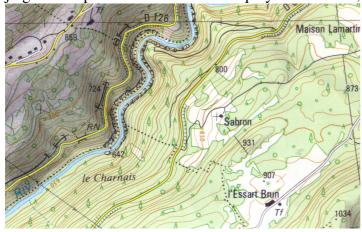
Des courbes remarquables sur les surfaces.

Robert FERREOL ferreol@mathcurve.com

Lignes de niveau.

Qui a déjà utilisé une carte touristique éditée par l'IGN au 25 000ème connaît les lignes joignant les points de même altitude qui y sont tracées ;

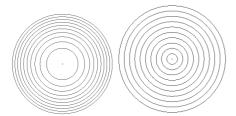


ces lignes, dites « de niveau », sont très utiles pour savoir si le chemin que l'on emprunte monte ou descend. Si l'on considère que la terre est localement plate, ces lignes sont les représentations sur la carte des sections du relief terrestre par des plans horizontaux. Etant donné une surface et une direction verticale, les courbes de niveau (ou hysohypses, du grec *hypsos* « hauteur »)associées sont donc les sections de la surface par les plans horizontaux (i.e. orthogonaux à la verticale) ; remarquons que ces diverses courbes forment une partition de la surface.

Si maintenant, l'on projette orthogonalement ces diverses courbes sur un même plan horizontal, on obtient une partition du projeté de la surface sur ce plan, permettant de reconstituer exactement la surface, à condition de savoir à quelle altitude correspond chaque courbe.

Par contre, il existe une infinité de surfaces ayant des courbes de niveau données, sans la connaissance des altitudes correspondantes ; par exemple, les surfaces dont les lignes de niveau sont des cercles concentriques sont toutes les surfaces de révolutions, et il y en a de très différentes formes !

Mais, et c'est ce qui est fait sur les cartes topographiques, on a quand même de bons renseignements sur la surface si l'on trace des courbes correspondant à des altitudes de pas constant ; par exemple, vous reconnaitrez le paraboloïde de révolution, évasé à la base, du cône de révolution sur les figures ci-dessous :



Sujet d'étude 1 : la connaissance de toutes les séries de courbes de niveau à pas constant permet-elle de reconstituer exactement la surface ?

En pratique, si la surface est donnée en repère orthonormé par une équation du type

$$z = f(x, y)$$
, les courbes de niveau sont les courbes d'équation
$$\begin{cases} z = h \\ f(x, y) = h \end{cases}$$
, et leurs

projections dans le plan xOy ont pour équation f(x, y) = h.

Ce sont donc aussi les courbes intégrales de l'équation différentielle pdx + qdy = 0, (où

$$p = f_x'$$
 et $p = f_y'$), s'écrivant aussi : $y' = -\frac{p}{q}$; ce sont aussi les équipotentielles du champ de

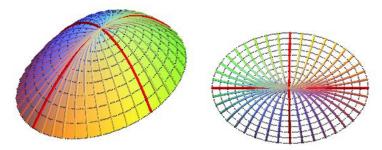
vecteur (p,q), où les lignes de champ du champ (-q,p). Bref, toutes ces notions ; courbe de niveau, courbe implicite, courbe intégrale d'une équation différentielle du premier ordre, ligne de champ, équipotentielle sont liées les unes aux autres !

Lignes de pente.

Maintenant, on peut se demander à quoi correspondent sur la surface les trajectoires orthogonales des courbes de niveau f(x,y) = h, qui sont aussi les lignes de champ du champ (p,q): ce sont *les lignes de plus grande pente* (ou lignes de pente tout court); on montre en effet que dans un plan, la droite passant par un point donné M ayant la plus forte pente (par rapport à l'horizontale) est la droite du plan qui est perpendiculaire à la droite horizontale passant par M.

Avec les notations précédentes, les projections des lignes de pente sont les courbes intégrales de l'équation $y' = \frac{q}{p}$.

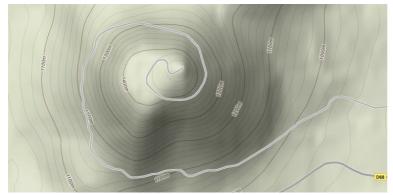
Voici par exemple, les lignes de niveau et de pente, sur la surface et en projection, du paraboloïde elliptique d'équation $z = -(x^2 + 2y^2)$. On obtient un réseau d'ellipses pour les premières, et de paraboles pour les secondes.



Les lignes de pente sont concrètement les trajectoires de gouttelettes d'eau ruisselant sur la surface, mais attention, ceci n'est qu'une approximation lorsque la vitesse est faible ; une bille d'acier lâchée sur une surface ne suivra une ligne de pente qu'au début ; elle la quittera ensuite à cause de son inertie (sujet d'étude 2 : étude de ces courbes d'écoulement).

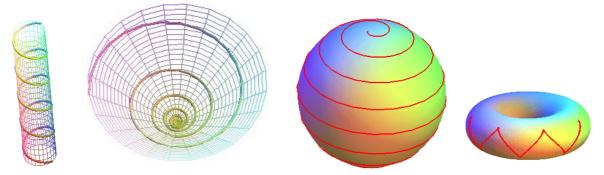
Lignes de pente constante.

Venons en à une notion très utile aux ingénieurs devant tracer des routes de montagne (voir ci-contre la route du Puy-de Dome)



; celle de *ligne de pente constante*, dont le nom contient la définition. Sauf que le nom le plus souvent utilisé, probablement pour éviter la confusion avec les lignes de pente est celui *d'hélice*, car la ligne de pente constante la plus célèbre est celle du cylindre de révolution vertical, qui est une hélice circulaire.

Voici quelques hélices tracées sur le cylindre, le cône, la sphère et le tore.



Notons que dans le cas de la sphère, l'hélice ne va pas jusqu'au pôle, où la pente est nulle!

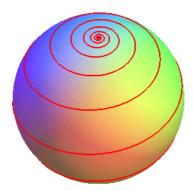
On obtient les hélices de pente λ de la surface z = f(x, y) en écrivant, avec les notations classiques, que $\frac{dz}{ds} = \lambda$, qui donne $(pdx + qdy)^2 = \lambda^2 (dx^2 + dy^2)$ ou encore $\lambda^2 (1 + y'^2) = (p + qy')^2$, équation différentielle fort peu sympathique mais qui permet de tracer les hélices à l'aide d'un logiciel de calcul.

Loxodromies.

La tangente à l'hélice forme un angle constant avec un plan horizontal, mais une erreur classique est de penser qu'elle forme un angle constant avec les tangentes aux courbes de niveaux, puisque celles-ci sont horizontales! Mais comme la tangente à l'hélice se trouve dans le plan tangent à la surface, l'angle entre cette tangente et celle de la courbe de niveau n'est égal à l'angle entre la tangente et un plan horizontal que lorsque le plan tangent est vertical, ce qui est le cas des cylindres verticaux par exemple.

Ces courbes tracées sur la surface faisant un angle constant avec les courbes de niveau ont été dénommées par Snellius en 1624 loxodromies, du grec loksos "oblique" et dromos "course"; vue leur importance en marine, puisque les loxodromies terrestres sont les courbes faisant un angle constant avec les parallèles, donc aussi avec les méridiens, autrement dit avec le nord, elles ont d'abord été étudiées dans le cas de la sphère.

On remarquera dans la figure ci-dessous que la loxodromie de la sphère s'enroule autour du pôle, contrairement à l'hélice, qui, elle, s'arrête dès que la pente du méridien est inférieure à λ .



D'après la remarque ci-dessus, les loxodromies et les hélices sont identiques dans le cas d'une surface cylindrique verticale, donc en particulier, l'hélice circulaire est aussi une loxodromie du cylindre. Mais c'est le seul cas !

Avec toujours les mêmes notations, l'équation différentielle des projections sur xOy des loxodromies faisant un angle α avec les lignes de niveau prend la joyeuse forme :

$$\tan^2 \alpha (py'-q)^2 = (1+p^2+q^2)(p+qy')^2$$

Essayez de résoudre l'équation des hélices (avec $\lambda = \tan \alpha$) et celle des loxodromies dans la cas où la surface est un plan oblique, par exemple z = x; vous verrez que les hélices et les loxodromies sont alors des droites, mais pas les mêmes!

Géodésiques.

Toutes les lignes définies précédemment étaient liées à la définition d'une verticale et d'une horizontale ; passons maintenant à des lignes définies de façon intrinsèque à la surface, quelle que soit sa position dans l'espace. Celles qui ont le plus d'importance pratique sont probablement les *géodésiques*, du grec *gê* "terre" et *daiein* "partager, diviser". Ce sont les courbes réalisant le plus court chemin d'un point à un autre de la surface, en restant dans cette surface. Ce sont en quelques sortes les « droites » de la surface, celles parcourues par un observateur qui irait toujours droit devant lui.

On montre que cette condition de minimalité implique la condition différentielle suivante : la normale principale à la géodésique (celle qui est dans le plan osculateur de cette courbe) coïncide avec la normale à la surface.

Avec les notations de Monge, l'équation différentielle s'écrit :
$$y'' = \frac{(py'-q)(r+2sy'+ty'^2)}{1+p^2+q^2}$$
;

c'est une équation du deuxième ordre : normal par un point il ne passe pas qu'une seule géodésique mais une dans chaque direction.

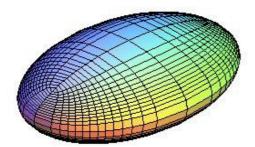
Attention : la condition différentielle conduit à une notion de géodésique locale, pas forcément globale ; par exemple, les géodésiques de la sphères sont ses grands cercles : deux points sont donc reliés par deux segments de géodésiques, mais un seul d'entre eux est vraiment le plus court chemin . Autre exemple ; les géodésiques du cylindre de révolution sont les hélices, et les droites parallèles à l'axe : une portion d'hélice effectuant un tour complet sera pourtant plus longue qu'un segment de droite direct !

Lignes de courbure.

En un point M de la surface, les sections normales de la surface (c'est-à-dire les sections de la surface par des plans contenant la normale à la surface), ont une courbure en M. Et c'est une propriété remarquable, que, dans de bonnes conditions de régularité, et sauf dans le cas d'un ombilic où la courbure normale est constante, la courbure normale a, quand le plan normal pivote autour de la normale, un maximum, et un minimum, correspondant à des plans orthogonaux, appelés plans principaux en M.

On définit alors les lignes de courbure comme les lignes tracées sur la surface dont la tangente reste dans un plan principal. Autrement dit, en chaque point de la ligne de courbure, la courbure normale tangente à la ligne est soit maximale, soit minimale. Par un point qui n'est pas un ombilic, il passe donc deux lignes de courbures, qui forment donc un double réseau de lignes deux à deux orthogonales sur la surface.

Voici par exemple ce réseau dans le cas d'un ellipsoïde qui n'est pas de révolution, pour lequel on remarque bien les 4 ombilics.



Les projections sur xOy des lignes de courbure ont pour équation différentielles (du premier

ordre):
$$\begin{vmatrix} 1+p^2+pqy' & pq+(1+q^2)y' \\ r+sy' & s+ty' \end{vmatrix} = 0.$$

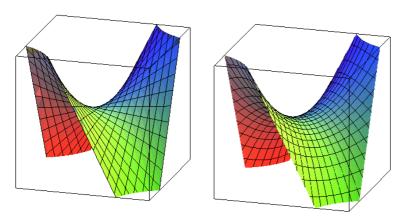
Lignes asymptotiques.

Nous avons défini ci-dessus les courbures normales extrémales ; il se peut que ces deux courbures soient de signes contraires (correspondant à des courbes situées de part et d'autre du plan tangent) ; cela arrive par exemple pour les points de la selle de cheval, où paraboloïde hyperbolique. Le point est alors dit « hyperbolique ». Dans ce cas, la courbure passe deux fois par 0, pour deux plans, dits « asymptotiques », dont, propriété remarquable, les plans principaux sont les plans bissecteurs.

On définit alors les lignes asymptotiques comme les lignes tracées sur la surface dont la tangente reste dans un plan asymptotique. Autrement dit, en chaque point de la ligne asymptotique, la courbure normale tangente à la ligne est nulle.

Par tout point hyperbolique d'une surface passent deux lignes asymptotiques, dont les lignes de courbure sont les bissectrices.

Voir par exemple ci-dessous les lignes asymptotiques du paraboloïde hyperbolique, ainsi que ses lignes de courbure.



Les projections sur xOy des lignes asymptotiques ont pour équation différentielles (du premier ordre): $r + 2sy' + ty'^2 = 0$, équation qui exprime que les lignes asymptotiques ne sont autres que les courbes dont le plan osculateur est le plan tangent à la surface.