**COMMENT APPRENDRE SON COURS ?**

Commencer par lire l'ensemble en sautant les détails techniques pour essayer de comprendre la globalité.
Puis reprendre chaque point en notant les définitions sur une fiche (ou un carnet), et les propriétés principales.

REFAIRE sur une feuille toutes les démonstrations, et retravailler les exemples : LIRE NE SUFFIT PAS !

Une heure de cours = 1/4 heure à une heure de travail perso...

## J'écoute : j'oublie ; je lis : je retiens ; je fais : je comprends. Confucius.

# I) LOGIQUE

## 1) Énoncés.

Les *objets mathématiques* sont les éléments des ensembles de base (nombres, vecteurs, points) et les diverses constructions faites à partir de ces objets, comme les ensembles, les listes, les relations, les fonctions, les opérations).

Un même objet mathématique peut avoir diverses *expressions* ou *écritures* , par exemple : $2, \sqrt{4}, \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$ sont diverses écritures du même objet.

Un *énoncé* (*mathématique*) est une phrase faisant intervenir des objets mathématiques et ayant un sens mathématique précis, et à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité, soit "vrai", soit "faux" ; exemple : "$\pi$ est un entier" (valeur de vérité = "faux").

Un énoncé fait toujours intervenir un verbe, souvent sous la forme d'un symbole de relation, comme $=, \leqslant, \subset, \perp$ .
Exemple : $3+5$ est un objet mathématique, $3+5=8$ est un énoncé mathématique.

Un énoncé peut dépendre de certaines variables, par exemple :

$$P(x,y) : xy = 1$$

et sa valeur de vérité dépend alors des valeurs données aux variables (dans l'exemple, $V(P(2,1/2)) =$ "*vrai*" et $V(P(2,2)) =$ "*faux*")

## 2) Quantificateurs.

Il y en a deux :

- le quantificateur universel, noté $\forall$ (= A à l'envers, A étant l'initiale de l'allemand Alle)

$\forall x \in E \;\; P(x)$ se lit : "pour tout $x$ appartenant à $E$, $P(x)$", ou "quel que soit $x$ appartenant à $E$, $P(x)$"

- le quantificateur existentiel, noté $\exists$ (= E retourné, $E$ étant l'initiale de l'allemand Existieren)

$\exists x \in E \;/\; P(x)$ se lit : "il existe (au moins) un $x$ appartenant à $E$ tel que $P(x)$",
ou "pour au moins un $x$ appartenant à $E$, $P(x)$"

Une variable est dite *liée* si elle est quantifiée, *libre* sinon ; un énoncé n'ayant pas de variable libre est dit *fermé* (ou *clos*) , sinon, il est dit *conditionnel.*

TRÈS IMPORTANT : une variable qui a été quantifiée devient "muette" : son écriture peut être remplacée par n'importe quel symbole (sauf ceux figurant ailleurs dans l'énoncé).

Exemples E1

| nom | énoncé en langage formalisé | fermé ? | variables libres | phrase en français ne contenant que les variables libres |
|---|---|---|---|---|
| $P\,(......)$ | $y = x^2$ | | | $\{$ |
| $Q\,(....)$ | $\exists x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 = y$ | | | $\{$ |
| $R$ | $\forall y \in \mathbb{R}_+\ Q\,(..)$ | | | $\{$ |
| $S\,(....)$ | $\exists x \in \mathbb{R}\ /\ f_k'\,(x) = 0$ | | | $\{$ |
| $T$ | $\forall k \in \{1,2,3\}\ \ S\,(....)$ | | | $\{$ |

Ecrire en langage formalisé :

- l'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle :

- l'entier $n$ est un multiple de 3 :

- l'entier $n$ est un carré (parfait) :

- les courbes des fonctions $f$ et $g$ ont un point en commun :

3) Négation.

DEF par table de vérité :

| $P$ | $\overline{P}$ ou *non* $P$ (python : not($P$)) |
|---|---|
| $V$ | |
| $F$ | |

Négation des quantificateurs :

| énoncé | négation de l'énoncé |
|---|---|
| $\forall x \in E\ \ P\,(x)$ | |
| $\exists x \in E\ /\ P\,(x)$ | |

Exemple :

| énoncé | $P$ | non $P$ |
|---|---|---|
| en français | tout réel possède un inverse | ..................................................................... |
| en langage formalisé | | |

4) Interversion des quantificateurs.

TRÈS IMPORTANT : LE SEUL CAS où deux quantifications peuvent être échangées est lorsqu'elles sont DE MÊME TYPE ET SUCCESSIVES.

MAIS ON NE PEUT PAS INTERVERTIR $\forall$ et $\exists$

Exemples :

| énoncé | $P$ | $Q$ |
|---|---|---|
| en français | ......................................................... | .............................................................. |
| en langage formalisé | $\forall x \in \mathbb{R}^*\ \exists y \in \mathbb{R}\ /\ xy = 1$ | $\exists y \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R}^*\ \ xy = 1$ |
| valeur de vérité | | |

Autre exemple : on notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des symétries axiales du plan $\mathcal{P}$

| énoncé | $P$ | $Q$ |
|---|---|---|
| en français | Toute symétrie du plan possède un point invariant | ..................................................................... |
| en langage formalisé | | |
| valeur de vérité | | |

Règle : si "$\exists y$ / $\forall x$" est vrai alors "$\forall x \ \ \exists y$" est vrai aussi, mais la réciproque est fausse.

5) Connecteurs logiques.

a) Connecteurs *et* (symbole classique : $\wedge$ , en python : *and* ) , *ou* ($\vee$ , en python : *or* ) et *soit...soit...*(ou exclusif, *xor* en python) : conjonction, disjonction et disjonction exclusive.

DEF :

| $V(P)$ | $V(Q)$ | $V(P$ et $Q)$ | $V(P$ ou $Q)$ (ou inclusif) | $V$ (soit $P$ soit $Q$) (ou exclusif) |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | | |
| $V$ | $F$ | | | |
| $F$ | $V$ | | | |
| $F$ | $F$ | | | |

PROP 1 (négation du *ou* et du *et*) :

| |
|---|
| $\overline{P \text{ } ou \text{ } Q}$ a même valeur de vérité que ............................................. |
| $\overline{P \text{ } et \text{ } Q}$ a même valeur de vérité que ............................................... |

D1

PROP 2 : le *ou* et le *et* sont distributifs l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire :

| |
|---|
| $P$ *ou* ($Q$ *et* $R$) a même valeur de vérité que ............................................. |
| |

D2

BLAGUE : On demande à une logicienne qui vient d'acoucher si elle a eu un garçon ou une fille. Que répond-elle ? OUI.

b) Connecteur *si...alors....* ($\Longrightarrow$) : implication.

$\alpha$) Définition.

DEF :

| $P$ | $Q$ | *si P alors Q* <br> $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | |
| $V$ | $F$ | |
| $F$ | $V$ | |
| $F$ | $F$ | |

Vocabulaire : dans *si P alors Q*, $P$ est l'*hypothèse*, et $Q$ la *conclusion.*

La phrase : "si tu es le pape, alors je suis la reine d'Angleterre est donc vraie" (sauf si tu es vraiment le pape et que je ne suis pas la reine d'Angleterre).

Exemple E2 : hachurer la partie du plan : $\{M(x,y) \ / \ x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant y\}$ .

P1 (très important) : "*si P alors Q*" a même valeur de vérité que " ($nonP$) *ou* $Q$" .

P2 : "*si P alors Q*" a même valeur de vérité que "soit($P$ et $Q$) , soit $non(P)$".

D3

$\beta$) Diverses formulation en français de l'implication.

Exercice préparatoire :

- Indiquer si c'est vrai ou si c'est faux :

1) Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut qu'il ait 3 angles droits.

2) Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu'il ait 3 angles droits.

3) Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires.

4) Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires.

- Compléter :

1) Pour qu'un quadrilatère soit un carré, il ....... que ses diagonales soient de même longueur.

2) Pour qu'un $\left\{\begin{array}{c}\text{quadrilatère}\\ \text{quadrilatère}\\ \text{parallélogramme}\\ \text{parallélogramme}\end{array}\right.$ soit un $\left\{\begin{array}{l}\text{..................}\\ \text{..................}\\ \text{..................}\\ \text{..................}\end{array}\right.$, il faut et il suffit que $\left\{\begin{array}{l}\text{il ait trois angles droits}\\ \text{ses diagonales se coupent en leur milieu}\\ \text{ses diagonales soient perpendiculaires}\\ \text{ses diagonales soient égales}\end{array}\right.$

En résumé :

| |
|---|
| - pour que $A$ il faut que $B$ (ou "une condition nécessaire pour que $A$ est que $B$") signifie .......$\Longrightarrow$ ...... |
| - pour que $A$ il suffit que $B$ (ou "une condition suffisante pour que $A$ est que $B$") signifie .....$\Longrightarrow$ ...... |

$\gamma$) Réciproque d'une implication.

DEF : on obtient la *réciproque* d'une implication en échangeant l'hypothèse et la conclusion :

la réciproque de $P \Rightarrow Q$ est, par définition, $Q \Rightarrow P$

REM : une implication et sa réciproque peuvent très bien avoir des valeurs de vérité différentes, ou l'une être évidente, et l'autre pas.

E3
Tout nombre pair $\geqslant 6$ est somme de 2 nombres premiers impairs.

$\delta$) Négation d'une implication.

PROP : la négation de $P \Rightarrow Q$ est .........
D4

Retenir que
LA NÉGATION D'UNE IMPLICATION N'EST PAS UNE IMPLICATION,
mais une conjonction.
Pour bien retenir cela, ne pas oublier que l'implication est un *ou*, donc sa négation est un *et*.

E4

$\varepsilon$) Contraposée d'une implication.

DEF : la *contraposée* de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

PROP : la contraposée d'une implication a même valeur de vérité que l'implication de départ.
D5

E5

$\phi$) Renforcement ou affaiblissement d'une implication.

On dit qu'on renforce (ou généralise) un théorème comportant une implication lorsque l'affaiblit son hypothèse, ou lorsque l'on renforce sa conclusion ;

autrement dit, si $P \Rightarrow Q$ est le théorème de départ, un renforcement de ce théorème est $P' \Rightarrow Q'$ avec

$$P \Rightarrow P' \text{ et } Q' \Rightarrow Q \text{ (de sorte que } P' \Rightarrow Q' \text{ implique } P \Rightarrow Q).$$

Par exemple : "$e$ est irrationnel" peut etre renforcé en " $e$ est transcendant" (renforcement de la conclusion), ou en $e^n$ est irrationnel pour tout entier $n > 0$ (affaiblissement de l'hypothèse), ou encore $e^n$ est transcendant pour tout entier $n > 0$ (affaiblissement de l'hypothèse et renforcement de la conclusion ).

c) Connecteur *si et seulement si* ($\Leftrightarrow$, en python : ==) : équivalence.

DEF : l'équivalence est la conjonction de l'implication et de sa réciproque ;

$$P \Leftrightarrow Q \text{ prend par définition les mêmes valeurs de vérité que } (P \Rightarrow Q) \ et \ (Q \Rightarrow P)$$

PROP : $P \Leftrightarrow Q$ est vrai quand $P$ et $Q$ ont la même valeur de vérité, fausse sinon.
D6

REM 1 : quand on dit que $\left\{ \begin{array}{l} P \text{ implique } Q \\ P \text{ et } Q \text{ sont équivalentes} \end{array} \right.$ cela signifie que $\left\{ \begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \Leftrightarrow Q \end{array} \right.$ est vrai.

REM 2 : "$P \Leftrightarrow Q$ " se lit "$P$ si et seulement si $Q$", ou "$Q$ est une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour que $P$".

REM anecdotique : la négation de l'équivalence est la disjonction exclusive.
D7

PROP : l'implication est transitive, ce qui signifie que si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, alors $P \Rightarrow R$ est vraie.

APPLICATION au "théorème tournant"

Pour démontrer que $n$ énoncés $P_1, P_2, ..., P_n$ sont équivalents, il suffit de démontrer les $n$ implications :

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow ... \Rightarrow P_n \Rightarrow P_1$$

Retour sur l'implication et l'équivalence en français.
Mettre les expressions suivantes dans les bonnes colonnes du tableau :
......équivaut à ........, ........car......., .........donc........, comme ...... alors.........., ........dès que..........,
il suffit que ....... pour que........., pour que ...... il faut que......... , (en rajouter)

| .........$\Rightarrow$ ...... | .........$\Leftarrow$ ........ | ........$\Leftrightarrow$ ....... |
|---|---|---|
| ........................................................ | .................................................... | ............................................ |
| ........................................................ | .................................................... | ............................................. |
| ........................................................ | .................................................... | ............................................ |
| ........................................................ | .................................................... | ............................................ |
| ........................................................ | .................................................... | ............................................ |
| ........................................................ | .................................................... | ............................................ |

6) L'unicité.

DEF : on dit qu'un élément ayant une propriété $P$ dans un ensemble $E$ est *unique* si deux éléments de $E$ ayant la propriété $P$ sont forcément égaux, autrement dit si :

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (P(x_1) \ et \ P(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

Remarquons que l'unicité n'implique pas l'existence : quand il y a unicité, soit il y a un unique élément ayant la propriété $P$, soit il n'y en a pas.

Exemples E6 :
Unicité de la solution d'une équation $f(x) = 0$.

Unicité de l'élément neutre pour une opération.
Le fait qu'il y ait conjointement existence et unicité de l'élément $x$ ayant la propriété $P$ se symbolise comme suit :

$$\exists! x \in E \ / \ P(x)$$

7) Égalités et inégalités.

- La double égalité : $a = b = c$ signifie : $a = b$ *et* $b = c$ ; sa négation est donc :.................................

ET NON $a \neq b \neq c$ qui n'a aucun sens.

- De même la double inégalité : $a \leqslant b \leqslant c$ signifie : .......................... ; sa négation est donc :.................................

ET NON $a > b > c$

Remplir le tableau, les nombres $x_1, x_2, ..., x_n$ étant des nombres réels :

| En français | En langage formalisé.................................................................................................... |
|---|---|
| 1. les $x_i$ sont tous nuls | |
| 2. l'un des $x_i$ est nul | |
| 3. les $x_i$ sont non tous nuls | |
| 4. les $x_i$ sont tous non nuls | |

| En français | En langage formalisé.......................................................................... |
|---|---|
| 1. les $x_i$ sont égaux | |
| 2. 2 au moins parmis les $x_i$ sont égaux | |
| 3. 2 au moins parmis les $x_i$ sont distincts | |
| 4. les $x_i$ sont tous distincts | |

Et qui est la négation de qui ?

8) Divers types de raisonnement.
a) Raisonnement direct.

Il utilise la rêgle du *modus ponens*, ou *syllogisme* :

Si $H$ est vrai et $(H \Rightarrow C)$ est vrai, alors $C$ est vrai

popularisé par :
Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Un *sophisme* est un raisonnement faux ayant une apparence de vérité ; exemple classique :

Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat.

Un *paradoxe* est, lui, un raisonnement, ou un fait exact, qui parait faux de prime abord.

b) Raisonnement par contraposée.

Il utilise la rêgle du *modus tollens* :

Si $H$ est vrai et $(\overline{C} \Rightarrow \overline{H})$ est vrai, alors $C$ est vrai

Exemple E7 : démontrer qu'étant donné un entier $n$, si $n^2$ est pair, alors $n$ est pair.

REM : on en déduit qu'un carré pair est toujours multiple de 4.

c) Raisonnement *par l'absurde* (ou *ab absurdo*).

Le principe est

$$\text{Si } H \text{ est vrai et } \left( \left(H \text{ et } \overline{C}\right) \Rightarrow F\right) \text{ est vrai, alors } C \text{ est vrai}$$

où $F$ est une contradiction, c'est-à-dire un énoncé faux.

Exemples :

- E8 : la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
- E9 : le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- E10 : tout entier $\geqslant 2$ est divisible par au moins un nombre premier.
- E11 : il existe une infinité de nombres premiers (démonstration d'Euclide).

REM : le raisonnement E11 peut être rendu direct en utilisant la suite dite d'*Euclide-Mullin* définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & 2 \\ \forall n & \in & N^* \ \ p_{n+1} \text{ est le plus petit diviseur premier de } p_1 p_2 ... p_n + 1 \end{array}$$

et en démontrant que les nombres $p_n$ sont tous distincts.

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

REM dans la REM : on ne sait pas si les $p_n$ recouvrent tous les nombres premiers possibles, bien qu'on le pense.

d) Raisonnement par disjonction des cas (ou par exhaustion).

Principe : sachant que $H$ équivaut à $H_1$ *ou* $H_2$ *ou* ....$H_n$ ,

$$\text{Si } H \text{ est vrai et } \left\{ \begin{array}{c} H_1 \Rightarrow C \\ H_2 \Rightarrow C \\ ... \\ H_n \Rightarrow C \end{array} \right. \text{ est vrai, alors } C \text{ est vrai}$$

Exemple E12 : résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètres $m$ le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} mx + y = 1 \\ x + my = m^2 \end{array} \right.$$

e) Raisonnement par analyse et synthèse.

Il s'agit de démontrer un énoncé du type :

$$\exists! x \in E \ / \ P(x)$$

Le raisonnement se fait en 2 temps :

- 1er temps : ANALYSE

On suppose que $x$ existe et on le détermine en fonction des données du problème : $x = f\left(\textit{données}\right)$.

Ce premier temps démontre L'UNICITÉ de $x$, mais pas encore son existence.

- 2ème temps : SYNTHÈSE

On pose $x = f(\textit{données})$, où $f$ a été défini pendant l'analyse, puis on démontre que $x$ vérifie bien la propriété $P$.

Ce deuxième temps démontre L'EXISTENCE de $x$.

Exemples E13 : toute fonction est de façon unique somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exemple de "démonstration" montrant que la synthèse est indispensable.
"Montrons" que

$$\exists! x \in \mathbb{R} \ / \ \sqrt{x-2} = \sqrt{2x-1}$$

ANALYSE :
Si $x$ existe alors $x - 2 = 2x - 1$ donc $x = -1$......