pour avoir la propriété d'injectivité requise.
D3

Exemple : volume de la boule sphérique :

$$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} dxdydz = \iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant R \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\lambda\leqslant\frac{\pi}{2}}} r^2\cos\lambda drd\theta d\lambda = 2\pi\int_0^R r^2dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda d\lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Calculs de centres et de moments d'inertie.

DEF : le *centre d'inertie* d'une partie D de $\mathbb{R}^3$ de masse volumique μ (fonction de D dans $\mathbb{R}$) est par définition le point G défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_D \mu\overrightarrow{OM}}{\iiint_D \mu} = \left(\frac{\iiint_{(x,y,z)\in D} \mu(x,y,z)\,xdxdydz}{\iiint_{(x,y,z)\in D} \mu(x,y,z)\,dxdy}, \frac{\iiint_{(x,y,z)\in D} \mu(x,y,z)\,ydxdydz}{\iiint_{(x,y,z)\in D} \mu(x,y,z)\,dxdy}, \frac{\iiint_{(x,y,z)\in D} \mu(x,y,z)\,zdxdydz}{\iiint_{(x,y,z)\in D} \mu(x,y,z)\,dxdy} \right)$$

Ce qui donne, pour un domaine homogène ($\mu = cte$)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_D \overrightarrow{OM}}{\text{volume}(D)} = \left(\frac{\iiint_{(x,y,z)\in D} xdxdydz}{\iiint_{(x,y,z)\in D} dxdydz}, \frac{\iiint_{(x,y,z)\in D} ydxdydz}{\iiint_{(x,y,z)\in D} dxdydz}, \frac{\iiint_{(x,y,z)\in D} zdxdydz}{\iiint_{(x,y,z)\in D} dxdydz} \right)$$

Par exemple, pour une demi-boule $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$

$$z_G = \frac{\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2 \\ z\geqslant 0}} zdxdydz}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4\pi R^3}\iiint_{\substack{\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots drd\theta d\lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

DEF : le *moment d'inertie* d'une partie D de $\mathbb{R}^2$ de masse volumique μ par rapport à un axe Δ est par définition le réel défini par :

$$J_\Delta = \iiint_D \mu MH^2 = \iiint_{(x,y,z)\in D} \mu(x,y,z)\left((x-x_H)^2+(y-y_H)^2+(z-z_H)^2\right)dxdydz \text{ (où } H \text{ est le projeté de } M \text{ sur } \Delta)$$

Ce qui donne, pour un domaine homogène

$$J_\Delta = m\frac{\iiint\limits_D MH^2}{\text{volume}\,(D)} = m\frac{\iiint\limits_{(x,y,z)\in D}\left((x-x_H)^2+(y-y_H)^2+(z-z_H)^2\right)dxdy}{\iiint\limits_{(x,y,z)\in D} dxdydz}\ (m = \text{masse}\,(D))$$

Par exemple, le moment d'inertie d'une boule sphérique par rapport à un axe passant par le centre est

$$J_\Delta = m\frac{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\left(x^2+y^2\right)dxdydz}{\frac{4}{3}\pi R^3} = m\frac{\iiint\limits_{\substack{\ldots\ldots\\ \ldots\ldots}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots drd\theta d\lambda}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$