Le problème de Montmort.

Calcul du nombre de permutations de n éléments laissant au moins un élément invariant.

Il s'agit de calculer le nombre r_n de permutations de $\{1, 2, ..., n\} = [n]$ présentant au moins une "rencontre", c'est-à-dire un point fixe, ou encore le nombre $d_n = n! - r_n$ de "dérangements", c'est-à-dire de permutations sans point fixe.
Ce problème a été popularisé par Montmort en 1708 sous la forme du **problème des chapeaux** : n personnes laissent leur chapeau au vestiaire ; lorsqu'elles viennent les chercher, chacune d'entre elles prend un chapeau au hasard ; quelle est la probabilité ($p_n = \frac{d_n}{n!}$) qu'aucune d'entre elles ne porte son chapeau à la sortie ? On raconte aussi parfois une histoire de secrétaires qui mettent des lettres dans des enveloppes sans regarder si c'est le bon destinataire (quelle est la probabilité que tous les plis soient désappariés ?), ou une histoire de candidats qui doivent retrouver les prénoms d'hommes célèbres ou des dates de bataille (quelle est la probabilité que tout soit faux ?) ou encore de cavaliers et de cavalières lors de la danse du balai etc. ; on peut aussi se demander lorsque deux jeux de cartes battus sont mis l'un contre l'autre, quelle est la probabilité qu'aucune carte ne soit au même niveau qu'une carte identique .
Intuitivement, on penserait que p_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini (à moins que d'autres ne pensent qu'elle tende vers 1 !) mais on verra qu'il n'en est rien : p_n tend très vite vers un nombre proche de 1/3, donc somme toute assez grand, et qui plus est transcendant. De plus, la convergence étant très rapide, la valeur de p_n peut être considérée comme quasi constante. Par exemple, dans la danse du balai, pour près d'une danse sur trois, aucun cavalier ne dansera avec sa femme, ceci quel que soit le nombre de danseurs.
On présente en général le calcul de d_n en application de la formule du crible ou formule de Poincaré :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_k\le n}\left|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_k}\right|$$

En prenant pour A_i l'ensemble des permutations σ de [n] telles que σ(i) = i, alors :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = r_n \text{ et } \left|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_k}\right| = (n-k)! \text{ , d'où :}$$

$$r_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k(n-k)! = n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!} \text{ , et } d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Or $\frac{n!}{e} = d_n + \sum_{k\ge n+1}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!}$ donc ***d_n* est l'entier le plus proche de** $\frac{n!}{e}$. De plus, p_n tend de façon alternée et très rapide vers 1/e = 0, 367 879 ... quand $n \to +\infty$.
Ce joli calcul est cependant trop rapide pour permettre de savourer toutes les facettes de ce problème...
On peut aussi remarquer que toute permutation de $[n]$ ayant k points fixes est fabriquée à partir d'un dérangement sur le complémentaire de l'ensemble de ses points fixes ; comme il y a C_n^k façons de choisir l'ensemble des points fixes, on obtient :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k \quad (1)$$

On peut donc écrire le système linéaire en $d_0, \ldots , d_n$:

$d_0 = 0!$
$d_0 + d_1 = 1!$
$d_0 + 2d_1 + d_2 = 2!$
....
$d_0 + nd_1 + ... + C_n^k d_k + ... + nd_{n-1} + d_n = n!$

soit en condensé : $\sum_{k=0}^{p} C_p^k d_k = p!$ pour $p = 0, 1, \dots, n$.

La résolution de ce système est classique ; sa matrice (dont le triangle inférieur est le triangle de Pascal) est à transposition près celle de l'application linéaire de $K_n[X]$ dans $K_n[X]$ définie par : $P(X) \mapsto P(X+1)$, dans la base $(1, X, X^2, .. ,X^n)$; la matrice inverse est donc celle de $P(X) \mapsto P(X-1)$, et l'on obtient bien : $d_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k k! = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k (p-k)! = p! \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Voici encore une autre voie possible ; transformer légèrement la relation (1) en :

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k d_k \quad (1')$$

afin qu'elle devienne une relation de récurrence permettant de calculer les r_k et d_k de proche en proche (ce qui revient en fait à résoudre le système échelonné ci-dessus).

Mais tentons maintenant d'obtenir des relations de récurrence entre un nombre fini de termes d_k ; pour un dérangement σ de $[n]$, examinons l'image $i > 1$ de 1 par σ ; de deux choses l'une :
- soit $\sigma(i) = 1$ et alors on obtient un dérangement quelconque de l'ensemble à n - 2 éléments $\{2, ..., i-1, i+1, ..., n\}$ en prenant la restriction de σ à cet ensemble.
- soit $\sigma(i) \neq 1$ et considérons le nombre $j > 1$ tel que $\sigma(j) = 1$; on obtient alors un dérangement σ' quelconque de l'ensemble à n - 1 éléments $\{2, ..., n\}$ en posant $\sigma'(k) = \sigma(k)$ pour $k \neq i$, et $\sigma'(i) = j$.

Comme i peut prendre n - 1 valeurs, on obtient :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} - d_{n-2}) \quad (2)$$

Cette formule permet de calculer rapidement les premières valeurs de d_n, à partir de $d_0 = 1$ et $d_1 = 0$; Une façon probabiliste d'obtenir cette relation est présentée dans le livre : "les structures du hasard", de J.L. Boursin (p. 142 - 143).

D'autre part, si l'on écrit (2) sous la forme : $d_n - nd_{n-1} = -(d_{n-1} - (n-1)d_{n-2})$, et sachant que $d_1 - d_0 = 1$, on obtient :

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n \quad (3)$$

Cette relation de récurrence qui permet bien sur de retrouver très rapidement l'expression ci-dessus de d_n a été obtenue simplement à partir de (2), mais bien que L. Comtet dise qu'on peut l'obtenir directement par un raisonnement combinatoire, je ne vois pas comment (avis de recherche!).

Ce n'est pas fini ! Voici encore une autre méthode. Soit $d_{n,k}$ le nombre des permutations de n éléments, telles qu'aucun des éléments 1, 2, ... , k ne soit invariant. Sans imposer de condition sur les éléments invariants, on a $d_{n,0} = n!$

Parmi ces $d_{n,k}$ permutations, distinguons deux catégories: celle où l'élément k+1 n'est pas invariant, qui contient évidemment $d_{n,k+1}$ permutations ; celle où l'élément $k + 1$ est invariant, qui en contient $d_{n-1,k}$ car chacune de ces permutations peut être mise en correspondance avec celle où on échange les rôles de k+1 et de n, l'élément invariant k+1 devenant l'élément invariant n.

D'où la relation : $d_{n,k} = d_{n,k+1} + d_{n-1,k}$ et l'équation de récurrence de style Pascal :

$$d_{n,k} = d_{n,k-1} - d_{n-1,k-1} \quad (4)$$

On peut alors construire le triangle des $d_{n,k}$ dont la première colonne est connue :

n k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	0			
2	2	1	1		
3	6	4	3	2	
4	24	18	14	11	9

Les premières étapes $d_{n,1} = d_{n,0} - d_{n-1,0}$; $d_{n,2} = d_{n,1} - d_{n-1,1} = d_{n,0} - 2d_{n-1,0} + d_{n-2,0}$ ...
conduisent à reconnaître les coefficients du binôme et à identifier la formule générale :

$d_{n,k} = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C_k^q d_{n-q,0} = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C_k^q (n-q)!$. Reste à vérifier qu'elle satisfait l'équation de récurrence, pour aboutir de nouveau à : $d_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

L'expression de d_n permet d'obtenir la loi de probabilité du nombre de points fixes d'une permutation de S_n, à propos de laquelle nous pouvons rappeler pour conclure le résultat étonnant suivant : son espérance est égale à 1 (autrement dit, une permutation de n objets possède en moyenne un point fixe, ceci quel que soit n).