

B) MATRICES

E, F et G désignent toujours des K -espaces vectoriels.

RAPPELS : une matrice A à n lignes et p colonnes (ou de format (n, p)) à coefficients dans K est une application de $[[1, n]] \times [[1, p]]$ dans K ;

pour $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, p]]$, $A(i, j)$ est souvent noté de façon indicielle a_{ij} , de sorte que A est notée $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$;

on la représente aussi par le tableau rectangulaire :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{bmatrix} = i \begin{matrix} j \\ \begin{bmatrix} a_{1j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{jp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{matrix} ;$$

l'ensemble $K^{[[1, n]] \times [[1, p]]}$ de ces matrices est noté $M_{np}(K)$; on sait que c'est un K -espace vectoriel de dimension np , (donc isomorphe à K^{np}), dont la base canonique est formée des matrices $(E_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$ avec $E_{kl}(i, j) = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

I) MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE RELATIVEMENT À DEUX BASES.

1) Propriété fondamentale.

PROP : la connaissance des images des vecteurs d'une base de l'espace de départ caractérise entièrement une application linéaire ; plus précisément :

si $(H) : \left(\begin{matrix} \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ base de } E \\ (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) \in F^n \end{matrix} \right)$ alors $(C) : \exists! f \in L(E, F) / \forall i \in [[1, n]] f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$

D1

2) Définition.

DEF : la matrice d'une application linéaire entre espaces de dimensions finies relativement à (ou dans) une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée, est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base d'arrivée des images des vecteurs de la base de départ ; autrement dit :

si $\left(\begin{matrix} f \in L(E, F) \\ \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ base de } E \\ \mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p) \text{ base de } F \\ A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{pn}(K) \end{matrix} \right)$ alors $A = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) \stackrel{def}{\iff} \forall j \in [[1, n]] f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \vec{f}_i$

Par une représentation en tableau :

$$\begin{matrix} f(\vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_j) & \dots & f(\vec{e}_n) & \vec{f}_1 \\ & & a_{1j} & & & \vdots \\ & & \dots & & & \vec{f}_i \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & \vdots \\ & & \dots & & & \vec{f}_p \\ & & a_{pj} & & & \end{matrix}$$

a_{ij} est donc laème coordonnée dans la base d'arrivée de l'image par f duième vecteur de la base de départ.

ATTENTION : une matrice d'une application linéaire d'un espace de dimension n vers un espace de dimension p est de format (p, n) et non (n, p) !

REM : pour la matrice d'un endomorphisme de E , on prend en général la même base pour E en tant qu'espace de départ, et pour E en tant qu'espace d'arrivée ; notation : $\text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{B})}(f)$ est simplifié en $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Vocabulaire : la matrice d'une application linéaire de K^n dans K^p relativement aux bases canoniques de K^n et K^p est appelée la matrice canonique de cette application.

3) Exemples.

E1 :

- la matrice canonique de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ est $\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$.

- la matrice canonique de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix}$ est $\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$

- la matrice canonique de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}$ est

- la matrice canonique de $x \mapsto (ax, bx, cx)$ est

- la matrice canonique de $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ est

- la matrice de l'application nulle de E de dimension n vers F de dimension p est, quelles que soient les bases choisies

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = 0 \dots \dots$$

- la matrice de l'identité est indépendante de la base choisie :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(id_E) = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Cette matrice est appelée la *matrice identité* d'ordre n et notée I_n .

REM : si l'on ne prend pas la même base pour le départ et pour l'arrivée, la matrice de l'identité n'est plus la matrice identité ! Par exemple, si E est de base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) et $\begin{cases} \vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$,

$$\text{mat}_{((\vec{e}_3, \vec{e}_4), (\vec{e}_1, \vec{e}_2))}(id_E) = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}, \text{mat}_{((\vec{e}_1, \vec{e}_2), (\vec{e}_3, \vec{e}_4))}(id_E) = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

- la matrice de l'homothétie de rapport a , $h_a = a \cdot id_E$ est aussi indépendante de la base choisie :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(h_a) = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = aI_n$$

- par contre, la matrice d'une projection ou d'une symétrie dépend de la base choisie.

DEF : si $E = F \oplus G$, on dit qu'une base \mathcal{B} de E est *adaptée* à cette décomposition si c'est la concaténation d'une base de F et d'une base de G .

Si donc, \mathcal{B} est adaptée, $p =$ projection de base F et de direction G , $q = id_E - p$, $s = p - q$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}, \text{mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}, \text{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

- la matrice de la dérivation de $K_3[X]$ dans $K_2[X]$ dans les bases canoniques est :

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

4) Caractérisation d'une application linéaire par l'une de ses matrices.

PROP (corollaire de la propriété fondamentale ci-dessus) : si \mathcal{B} base de E de dimension n , \mathcal{C} base de F de dimension p et $A \in M_{pn}(K)$, il existe une unique application linéaire $f \in L(E, F)$ telle que

$$A = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f)$$

Ceci signifie que l'application : $\left\{ \begin{array}{l} \dots \rightarrow \dots \\ \dots \mapsto \dots \end{array} \right.$ est

II) OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

1) Addition et multiplication externe.

Notions déjà vues dans le cours sur les espaces vectoriels ; notons qu'on ne peut additionner que des matrices de mêmes formats. On sait que $(M_{np}(K), +, \cdot(\text{ext.}))$ a une structure de

PROP : si \mathcal{B} base de E de dimension n , \mathcal{C} base de F de dimension p , $f \in L(E, F)$ et $\lambda \in K$, on a

$\text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f + g) = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) + \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(g)$
$\text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(\lambda f) = \lambda \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f)$

Ceci signifie que l'application : $\left\{ \begin{array}{l} \dots \rightarrow \dots \\ \dots \mapsto \dots \end{array} \right.$ est ; combiné avec la propriété ci-dessus, c'est donc un

D2

COROLLAIRE : si les ev E et F sont de dimensions finies, $L(E, F)$ est lui aussi de dimension finie et

$\dim L(E, F) = \dots$

2) Multiplication des matrices.

a) Recherche de la définition.

Le produit des matrices va être défini de sorte qu'au produit de deux matrices corresponde la composée des applications linéaires associées ; recherchons donc la matrice d'une composée d'applications linéaires.

PROP : si $\left\{ \begin{array}{l} f \in L(E, F) \\ g \in L(F, G) \end{array} \right.$, $\left(\begin{array}{l} \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ base de } E \\ \mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p) \text{ base de } F \\ \mathcal{D} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q) \text{ base de } G \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} A = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) \in M_{pn}(K) \\ B = \text{mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{D})}(g) \in M_{pq}(K) \\ C = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{D})}(g \circ f) \in M_{pn}(K) \end{array} \right.$

alors

$$C(i, j) = \sum_{k=1}^p B(i, k) A(k, j), \text{ pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$$

D3

D'où la

b) Définition.

DEF : si A est une matrice de format (n, p) et B une matrice de format (p, q) la matrice produit AB est la matrice de format (n, q) définie par

$$(AB)(i, j) = \sum_{k=1}^p A(i, k) B(k, j) \text{ pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$$

REM 0 : remarquer l'espèce de "relation de Chasles" :

$$\text{format}(n, p) \times \text{format}(p, q) = \text{format}(n, q)$$

REM 1 : il est pratique de présenter le produit de 2 matrices sous la forme :

F1

REM 2 : le produit matriciel n'est donc pas une loi de composition interne dans l'ensemble de toutes les matrices, ni même dans $M_{np}(K)$ avec $n \neq p$; par contre, c'en est une dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n $M_n(K)$.

REM 3 : le produit matriciel n'est évidemment pas commutatif puisqu'un produit peut être possible dans un sens et ne pas l'être dans l'autre.

REM 4 : le nombre $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'additions} \\ \text{de multiplications} \end{array} \right.$ pour effectuer $(AB)(i, j)$ vaut $\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$, donc

le nombre $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'additions} \\ \text{de multiplications} \end{array} \right.$ pour effectuer le produit AB vaut $\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$

REM 5 : le produit d'une matrice-ligne (format $(1, n)$) par une matrice-colonne (format $(n, 1)$) donne une matrice de format $(1, 1)$, que l'on identifie avec son coefficient :

$$[a_1, \dots, a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_k b_k \end{bmatrix} \stackrel{\text{abus d'écriture}}{=} \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

REM 6 : avec cet abus d'écriture, le coefficient $(AB)(i, j)$ de la i ème ligne et de la j ème colonne de AB s'interprète comme le produit matriciel de la i ème ligne L_i de A et de la j ème colonne C_j de B ; en effet :

$$L_i C_j = [a_{i1}, \dots, a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \dots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = (AB)(i, j)$$

REM 7 : le produit d'une matrice-colonne (format $(n, 1)$) par une matrice-ligne (format $(1, n)$) donne une matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, \dots, b_n] = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = (\dots)_{1 \leq i, j \leq n}$$

c) Propriétés.

α) Matrice d'une composée.

PROP (due à la définition même du produit des matrices) :

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} f \in L(E, F) \\ g \in L(F, G) \end{array} \right. , \left(\begin{array}{l} \mathcal{B} \text{ base de } E \\ \mathcal{C} \text{ base de } F \\ \mathcal{D} \text{ base de } G \end{array} \right) , \text{ alors } \boxed{\text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{D})}(g \circ f) = \text{mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{D})}(g) \times \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f)} .$$

ATTENTION : On n'a donc malheureusement qu'une relation de Chasles "à l'envers" :- (par contre, pour les endomorphismes, tout va bien :-)

$$\text{si } \boxed{f \in L(E) , \mathcal{B} \text{ base de } E} , \text{ alors } \boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)}$$

α) "Associativité".

$$\text{PROP : si } \left\{ \begin{array}{l} A \in M_{np}(K) \\ B \in M_{pq}(K) \\ C \in M_{qr}(K) \end{array} \right. \text{ alors } (AB)C = A(BC)$$

D4 (par les applications linéaires, et par le calcul).

β) Distributivité

$$\text{PROP : si } \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A \in M_{np}(K) \\ B, C \in M_{pq}(K) \end{array} \right. \text{ alors } A(B + C) = AB + AC \\ \left\{ \begin{array}{l} A, B \in M_{np}(K) \\ C \in M_{pq}(K) \end{array} \right. \text{ alors } (A + B)C = AC + BC \end{array} \right.$$

D5 (par les applications linéaires, et par le calcul).

γ) Relations avec la multiplication externe .

$$\text{PROP : si } \left\{ \begin{array}{l} A \in M_{np}(K), B \in M_{pq}(K) \\ \lambda \in K \end{array} \right. \quad A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda AB$$

COROLLAIRE : $(M_n(K), +, \cdot, \text{int.})$ est un anneau. Cet anneau n'est ni intègre, ni commutatif dès que $n \geq 2$; de plus, la bijection $\left\{ \begin{array}{l} \dots \rightarrow \dots \\ \dots \mapsto \dots \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'anneaux.
D6

III) STRUCTURE DE K-ALGÈBRE.

DEF : soit E un ensemble muni de 2 lois de composition internes $\left\{ \begin{array}{l} E^2 \xrightarrow{+} E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} E^2 \xrightarrow{*} E \\ (x, y) \mapsto x * y \end{array} \right.$, et une loi de composition externe à opérateurs dans $K \left\{ \begin{array}{l} K \times E \xrightarrow{\times} E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array} \right.$.

$(E, +, \times, *)$ est dit posséder une structure de K -algèbre si

1. $(E, +, \times)$ est un K -espace vectoriel
2. $(E, +, *)$ est un anneau
3. $\forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in K \quad (\lambda x) * y = \lambda(x * y) = x * (\lambda y)$

Exemples E2.

REM : si $\lambda \in K$ et $x \in E$, $\lambda x = (\lambda 1_E) * x$, d'après 3.

DEF : une partie F d'une algèbre E est appelée une *sous-algèbre* si c'est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.

D'après la remarque ci-dessus, on a la CNS :

1. $\forall \lambda \in K \quad \lambda 1_E \in F$
2. $\forall x, y \in F \quad x + y \in F$
3. $\forall x, y \in F \quad x * y \in F$

DEF : si E, F sont deux K -algèbres et f une application de E vers F , f est appelée un morphisme de K -algèbre si c'est un morphisme d'anneaux ($f(x * y) = f(x) * f(y)$, $f(1_E) = 1_F$) et un morphisme de K -espaces vectoriel (autrement dit f est K -linéaire).

Exemples E3.

IV) EXPRESSION MATRICIELLE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

PROP : données :

E et F deux K -espaces vectoriels de dimensions finies n et p ,

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base de E , $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ base de F ,

$f \in L(E, F)$, $A = (a_{ij}) = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) \in M_{pn}(K)$,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \in E, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ matrice colonne des coordonnées de } \vec{x} \text{ dans } \mathcal{B}$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^p y_i \vec{f}_i \in F, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix}, \text{ matrice colonne des coordonnées de } \vec{y} \text{ dans } \mathcal{C}. \text{ Alors :}$$

$$\boxed{\vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow Y = AX}$$

D7
E4

DEF : si $A \in M_{np}(K)$, l'application linéaire canonique associée à A est l'application :

$$f_A : \begin{cases} M_{p1}(K) (\approx K^p) \rightarrow M_{n1}(K) (\approx K^n) \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

PROP : la matrice canonique de f_A est la matrice A .

D8

CORO : si A et $B \in M_{np}(K)$, alors

$$(\forall X \in M_{p1}(K) \quad AX = BX) \Rightarrow A = B$$

D9

REM 1 : bien noter le $\forall X$; si $AX = BX$ pour une seule X , même non nulle, on ne peut pas en déduire $A = B$.

REM 2 : on a également la relation : $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

PROP : soit $A \in M_{np}(K)$ dont les colonnes sont C_1, \dots, C_p ; alors

1.	x_1 ...	$\in \ker f_A \Leftrightarrow x_1 C_1 + \dots + x_p C_p =$	0 ...
2.	$\text{Im } f_A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$		

D10

V) MATRICES CARRÉES INVERSIBLES.

1) Définitions.

LEMME : si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux anneaux isomorphes, alors le groupe des éléments inversibles de \mathcal{A} est isomorphe au groupe des éléments inversibles de \mathcal{B} .

D11

DEF : une matrice carrée $A \in M_n(K)$ est dite *inversible* si c'est un élément inversible de l'anneau $M_n(K)$, autrement dit s'il existe $B \in M_n(K)$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

B est notée A^{-1} .

PROP et DEF : si E est un espace vectoriel de dimension n , l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans K est un groupe multiplicatif isomorphe à $(GL(E), \circ)$. Il est appelé "groupe linéaire en dimension n " et noté $GL_n(K)$.

D12

REM 1 : si $f \in L(E)$, on a donc

$$f \in GL(E) \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \in GL_n(K)$$

, et si $A \in M_n(K)$,

$$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow f_A \in GL(K^n)$$

REM 2 : $GL_1(K) = K^*$.

REM 3 : rappelons qu'un élément "régulier" (ou "simplifiable") de l'anneau $M_n(K)$ est une matrice A vérifiant :

$$\forall B, C \in M_n(K) \quad AB = AC \Rightarrow B = C \quad \text{et} \quad BA = CA \Rightarrow B = C$$

On sait qu'un élément inversible est toujours régulier, mais il se trouve que dans le cas des matrices, la réciproque est vraie (preuve dans l'exercice 16 sur les matrices) ; ceci explique pourquoi une matrice inversible est parfois appelée matrice "régulière".

2) Cas $n = 2$

PROP : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible ssi $ad \neq bc$ et $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

D13

Exemple : $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

3) Méthode d'inversion d'une matrice par la résolution d'un système.

LEMME : soit $A \in M_n(K)$; alors s'il existe une matrice $B \in M_n(K)$ telle que

$$\forall X, Y \in M_{n1}(K) \quad AX = Y \Leftrightarrow X = BY$$

alors A est inversible d'inverse B .

D14

En pratique, on résout donc le système d'inconnues x_1, \dots, x_n et de paramètres y_1, \dots, y_n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Si le système est "de Cramer", la matrice est inversible et l'expression des solutions :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

donne la matrice inverse.

E5 : inverser $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

VI) TRANSPOSITION DES MATRICES.

a) Définition.

DEF : la *transposée* d'une matrice est la matrice dont les lignes ont pour coordonnées les coordonnées des colonnes de la matrice de départ (ou l'inverse) :

si $A \in M_{np}(K)$ et $B \in M_{pn}(K)$,

$$B = {}^t A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall i \in [1, p] \quad \forall j \in [1, n] \quad B(i, j) = A(j, i)$$

b) Propriétés.

PROP :

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad \forall A, B \in M_{np}(K)$
3. ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA \quad \forall A \in M_{np}(K) \quad \forall \lambda \in K$ (linéarité de la transposition)
4. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA \quad \forall A \in M_{np}(K) \quad \forall B \in M_{pq}(K)$
5. si $A \in GL_n(K)$ tA également, et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ (notée ${}^tA^{-1}$)

D15

c) Matrices carrées symétriques et antisymétriques.

DEF : une matrice carrée est dite $\begin{cases} \text{symétrique} \\ \text{antisymétrique} \end{cases}$ si elle est $\begin{cases} \text{égale à} \\ \text{égale à l'opposé de} \end{cases}$ sa transposée :

$$A \in M_n(K) \text{ est } \begin{cases} \text{symétrique} \\ \text{antisymétrique} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tA = A \\ {}^tA = -A \end{cases} \Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \begin{cases} A(j, i) = A(i, j) \\ A(j, i) = -A(i, j) \end{cases}$$

Notations :

$$\begin{aligned} S_n(K) &= \{A \in M_n(K) / {}^tA = A\} \\ A_n(K) &= \{A \in M_n(K) / {}^tA = -A\} \end{aligned}$$

PROP :

1. $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont des sev de $M_n(K)$
2. Toute matrice carrée est de façon unique la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

D16

REM : 2. se traduit par

PROP : $\dim S_n(K) = \dots\dots\dots$, $\dim A_n(K) = \dots\dots\dots$

D17

VII) CHANGEMENTS DE BASES.

1) Matrice de passage d'une base à une autre.

a) Définition.

DEF : la *matrice de passage* d'une base (dite "ancienne base") à une autre (dite "nouvelle base") est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne :

si E K -espace vectoriel de dimension finie n ,

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ bases de E , $\vec{e}'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \vec{e}_i$, alors

$$P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 & \dots & \vec{e}'_j & \dots & \vec{e}'_n \\ & & p_{1j} & & \\ & & \dots & & \\ p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{ip} \\ & & \dots & & \\ & & p_{nj} & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \dots \\ \vec{e}_i \\ \dots \\ \vec{e}_n \end{matrix}$$

REM : la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' n'est autre que la matrice de l'identité de E relativement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} (bien noter l'interversion) :

$$P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} = \text{mat}_{(\mathcal{B}', \mathcal{B})}(id_E)$$

b) Propriétés.

PROP :

1. $P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')} = P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} \times P_{(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')} (relation\ de\ Chasles)$
2. $P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B})} = I_n$
3. $P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} \in GL_n(K) (une\ matrice\ de\ passage\ est\ toujours\ inversible)$
4. $(P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')})^{-1} = P_{(\mathcal{B}', \mathcal{B})}$

D18

E6

2) Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.

PROP : données :

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ bases de E , $P = P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}$,

$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{e}'_i \in E$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$ matrices colonne des coordonnées de \vec{x} dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Alors

$$X = PX'$$

D19

REM : alors que dans P on a les coordonnées de la nouvelle base dans l'ancienne, la relation $X = PX'$ permet d'avoir les coordonnées anciennes d'un vecteur en fonction des nouvelles. Ce phénomène s'appelle la "contravariance".

Il n'est en fait pas gênant car il permet de passer d'une équation cartésienne $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dans l'ancienne base à la nouvelle équation cartésienne $g(x'_1, \dots, x'_n) = 0$.

E7

3) Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

PROP : données

$f \in L(E, F)$

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ bases de E , $P = P_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}$

$\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ et $\mathcal{C}' = (\vec{f}'_1, \dots, \vec{f}'_p)$ bases de F , $Q = P_{(\mathcal{C}, \mathcal{C}')}$

$A = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f)$, $A' = \text{mat}_{(\mathcal{B}', \mathcal{C}')} (f)$

Alors (relation à bien connaître) :

$$A' = Q^{-1}AP$$

D20

E8

VIII) TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE.

1) Définition.

DEF : la *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A(i, i)$$

2) Propriétés.

PROP :

1. $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B \quad \forall A, B \in M_n(K)$
2. $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr} A \quad \forall A \in M_n(K) \quad \forall \lambda \in K$ (linéarité de la trace)
3. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \forall A, B \in M_n(K)$

D21

PROP et DEF : toute les matrices d'un même endomorphisme ont la même trace, qui est par définition la *trace* de cet endomorphisme.

$$\forall f \in L(E) \quad \forall B, B' \text{ bases de } E \quad \text{tr}(\text{mat}_B(f)) = \text{tr}(\text{mat}_{B'}(f)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr} f$$

D22

REM : la trace permet donc de repérer rapidement une erreur lors d'un changement de base.

IX) RANG D'UNE MATRICE.

a) Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base.

DEF : la *matrice* d'une famille finie de vecteurs dans une base est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la famille dans cette base :

si E K -espace vectoriel de dimension finie n ,

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base de E et $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ famille de vecteurs de E , $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i$, alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_j & \dots & \vec{x}_p \\ & & a_{1j} & & \\ & & \dots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ & & \dots & & \\ & & a_{nj} & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \dots \\ \vec{e}_i \\ \dots \\ \vec{e}_n \end{matrix}$$

REM : le rang de la famille \mathcal{F} (i.e. la dimension de l'espace qu'elle engendre) est aussi le rang de la famille des colonnes de $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

b) Définition du rang d'une matrice.

DEF : le rang d'une matrice de format (n, p) est le rang (dans $M_{n1}(K)$) de la famille de ses colonnes :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) \text{ où } C_j = \begin{bmatrix} A(1, j) \\ \vdots \\ A(n, j) \end{bmatrix}$$

REM : d'après la remarque ci-dessus, toutes les matrices d'une même famille de vecteurs (dans des bases quelconques) ont pour rang le rang de cette famille.

PROP : toutes les matrices d'une même application linéaire ont pour rang le rang de cette application linéaire.

D23

c) Propriétés.

PROP : soit $A \in M_{np}(K)$, $A = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f)$; alors

1. $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$
2. $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow f$ est surjective
3. $\text{rg}(A) = p \Leftrightarrow f$ est injective

COROLLAIRE (diverses caractérisations de l'inversibilité d'une matrice carrée) : soit $A \in M_n(K)$, $A = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f)$

A est inversible si et seulement si

1. $\exists B \in M_n(K) \quad AB = BA = I_n$ (c'est la définition)
2. f est bijective ($\Leftrightarrow f$ est injective)
3. $\text{rg}(A) = n$

D24

X) MATRICES ÉQUIVALENTES.

DEF : deux matrices sont dites équivalentes si ce sont les matrices de la même application linéaire (elles ont donc forcément le même format) : si $A, A' \in M_{np}(K)$

$$A \text{ eq } A' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists E \text{ de dimension } p, \exists \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ bases de } E \\ \exists F \text{ de dimension } n, \exists \mathcal{C}, \mathcal{C}' \text{ bases de } F \end{array} \right. / \left\{ \begin{array}{l} A = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) \\ A' = \text{mat}_{(\mathcal{B}', \mathcal{C}')} (f) \end{array} \right.$$

PROP 1 : si $A, A' \in M_{np}(K)$

$$A \text{ eq } A' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists P \in GL_{\dots}(K) \\ \exists Q \in GL_{\dots}(K) \end{array} \right. / A' = Q^{-1}AP$$

D25

PROP 2 : comme son nom l'indique, la relation d'équivalence des matrices est une relation d'équivalence dans $M_{np}(K)$.

D26

Deux matrices équivalentes ont forcément le même rang, comme matrices de la même application linéaire ; nous allons voir qu'en fait la réciproque est vraie.

LEMME 1 : pour r entier $\leq \min(n, p)$, notons J_{npr} la matrice I_r complétée à droite et à gauche par des 0 :

$$J_{npr} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r, p-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, p-r} \end{bmatrix}$$

alors toute matrice $A \in M_{np}(K)$ de rang r est équivalente à J_{npr} .

D27

THÉORÈME 1 : deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

D28

REM : il y a donc classes de matrices équivalentes dans $M_{np}(K)$.

LEMME 2 : si deux matrices sont équivalentes leurs transposées le sont également.

D29

Ceci va nous permettre d'établir le théorème extrêmement important suivant :

THÉORÈME 2 : une matrice a même rang que sa transposée :

$$\text{rg}({}^t A) = \text{rg } A$$

D30

COROLLAIRE : le rang des lignes d'une matrice est égal au rang de ses colonnes :

si $A \in M_{np}(K)$, $L_i = [A(i, 1) \quad \dots \quad A(i, p)]$, $C_j = \begin{bmatrix} A(1, j) \\ \vdots \\ A(n, j) \end{bmatrix}$, alors

$\text{rg}(L_1, \dots, L_n) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$

Ceci permet donc d'écrire par exemple :

$$\text{rg}((1, -1, 2, 0), (1, 4, -1, 2)) = \text{rg} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \text{rg}((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$$

REM : ceci permet de simplifier la recherche du rang d'une famille de vecteurs en raisonnant à la fois sur les lignes et les colonnes.

E9 : $\text{rg}((1, 0, 3, 4, 0), (-1, 4, 3, 8, 3), (3, -4, 3, 0, -3), (0, 4, 6, 12, 3))$.