

I) LOGIQUE

1) Énoncés.

Un *énoncé* est une phrase ayant un sens mathématique précis, auquel on peut attribuer une valeur de vérité, soit "vrai", soit "faux" ; exemple : " π est un entier" (valeur de vérité = "faux").

Un énoncé peut dépendre de certaines variables, par exemple :

$$P(x, y) : xy = 1$$

et sa valeur de vérité dépend alors des valeurs données aux variables (dans l'exemple, $P(2, 1/2)$ est vrai et $P(2, 2)$ est faux)

2) Quantificateurs.

Il y en a deux :

- le quantificateur universel, noté \forall (= A à l'envers, A étant l'initiale de l'allemand Alle)

$\forall x \in E P(x)$ se lit : "pour tout x appartenant à E , $P(x)$ ", ou "quel que soit x appartenant à E , $P(x)$ "

- le quantificateur existentiel, noté \exists (= E retourné, E étant l'initiale de l'allemand Existieren)

$\exists x \in E / P(x)$ se lit : "il existe (au moins) un x appartenant à E tel que $P(x)$ ",
ou "pour au moins un x appartenant à E , $P(x)$ "

Une variable est dite *liée* si elle est quantifiée, *libre* sinon ; un énoncé n'ayant pas de variable libre est dit *fermé*.

TRÈS IMPORTANT : une variable qui a été quantifiée devient "muette" : son écriture peut être remplacée par n'importe quel symbole (sauf ceux figurant ailleurs dans l'énoncé).

Exemples E1

nom	énoncé en langage formalisé	fermé ?	variables libres	phrase en français ne contenant que les variables libres
$P(\dots)$	$y = x^2$			
$Q(\dots)$	$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 = y$			{ . .
R	$\forall y \in \mathbb{R}_+ Q(\dots)$			{ . .
$S(\dots)$	$\exists x \in \mathbb{R} / f'_k(x) = 0$			{ . .
T	$\forall k \in \{1, 2, 3\} S(\dots)$			{ . .

Ecrire en langage formalisé :

- l'équation $\cos x = 0$ possède des solutions :

- l'entier n est un multiple de 3 :

- l'entier n est un carré :

- les courbes des fonctions f et g ont un point en commun :

3) Négation.

DEF par table de vérité :

P	$\text{non } P \text{ (ou } \neg P)$
V	
F	

Négation des quantificateurs :

énoncé	négation de l'énoncé
$\forall x \in E \ P(x)$	
$\exists x \in E \ / \ P(x)$	

Exemple :

énoncé	P	non P
en français	tout réel possède un inverse
en langage formalisé		

4) Intersion des quantificateurs.

TRÈS IMPORTANT : LE SEUL CAS où deux quantifications peuvent être échangées est lorsqu'elles sont DE MÊME TYPE ET SUCCESSIVES.

MAIS ON NE PEUT PAS INTERVERTIR \forall et \exists

Exemples :

énoncé	P	Q
en français
en langage formalisé	$\forall x \in \mathbb{R}^* \ \exists y \in \mathbb{R} \ / \ xy = 1$	$\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}^* \ xy = 1$
valeur de vérité		

Autre exemple : on notera \mathcal{H} l'ensemble des homothéties du plan \mathcal{P}

énoncé	P	Q
en français	Toute homothétie du plan possède un point invariant
en langage formalisé		
valeur de vérité		

Règle : si " $\exists y \ / \ \forall x$ " est vrai alors " $\forall x \ \exists y$ " est vrai aussi, mais la réciproque est fausse.

5) Connecteurs logiques.

a) Connecteurs *et* (\wedge) et *ou* (\vee) : conjonction et disjonction.

DEF :

P	Q	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } Q$ (ou inclusif)	<i>soit</i> P <i>soit</i> Q (ou exclusif)
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

PROP 1 (négation du *ou* et du *et*) :

$\text{non}(P \text{ ou } Q)$ a même valeur de vérité que
$\text{non}(P \text{ et } Q)$ a même valeur de vérité que

D1

PROP 2 : le *ou* et le *et* sont distributifs l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire :

$P \text{ ou } (Q \text{ et } R)$ a même valeur de vérité que
.....

D2

b) Connecteur *si...alors...* (\implies) : implication.

α) Définition.

DEF :

P	Q	<i>si P alors Q</i> $P \implies Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Vocabulaire : dans *si P alors Q*, P est l'*hypothèse*, et Q la *conclusion*.

La phrase : "si tu es le pape, alors je suis la reine d'Angleterre est donc vraie" (sauf si tu es vraiment le pape).

Exemple E2 : hachurer la partie du plan : $\{M(x, y) / x \geq 0 \implies x \leq y\}$.

PROP (très important) : "*si P alors Q*" a même valeur de vérité que "*(nonP) ou Q*".

D3

β) Diverses formulation en français de l'implication.

Exercice préparatoire :

- Indiquer si c'est vrai ou si c'est faux :

- 1) Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut qu'il ait 3 angles droits.
- 2) Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu'il ait 3 angles droits.
- 3) Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires.
- 4) Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires.

- Compléter :

1) Pour qu'un quadrilatère soit un carré, il que ses diagonales soient de même longueur.

2) Pour qu'un $\left\{ \begin{array}{l} \text{quadrilatère} \\ \text{quadrilatère} \\ \text{parallélogramme} \\ \text{parallélogramme} \end{array} \right.$ soit un $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$, il faut et il suffit que $\left\{ \begin{array}{l} \text{il ait trois angles droits} \\ \text{ses diagonales se coupent en leur milieu} \\ \text{ses diagonales soient perpendiculaires} \\ \text{ses diagonales soient égales} \end{array} \right.$

En résumé :

- pour que A il faut que B (ou "une condition nécessaire pour que A est que B ") signifie $\dots\dots\dots \implies \dots\dots$
- pour que A il suffit que B (ou "une condition suffisante pour que A est que B ") signifie $\dots\dots \implies \dots\dots$

γ) Réciproque d'une implication.

DEF : on obtient la *réciproque* d'une implication en échangeant l'hypothèse et la conclusion :

$$\text{la réciproque de } P \implies Q \text{ est, par définition, } Q \implies P$$

REM : une implication et sa réciproque peuvent très bien avoir des valeurs de vérité différentes.

E3

ε) Négation d'une implication.

PROP : la négation de $P \Rightarrow Q$ est

D4

Retenir que **LA NÉGATION D'UNE IMPLICATION N'EST PAS UNE IMPLICATION**, mais une conjonction.

Pour bien retenir cela, ne pas oublier que l'implication est un *ou*, donc sa négation est un *et*.

E4

φ) Contraposée d'une implication.

DEF : la *contraposée* de $P \Rightarrow Q$ est $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$.

PROP : la contraposée d'une implication a même valeur de vérité que l'implication de départ.

D5

E5

c) Connecteur *si et seulement si* (\Leftrightarrow) : équivalence.

DEF : l'équivalence est la conjonction de l'implication et de sa réciproque ;

$P \Leftrightarrow Q$ prend par définition les mêmes valeurs de vérité que $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

PROP : $P \Leftrightarrow Q$ est vrai quand P et Q ont la même valeur de vérité, fausse sinon.

D6

REM 1 : quand on dit que $\begin{cases} P \text{ implique } Q \\ P \text{ et } Q \text{ sont équivalentes} \end{cases}$ cela signifie que $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ P \Leftrightarrow Q \end{cases}$ est vrai.

REM 3 : $P \Leftrightarrow Q$ se lit P si et seulement si Q , ou Q est une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour que Q .

REM anecdotique : la négation de l'équivalence est la disjonction exclusive.

D7

PROP : l'implication est transitive, ce qui signifie que si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, alors $P \Rightarrow R$ est vraie.

APPLICATION au "théorème tournant"

Pour démontrer que n énoncé P_1, P_2, \dots, P_n sont équivalents, il suffit de démontrer les n implications :

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n \Rightarrow P_1$$

6) L'unicité.

DEF : on dit qu'un élément ayant une propriété P dans un ensemble E est *unique* si deux éléments de E ayant la propriété P sont forcément égaux, autrement dit si :

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (P(x_1) \text{ et } P(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Remarquons que **l'unicité n'implique pas l'existence** : quand il y a unicité, soit il y a un unique élément ayant la propriété P , soit il n'y en a pas.

Par exemple, il y a unicité de l'élément neutre pour une opération, mais il peut très bien ne pas y en avoir.

Le fait qu'il y ait conjointement existence et unicité de l'élément x ayant la propriété P se symbolise comme suit :

$$\exists! x \in E / P(x)$$

Autre exemple E6.

7) Égalités et inégalités.

- La double égalité : $a = b = c$ signifie : $a = b$ et $b = c$; sa négation est donc

ET NON $a \neq b \neq c$ qui n'a aucun sens.

- De même la double inégalité : $a \leq b \leq c$ signifie : ; sa négation est donc

ET NON $a > b > c$

Remplir le tableau, les nombres x_1, x_2, \dots, x_n étant des nombres réels :

En français	En langage formalisé.....
1. les x_i sont tous nuls	
2. l'un des x_i est nul	
3. les x_i sont non tous nuls	
4. les x_i sont tous non nuls	

En français	En langage formalisé.....
1. les x_i sont égaux	
2. 2 au moins parmi les x_i sont égaux	
3. 2 au moins parmi les x_i sont distincts	
4. les x_i sont tous distincts	

Et qui est la négation de qui ?

8) Divers types de raisonnement.

a) Raisonnement direct.

Il utilise la règle du *modus ponens*, ou *syllogisme* :

Si H est vrai et $(H \Rightarrow C)$ est vrai, alors C est vrai

popularisé par :

Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Un *sophisme* est un raisonnement faux ayant une apparence de vérité ; exemple classique :

Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat.

Un *paradoxe* est, lui, un raisonnement, ou un fait exact, qui paraît faux de prime abord.

b) Raisonnement par contraposée.

Il utilise la règle du *modus tollens* :

Si H est vrai et $(\text{non } C \Rightarrow \text{non } H)$ est vrai, alors C est vrai

Exemple E7 : démontrer qu'étant donné un entier n , si n^2 est pair, alors n est pair.

REM : on en déduit qu'un carré pair est toujours multiple de 4.

c) Raisonnement *par l'absurde* (ou *ab absurdo*).

Le principe est

Si H est vrai et $((H \text{ et non } C) \Rightarrow F)$ est vrai, alors C est vrai

où F est une contradiction, c'est-à-dire un énoncé faux.

Exemples :

- E8 : la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
- E9 : le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- E10 : tout entier ≥ 2 est divisible par au moins un nombre premier.
- E11 : il existe une infinité de nombres premiers (démonstration d'Euclide).

REM : le raisonnement E11 peut être rendu direct en utilisant la suite dite d'*Euclide-Mullin* définie de la façon suivante :

$$p_1 = 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n+1} \text{ est le plus petit diviseur premier de } p_1 p_2 \dots p_n + 1$$

et en démontrant que les nombres p_n sont tous distincts.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

REM dans la REM : on ne sait pas si les p_n recouvrent tous les nombres premiers possibles, bien qu'on le pense.

d) Raisonnement par disjonction des cas (ou par exhaustion).

Principe : sachant que H équivaut à H_1 ou H_2 ou ... H_n ,

$$\text{Si } H \text{ est vrai et } \begin{cases} H_1 \Rightarrow C \\ H_2 \Rightarrow C \\ \dots \\ H_n \Rightarrow C \end{cases} \text{ est vrai, alors } C \text{ est vrai}$$

Exemple E12 : déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ suivant les valeurs de α et β .

Exemple E13 : résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètres m le système :

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m^2 \end{cases}$$

e) Raisonnement par analyse et synthèse.

Il s'agit de démontrer un énoncé du type :

$$\exists! x \in E / P(x)$$

Le raisonnement se fait en 2 temps :

- 1er temps : ANALYSE

On suppose que x existe et on le détermine en fonction des données du problème : $x = f(\text{données})$.

Ce premier temps démontre L'UNICITÉ de x , mais pas encore son existence.

- 2ème temps : SYNTHÈSE

On pose $x = f(\text{données})$, où f a été défini pendant l'analyse, puis on démontre que x vérifie bien la propriété P .

Ce deuxième temps démontre L'EXISTENCE de x .

Exemple E14 : démonstration de l'existence et de l'unicité du barycentre de n points pondérés, quand la somme des poids est non nulle.

Exemple E15 : toute fonction est de façon unique somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

f) Raisonnement par récurrence.

α) Récurrence simple.

Principe :

Si $\begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ est vrai} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geq n_0 P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ est vrai} \end{cases}$, alors $\forall n \geq n_0 P(n)$ est vrai

Variante :

Si $\begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ est vrai} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geq n_0 + 1 P(n-1) \Rightarrow P(n) \text{ est vrai} \end{cases}$, alors $\forall n \geq n_0 P(n)$ est vrai

Exemple E16 : la suite de Fibonacci (F_n) est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \geq 2 F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \end{cases}$$

Remplir le tableau suivant et conjecturer une formule, puis la démontrer par récurrence :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
F_n								
$F_{n-1}F_{n+1}$	/							
F_n^2								

Exemples de récurrences fausses ; déterminer quels sont les erreurs dans les raisonnements suivants :

1 : soit $P(n) : n = n + 1$

Si $P(n)$ est vraie, $n = n + 1$, donc, en ajoutant 1, $n + 1 = n + 2$ et $P(n + 1)$ est vraie.

Donc, pour tout n , $n = n + 1$.

2. n points distincts donnés du plan sont toujours alignés sur une même droite

En ceci est vrai pour $n = 1$, et même pour $n = 2$.

Supposons que n points distincts donnés du plan sont toujours alignés sur une même droite (hypothèse de récurrence) et considérons $n + 1$ points du plan $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, les n points A_1, A_2, \dots, A_n sont alignés sur une droite D et les n points A_2, \dots, A_n, A_{n+1} sont alignés sur une droite D' ; mais comme les points A_2 et A_3 sont communs à D et D' , $D = D'$ et les $n + 1$ points $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur $D = D'$, ce qui achève la récurrence.

β) Récurrence double.

Principe :

Si $\begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ et } P(n_0 + 1) \text{ sont vrais} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geq n_0 P(n) \text{ et } P(n + 1) \Rightarrow P(n + 2) \text{ est vrai} \end{cases}$, alors $\forall n \geq n_0 P(n)$ est vrai

variante 1 :

Si $\begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ et } P(n_0 + 1) \text{ sont vrais} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geq n_0 + 2 P(n - 2) \text{ et } P(n - 1) \Rightarrow P(n) \text{ est vrai} \end{cases}$, alors $\forall n \geq n_0 P(n)$ est vrai

variante 2 :

Si $\begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ et } P(n_0 + 1) \text{ sont vrais} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geq n_0 + 1 \ P(n-1) \text{ et } P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ est vrai} \end{cases}$, alors $\forall n \geq n_0 \ P(n)$ est vrai

Exemple E17 : Montrer que pour $n \geq \dots$, $\frac{(1,6)^n}{3} \leq F_n \leq \frac{(1,7)^n}{2}$.

REM1 : une récurrence double sur $P(n)$ est en fait une récurrence simple sur " $P(n)$ et $P(n+1)$ ".
D8

REM2 : on peut aussi effectuer des récurrences triples, quadruples, ..., p -uples.

γ) Récurrence forte.

Principe :

Si $\begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ est vrai} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geq n_0 \ [\forall k \in [n_0, n] \ P(k)] \Rightarrow P(n+1) \text{ est vrai} \end{cases}$, alors $\forall n \geq n_0 \ P(n)$ est vrai

Exemple E18 : démontrer que tout entier ≥ 2 est décomposable en produit de facteurs premiers.

REM : une récurrence forte sur $P(n)$ est en fait une récurrence simple sur " $\forall k \in [n_0, n] \ P(k)$ ".
D9