

J'écoute : j'oublie ; je lis : je retiens ; je fais : je comprends.  
Proverbe chinois.

## QUESTIONS DE COURS DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGÈBRE (MPSI)

Robert FERREOL  
ferreol@mathcurve.com

### I RAISONNEMENTS

- 1) Montrer que tout entier naturel  $\geq 2$  possède au moins un diviseur premier, puis que l'ensemble des nombres premiers est infini.
- 2) Montrer que si un entier  $p$  est tel que  $p^2$  est pair, alors  $p$  est pair et  $p^2$  est multiple de 4 ; montrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.
- 3) (analyse et synthèse) Montrer que toute application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est de façon unique la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire .
- 4) (analyse et synthèse) Démontrer qu'étant donnés  $n$  points pondérés  $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ , il existe un unique point  $G$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA} = \vec{0}$  ( $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ ) .
- 5) (Pratique de la disjonction des cas) : déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ , suivant les valeurs de  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  .
- 6) (Idem) Résoudre le système d'inconnue  $(x, y)$  et de paramètre  $m$  :  $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m^2 \end{cases}$  .
- 7) Présenter une récurrence double.
- 8) Présenter une récurrence forte.

### II CALCULS ALGÈBRIQUES

- 1) Définir les coefficients  $\binom{n}{k}$  (à partir de la relation de Pascal) et montrer la formule du binôme.
- 2) Connaissant la formule du binôme, montrer  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ,  $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ ,  $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$  .
- 3) Calculer  $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$  .
- 4) Montrer, pour  $1 \leq k \leq n-1$  :  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ , et en déduire le calcul de  $\binom{n}{k}$  .
- 5) A partir de la relation  $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$ , montrer que :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$  .
- 6) Donner une méthode permettant de calculer  $\sum_{k=1}^n k^2$  (sans récurrence).
- 7) Formule de Bernoulli de factorisation de  $a^n - b^n$  ; en déduire que si  $2^n - 1$  ( $n \geq 2$ ) est premier, alors  $n$  est premier.
- 8) Formule de Bernoulli de factorisation de  $a^n + b^n$  pour  $n$  impair ; en déduire que si  $2^n + 1$  ( $n \geq 1$ ) est premier, alors  $n$  est une puissance de 2.
- 9) Compléter  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$  et factoriser  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \times b_j$ .

### III ENSEMBLES

- 1) Définir en compréhension  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{D}$  (comme parties de  $\mathbb{R}$ ), la courbe d'une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Donner la définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles. Donner également des CNS de non inclusion et de non égalité.
  - 2) Déterminer  $\bigcap_{n \geq 1} \left[ -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right]$ ,  $\bigcup_{n \geq 2} \left[ \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$  .
  - 3) Sachant  $(A, B)$  finis disjoints  $\implies |A \cup B| = |A| + |B|$ , déterminer  $|A \cup B|$ , puis  $|A \cup B \cup C|$  .
  - 4) Déterminer  $|\mathcal{P}(E)|$  pour  $|E| = n$  .
  - 5) Déterminer, pour  $|E| = n$ ,  $|E^p|$ ,  $|\mathcal{A}_p(E)|$  et  $|\mathcal{P}_p(E)|$  ( $p$ -listes,  $p$ -listes sans répétition,  $p$ -parties)
  - 6) Donner 5 caractérisations différentes des coefficients binomiaux (sans preuve)
- > Il y a  $\binom{5}{2}$  équivalences donc autant d'exercices possibles à partir de cette question de cours !

7) Montrer que  $\binom{n}{p}$ , nombres de  $p$ -parties d'un ensemble à  $n$  éléments est aussi le nombre de  $n$ -uplets dont  $p$  coordonnées sont égales à  $a$  et les  $n - p$  autres égales à  $b$ .

8) Démontrer par un raisonnement combinatoire que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ , puis que  $\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ .

9) Montrer par un raisonnement combinatoire la relation de Pascal :  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ .

10) Montrer par un raisonnement combinatoire la formule du binôme.

#### IV RELATIONS

1) Dénombrer les relations de  $E$  vers  $F$  (ensembles finis), les relations réflexives, les relations symétriques de  $E$  dans  $E$ .

2) Donner trois exemples de relations transitives et trois exemples de relations non transitives (avec justifications).

3) Montrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel dans  $\mathbb{N}$ .

4) Définir majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, inférieure.

Montrer :  $\begin{cases} m = \sup(A) \\ \text{et } m \in A \end{cases} \Leftrightarrow m = \max(A)$ .

5) Donner des exemples de partie a) non majorée, b) majorée sans borne supérieure, c) avec borne supérieure et sans maximum, d) avec maximum.

#### V APPLICATIONS

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{E}$  vers  $\mathbb{F}$ . Les lettres  $A$  désignent des parties de  $\mathbb{E}$ , les lettres  $B$  désignent des parties de  $\mathbb{F}$ .

1) Montrer :  $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$  et  $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ .

2) Montrer :  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$  ;  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ ;

3) Montrer :  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$  (montrer qu'on ne peut pas dire mieux que l'inclusion) ;  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .

4) Montrer :  $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)} \cap f(\mathbb{E})$  (montrer qu'on ne peut pas dire mieux que l'inclusion) ;  $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

5) Montrer :  $f^{-1}(f(A)) \supset A$  (montrer qu'on ne peut pas dire mieux) ;  $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(\mathbb{E})$ .

6) Montrer :  $g \circ f(A) = g(f(A))$ , où  $g$  est une application de  $\mathbb{F}$  vers un ensemble  $\mathbb{G}$  ;  $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$  où  $C \subset \mathbb{G}$ .

7)  $I =$  injective,  $S =$  surjective. Donner un exemple d'application de  $E$  dans  $E$   $IS, \overline{IS}, I\overline{S}, \overline{I\overline{S}}$  (avec preuves).

8) Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ . Montrer que s'il existe une application  $g$  de  $F$  vers  $E$  telle que  $g \circ f = id_E$  alors  $f$  est injective, et que s'il existe une application  $g$  de  $F$  vers  $E$  telle que  $f \circ g = id_F$  alors  $f$  est surjective. En déduire une CNS de bijectivité de  $f$ .

9) Pour  $E$  fini,  $f$  application de  $E$  vers  $F$ , caractériser l'injectivité puis la surjectivité de  $f$  par une condition portant sur  $|f(E)|$  (sans démonstration).

En déduire pour  $f$  de  $E$  vers  $F$ ,  $E$  et  $F$  finis de même cardinal :

$f$  est injective ssi  $f$  est surjective, ssi  $f$  est bijective.

10) Dénombrer les applications, les fonctions, les applications injectives de  $E$  vers  $F$  (ensembles finis).

11) Étudier la surjectivité et l'injectivité des applications suivantes (dans le cas de bijectivité, on donnera la fonction réciproque) :

$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cap A \end{cases}$  où  $A$  est une partie stricte donnée de  $E$ .

$g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$  où  $A$  et  $B$  sont des parties données disjointes de  $E$  dont la réunion est égale à  $E$ .

12) facultatif : Montrer que  $2\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et  $\mathbb{Q}_+$  (donc  $\mathbb{Q}$ ) sont dénombrables.

13) facultatif : Montrer que les intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  ont la puissance du continu.

#### VI STRUCTURES ALGÈBRIQUES

1) Montrer l'unicité de l'élément neutre, s'il existe ; s'il y a un élément neutre et si l'opération est associative, montrer l'unicité du symétrique d'un élément, s'il existe.

2) Montrer que si  $*$  est associative et possède un élément neutre,  $x$  et  $y$  symétrisables  $\Rightarrow x * y$  symétrisable (être symétrisable signifiant : posséder un symétrique).

En déduire que l'ensemble des éléments symétrisables forme un groupe.

3) Déterminer le groupe des éléments symétrisables de  $(\mathbb{Z}, \times)$ , de  $(\mathbb{R}, \times)$ , de  $(E^E, \circ)$ .

- 4) Montrer que si l'opération est associative, un élément ayant un symétrique est simplifiable, mais que la réciproque est fausse. Donner un exemple de matrice non nulle qui n'est cependant pas simplifiable.
- 5) Donner un exemple de groupe commutatif et un exemple de groupe non commutatif, avec, pour chacun, un exemple de sous-groupe non trivial (en rappelant, bien sur, les définitions).
- 6) Donner un exemple de groupe à  $n$  éléments (avec preuve !).
- 7) Montrer qu'il existe deux groupes à quatre éléments qui ne sont pas isomorphes.
- 8) Montrer que dans un anneau  $A$ ,  
 $a \cdot 0_A = 0_A \cdot a = 0_A$  et que  $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ .
- 9) Montrer que l'anneau  $M_2(\mathbb{R})$  n'est ni commutatif, ni intègre. Donner des exemples où les formules du binôme et de Bernoulli (à l'ordre 2) sont mises en défaut.
- 10) Donner un exemple de sous-corps strict de  $\mathbb{R}$ , un exemple de sous-anneau qui n'est pas un sous-corps, un exemple de sous-groupe qui n'est pas un sous-anneau (avec démonstrations).

## VII ARITHMÉTIQUE

- 1) Énoncer et démontrer le théorème de la division euclidienne dans  $\mathbb{Z}$ .
- 2) Démontrer que tout sous-groupe additif de  $\mathbb{Z}$  est de la forme  $a\mathbb{Z}$ .
- 3) Montrer que pour tout entier  $b \geq 2$  et tout entier  $a \geq 1$ , il existe un unique entier  $n$  et une unique suite finie  $(r_k)_{0 \leq k \leq n}$  d'entiers entre 0 et  $b-1$  ( $r_n \neq 0$ ) telle que  $a = \sum_{k=0}^n r_k b^k$ .
- 4) Montrer que l'entier  $n$  ci-dessus est égal à  $\lceil \log_b(a) \rceil$ .
- 5) Donner le principe de l'algorithme d'exponentiation rapide et le mettre en oeuvre sur un exemple.
- 6) Montrer que les congruences dans  $\mathbb{Z}$  sont compatibles avec l'addition et la multiplication.
- 7) Donner et justifier les méthodes d'obtention en système décimal du reste de la division par 2 et 5, 4 et 25, 3 et 9, et 11 d'un entier à partir de son écriture décimale (on pourra aussi tenter 7 !).
- 8) Énoncer et démontrer le théorème de Bézout.
- 9) Énoncer et démontrer le théorème de Gauss.
- 10) Présenter et justifier l'algorithme d'Euclide.
- 11) Montrer qu'un nombre  $n \geq 2$  est premier si et seulement s'il ne possède pas de diviseur premier compris entre 2 et  $\sqrt{n}$ .
- 12) 11) étant connu, donner la méthode d'Eratosthène :
  - a) Pour déterminer si un naturel donné est premier.
  - b) Pour écrire la liste des nombres premiers inférieurs à un naturel donné.
- 13) Compléter les CNS suivantes, portant sur les exposants de la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels non nuls  $a, b, c, d, m$ , et justifier l'une d'entre elles (notation :  $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p(a)}$ ):
  - a)  $a = b \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} \dots$
  - b)  $a$  divise  $b \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} \dots$
  - c)  $c = ab \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} \alpha_p(c) = \dots$
  - d)  $d = \text{pgcd}(a, b) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} \alpha_p(d) = \dots$
  - e)  $m = \text{ppcm}(a, b) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} \alpha_p(m) = \dots$
  - f)  $a$  est un carré  $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} \dots$
- 14) Connaissant 13), montrer  $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$ .
- 15) Connaissant 13), montrer que la racine carrée de tout naturel qui n'est pas un carré est irrationnelle.

## VIII GÉOMÉTRIE

- 1) Expliquer la méthode du pivot de Gauss, les notions de système échelonné, d'inconnues principales et secondaires, de rang, d'indétermination et de compatibilité, à partir du système :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m^2 \end{cases}$$

- 2) Énoncé et démonstration de l'associativité du calcul barycentrique.
- 3) Définir la représentation cartésienne paramétrique d'une droite du plan et, sur un exemple, en déduire une représentation cartésienne du type :  $ax + by = c$ .
- 4) Définir la représentation cartésienne paramétrique d'un plan de l'espace et, sur un exemple, en déduire une représentation cartésienne du type :  $ax + by + cz = d$ .
- 5) Définir la représentation cartésienne paramétrique d'une droite de l'espace et, sur un exemple, en déduire un système d'équation cartésiennes.

- 6) Donner la définition en cosinus du produit scalaire et en déduire la définition par projection.
- 7) Montrer la bilinéarité du produit scalaire et en déduire son expression dans une base orthonormée.
- 8) Distance d'un point à un plan et distance entre deux plans parallèles.
- 9) Donner la définition en sinus du déterminant dans le plan et en déduire la définition par l'aire.
- 10) Montrer la bilinéarité du déterminant et en déduire son expression dans une base orthonormée directe.
- 11) Donner la définition en sinus du produit vectoriel dans l'espace et l'interprétation géométrique de sa norme.
- 12) Établir l'expression du produit vectoriel dans une base orthonormée directe et donner la formule du double produit vectoriel.
- 13) Distance d'un point à une droite.
- 14) Équations cartésiennes d'un cercle dans le plan, d'une sphère dans l'espace.
- 15) Soit  $F(c, 0)$ ,  $K\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$ ,  $H$  projeté de  $M$  sur la droite  $x = \frac{a^2}{c}$  ; montrer que  $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a} (= e) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$
- 16) Soit  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ,  $H$  projeté de  $M$  sur la droite  $x = -\frac{p}{2}$  ; montrer que  $\frac{MF}{MH} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 2px$ . Tracer la courbe.
- 17) Soit  $M$  un point de l'ellipse de foyers  $F$  et  $F'$  de demi-grand axe  $a$ , définie par foyer et directrice ; montrer que  $MF + MF' = 2a$ .
- 18) Montrer que l'équation de la tangente en un point  $M_0(x_0, y_0)$  de l'ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  est  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ .

## IX NOMBRES COMPLEXES

- 1) Démontrer les propriétés :  $\overline{z + z'} = \dots, \overline{zz'} = \dots, |zz'| = \dots$ , et donner une application de cette dernière formule.
- 2) Montrer que  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .
- 3) Déduire de 2) :  $|z| - |z'| \leq |z + z'|$  puis  $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$ .
- 4) Énoncer les 9 propriétés qui font que  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  est un corps commutatif. Démontrer la dernière (inversibilité).
- 5) Montrer que dans  $\mathbb{C}$ , il ne peut y avoir de relation d'ordre total compatible avec l'addition et la multiplication, prolongeant la relation de  $\mathbb{R}$ .
- 6) Donner une méthode permettant de déterminer sous forme algébrique les deux racines carrées d'un complexe.
- 7) Mettre sous forme canonique  $az^2 + bz + c$  ( $a \neq 0$ ) ; en déduire la factorisation complexe de  $az^2 + bz + c$  et les solutions complexes de  $az^2 + bz + c = 0$ .
- 8) Formules de Moivre et d'Euler ; leur utilité.
- 9) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  il existe un polynôme  $T_n$  tel que  $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos n\theta = T_n(\cos \theta)$  ; écrire  $T_k(x)$  pour  $1 \leq k \leq 4$ .
- 10) Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , il existe un polynôme  $U_{n-1}$  tel que  $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \sin n\theta = \sin \theta \cdot U_{n-1}(\cos \theta)$  ; écrire  $U_k(x)$  pour  $1 \leq k \leq 3$ .
- 11) Factorisation de  $e^{ia} + e^{ib}$  et  $e^{ia} - e^{ib}$  ; interpréter géométriquement.
- 12) Calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta + \varphi)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta + \varphi)$  à l'aide des complexes.
- 13) Montrer :  $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad z = \rho e^{i\theta}$  et résoudre  $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ .
- 14) Montrer que si  $n = pq$ , les racines  $n$ -ièmes de  $Z$  sont les racines  $p$ -ièmes des racines  $q$ -ièmes de  $Z$ , et que si  $z_0$  est une racine  $n$ -ième particulière de  $Z \neq 0$ , on obtient les autres en multipliant  $z_0$  par les racines  $n$ -ièmes de 1.
- 15) Montrer que tout nombre complexe non nul possède exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes.
- 16) Déterminer une valeur approchée d'une racine huitième de  $(-3 + 4i)/5$  à l'aide d'une machine à calculer ; faire une figure avec les huit racines huitièmes.
- 17) Déterminer les racines cubiques de  $2 + 11i$ , avec l'aide d'une machine à calculer.
- 18) Facultatif : la réponse à 17) étant connue, résoudre l'équation de Bombelli  $z^3 = 15z + 4$  à l'aide de la méthode de Cardan.
- 19) Facultatif : résoudre l'équation  $z^3 + 3z - 2 = 0$ .

## X POLYNÔMES

- 1) Montrer que le produit de deux polynômes (formels) est un polynôme et que si les deux polynômes sont non nuls, le produit est non nul.
- 2) Montrer l'associativité de la multiplication des polynômes (formels).
- 3) Énoncer et justifier les propriétés de la valuation et du degré d'une somme, d'un produit de polynômes.
- 3 bis) Montrer qu'une famille de polynômes de degrés ou de valuations distincts est libre.
- 4) On pose  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = X$  et  $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$  pour  $n \geq 1$  ; montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .
- 5) Montrer que  $T_n$  est de degré  $n$  et que son coefficient dominant est, pour  $n \geq 1$ ,  $2^{n-1}$ .

- 6) Montrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur l'ensemble des polynômes unitaires (sur un corps).  
 7) Montrer l'unicité du couple (quotient, reste) de la division euclidienne dans  $K[X]$ .  
 8) Détermination des racines d'un polynôme du deuxième degré dans  $K[X]$ .  
 9) Montrer que  $x_0$  est racine de  $P \Leftrightarrow (X - x_0) \mid P$ . En déduire qu'un polynôme non nul a un nombre  $q$  de racines distinctes inférieur ou égal à son degré.

10) Montrer que si deux polynômes sont égaux en une infinité de points de  $K$ , ils sont égaux, et donc égaux en tout point de  $K$ . Montrer par exemple que si  $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P(\cos \theta) = \cos n\theta$ , alors  $P$  est égal au  $n$ -ième polynôme de Tchebychev  $T_n$ .

11) Montrer que l'application qui à tout polynôme de  $K[X]$  fait correspondre la fonction polynomiale de  $I \subset K$  dans  $K$  associée est une bijection de  $K[X]$  sur  $\mathcal{P}(I, K)$  si  $I$  est infini.

12) Définir la notion de racine multiple et montrer que tout polynôme  $P$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$\left( \prod_{i=1}^q (X - x_i)^{\alpha_i} \right) Q \quad (Q \text{ sans racine dans } K, \text{ les } x_i \text{ distincts}), \text{ et que}$$

$$q \leq r = \sum_{i=1}^q \alpha_i \leq n = \deg(P).$$

Donner un exemple avec  $q = 2, r = 3, n = 7$ .

13) Formule de Taylor (en 0 et en  $x_0$ ) pour les polynômes.

14) Montrer que  $x_0$  est racine d'ordre  $k$  de  $P \Rightarrow \forall i \in [0, k-1] \quad P^{(i)}(x_0) = 0$ , et  $P^{(k)}(x_0) \neq 0$ .

15) Réciproque de 14).

18) Montrer qu'un polynôme irréductible de degré supérieur ou égal à 2 n'a pas de racine, que la réciproque est fautive, mais qu'elle est vraie si on se limite aux polynômes de degré 2 ou 3.

19) Définir le conjugué de  $P \in \mathbb{C}[X]$ ; montrer  $\overline{P(z)} = \overline{P(\bar{z})}$  et que

$z_0$  est racine d'ordre  $k$  de  $P \Leftrightarrow \bar{z}_0$  est racine d'ordre  $k$  de  $\bar{P}$ ;

conséquence quand  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

20) Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss; en déduire que tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé et la détermination des polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$ .

21) Écrire la forme générale de la décomposition de  $P \in \mathbb{R}[X]$  en produit de facteurs irréductibles, et la déterminer pour  $P = X^n - 1, n = 2p$ .

22) Idem, mais  $n = 2p + 1$ .

23) Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

24) Si  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les trois fonctions symétriques élémentaires de  $a, b, c$ , calculer  $a^3 + b^3 + c^3$  en fonction de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , à l'aide du polynôme  $X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$ .

(facultatif : calculer aussi  $a^4 + b^4 + c^4$ )

25) Énoncer et justifier les propriétés du degré d'une somme, d'un produit de fractions rationnelles. En déduire que la somme de deux fractions rationnelles de degré  $< 0$  est une fraction rationnelle de degré  $< 0$ .

26) Montrer que toute fraction rationnelle s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme (sa "partie entière") et d'une fraction rationnelle de degré  $< 0$  (25) est supposé connu). En déduire que la partie entière d'une somme de fractions rationnelles est la somme des parties entières.

27) Montrer que la fraction rationnelle  $\frac{A}{XQ}$  ( $Q(0) \neq 0$ ) peut s'écrire sous la forme  $\frac{a}{X} + \frac{A_1}{Q}$ .

28) Montrer que la fraction rationnelle  $\frac{A}{(X - x_0)^p Q}$  ( $Q(x_0) \neq 0$ ) peut s'écrire sous la forme  $\sum_{k=1}^p \frac{a_k}{(X - x_0)^k} + \frac{A_1}{Q}$  ;  $\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{(X - x_0)^i}$  = partie polaire relative à  $x_0$ ; l'unicité de l'écriture est admise.

29) Connaissant 28), montrer que toute fraction rationnelle  $F$  est la somme de ses parties polaires et d'une fraction sans pôle  $G$  qui, lorsque le dénominateur de  $F$  est scindé, est la partie entière de  $F$ .

30) Montrer que dans l'écriture :  $\frac{A}{B} = \frac{A}{(X - x_0)^k Q} = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{(X - x_0)^i} + \frac{A_1}{Q}$  ( $Q(x_0) \neq 0$ ),

$$a_k = \frac{A(x_0)}{Q(x_0)} = k! \frac{A(x_0)}{B^{(k)}(x_0)}.$$

31) Connaissant 30) décomposer  $\frac{1}{X^n - 1}$  en éléments simples dans  $\mathbb{C}$ .

## XI ALGÈBRE LINÉAIRE

2) Montrer que dans un  $K$ -espace vectoriel  $E, \forall \vec{x} \in E \forall \lambda \in K \quad \lambda \vec{x} = \vec{0}_E \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0_K \\ \text{ou } \vec{x} = \vec{0}_E \end{cases}$ .

- 3) Montrer que dans  $E$ ,  $\lambda(-\vec{x}) = (-\lambda)\vec{x} = -(\lambda\vec{x})$ , en déduire  $\lambda(\vec{x} - \vec{y}) = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{y}$  et  $(\lambda - \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} - \mu\vec{x}$ .
- 4) Montrer que  $K^I = \{(x_i)_{i \in I} / \forall i \in I \ x_i \in K\}$  muni d'opérations que l'on définira est un  $K$ -espace vectoriel.
- 5) Montrer que  $K^I = \left\{ f : \begin{array}{l} I \rightarrow K \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right\}$  muni d'opérations que l'on définira est un  $K$ -espace vectoriel (par rapport au 4), seules les notations changent).
- 6) Montrer que si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux  $K$ -espaces vectoriels,  $E_1 \times E_2$ , muni d'opérations que l'on définira, est un  $K$ -espace vectoriel.
- 7) Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels du  $K$ -espace vectoriel  $K$  sont  $\{0\}$  et  $K$ .
- 8) Donner une représentation paramétrique du sous-ensemble de  $K^4$  défini par  $\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases}$  et montrer que c'en est un sous-espace vectoriel.
- 9) Donner trois exemples de sous-ensembles non triviaux de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  qui en sont des sous-espaces vectoriels et deux exemples qui n'en sont pas.
- 10) Donner trois exemples de sous-ensembles non triviaux de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  qui en sont des sous-espaces vectoriels et deux exemples qui n'en sont pas.
- 10 bis) Donner un exemple de sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  qui n'en est pas un sous-anneau.
- 11) Montrer que la droite engendrée par  $\vec{x}_1 \neq \vec{0} \in E$ ,  $\{\lambda\vec{x}_1 / \lambda \in K\}$ , notée  $K\vec{x}_1$  ou  $\text{vect}(\vec{x}_1)$ , est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- 12) Montrer que l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, et que la somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels également. En déduire que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs est un sous-espace vectoriel (noté  $\text{vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ ).
- 13) Montrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à  $p$  inconnues dans  $K$  est un sous-espace vectoriel de  $K^p$ .
- 14) Donner deux CNS pour qu'une famille finie soit liée (et montrer leur équivalence) et les CNS correspondantes pour les familles libres.
- 15) Montrer de trois façons différentes que la famille  $(f_0, f_1, f_2)$  où  $f_k(x) = e^{kx}$ , est libre.
- 16) Donner une équation cartésienne du sous-ensemble de  $K^3$  défini paramétriquement par  $\begin{cases} \exists \lambda, \mu \in K \\ x = \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$  et montrer que c'en est un sous-espace vectoriel.
- 17) Donner la définition d'une base (finie) et démontrer l'équivalence avec l'existence et l'unicité de la décomposition d'un vecteur quelconque.
- 18) Donner des bases de  $K^n$ ,  $M_{np}(K)$ ,  $\mathcal{P}_n$ , ensembles des polynômes de degré  $\leq n$  (avec preuves).
- 19) Montrer qu'une base est une famille génératrice minimale.
- 20) Réciproque de 19).
- 21) Montrer qu'une base est une famille libre maximale.
- 22) Réciproque de 21).
- 23) Lemme glouton (ou "d'échange"): montrer que si  $\mathcal{L}$  est une famille libre et  $\mathcal{G}$  une famille génératrice, pour tout vecteur  $\vec{x}$  de  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{G}$ , il existe un vecteur  $\vec{y}$  de  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{L}$  tel que si l'on remplace  $\vec{y}$  par  $\vec{x}$  dans  $\mathcal{G}$ , la famille  $\mathcal{G}_1$  obtenue est encore génératrice.
- 23 bis) En déduire que le nombre d'éléments d'une famille libre est toujours inférieur ou égal au nombre d'éléments d'une famille génératrice et que deux bases ont toujours le même nombre d'éléments.
- 24) Montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie (i.e. possède une base finie), ssi le nombre d'éléments de ses familles libres est majoré et que dans un espace de dimension finie toute famille libre peut être complétée en une base.
- 25) Montrer que  $K[X]$  et  $K^{\mathbb{N}}$  sont de dimension infinie.
- 26) Montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie (i.e. possède une base finie), ssi il possède au moins une famille génératrice finie et que dans un espace de dimension finie, de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
- 27) Montrer, en utilisant 23 bis), que dans un espace vectoriel ayant une base à  $n$  éléments, les familles libres (resp. génératrices) ont au plus (resp. au moins)  $n$  éléments, et que si une famille possédant  $n$  éléments est libre (resp. génératrice) alors c'est une base.
- 28) Montrer qu'un sous espace vectoriel d'un espace  $E$  de dimension  $n$  est de dimension finie inférieure ou égale à  $n$ , et que si sa dimension est égale à  $n$ , il est égal à  $E$ .
- 29) Donner la définition du rang  $r$  d'une famille de  $p$  vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $n$  et montrer que  $r \leq \min(n, p)$ .
- 30) Suite de 29) : caractériser les cas  $r = p$  et  $r = n$ .
- 31) Donner la définition d'une famille finie échelonnée dans une base, et montrer qu'une famille échelonnée est libre.

- 32) Indiquer (et montrer la validité) des opérations élémentaires permettant de transformer une famille finie quelconque en une famille échelonnée de même rang.
- 33) Déterminer la dimension de  $E \times F$  en fonction de celles de  $E$  et  $F$ .
- 34) Montrer que  $E = F \oplus G \Leftrightarrow \forall z \in E \exists! (\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G \quad z = \vec{x} + \vec{y}$ .
- 35) Montrer que la "réunion" d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel  $F$  et d'une famille génératrice d'un sous-espace  $G$  donne une famille génératrice de  $F + G$  et que si la somme de  $F$  et  $G$  est directe, la "réunion" d'une famille libre de  $F$  et d'une famille libre de  $G$  donne une famille libre de  $F + G$ .
- 36) Dédire de 5) que la "réunion" d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$  donne une base de  $F + G$  ssi la somme de  $F$  et  $G$  est directe et que donc  $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$ .
- 37) Montrer que tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.
- 38) Montrer la relation de GRASSMANN.
- 39) En déduire que l'intersection de deux plans vectoriels distincts en dimension 3 est une droite vectorielle.
- 40) Montrer qu'en dimension finie,  $E = F \oplus G$  ssi 2 parmi les trois propriétés suivantes sont réalisées :
1.  $E = F + G$ ;
  2.  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ ;
  3.  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .
- 41) Donner 6 exemples d'applications linéaires dont trois en analyse.
- 42) Montrer qu'en dimension 1 les seules applications linéaires sont les homothéties.
- 43) Donner la définition d'une projection et montrer que c'est une application linéaire.
- 44) Montrer que  $L(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $F^E$ .
- 45) Donner la définition des affinités vectorielles et montrer qu'elles recouvrent les projections, les symétries et les homothéties.
- 46) Montrer que  $(L(E), +, \circ)$  est un anneau (unitaire).
- 47) Montrer que si  $\dim(E) \geq 2$ ,  $L(E)$  n'est ni commutatif ni intègre.
- 48) Montrer que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ, et qu'il est réduit à  $\{\vec{0}\}$  ssi l'application est injective.
- 49) Interpréter les ensembles suivants comme noyaux d'applications linéaires :
- l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de  $n$  équations à  $p$  inconnues.
  - $K_n[X]$ .
  - $E_{a,b} = \{(u_n) \in K^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ .
- 50) Montrer qu'une application linéaire est injective ssi l'image d'une base de l'espace de départ est une famille libre de l'espace d'arrivée.
- 51) Montrer qu'une application linéaire est surjective ssi l'image d'une base de l'espace de départ est une famille génératrice de l'espace d'arrivée. Que conclure de 50) et 51) ?
- 52) Montrer que la réciproque d'un isomorphisme d'espaces vectoriels est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- 53) Montrer que deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.
- 54) Montrer le théorème de la restriction ( $f_1 : \begin{cases} G \rightarrow \text{Im}(f) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$  est bijective). En déduire que tout supplémentaire du noyau d'une application linéaire est isomorphe à l'image de cette application.
- 56) Énoncer et démontrer le théorème du rang (connaissant le théorème de la restriction 54)). En déduire que l'image par une application linéaire d'un sous-espace de l'espace de départ, a une dimension inférieure ou égale à celle de ce sous-espace.
- 57) Connaissant le théorème du rang, montrer :  $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$ , et caractériser les cas d'égalité :  $\text{rg}(f) = \dim(E)$  et  $\text{rg}(f) = \dim(F)$ .
- 58) Montrer qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie est injective ssi elle est surjective. Donner un exemple montrant que ceci est faux en dimension infinie.
- 59) En application de 58), montrer qu'étant donnés  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(y_i)_{1 \leq i \leq n} \in K^n$ , les  $x_i$  étant distincts, il existe un unique polynôme  $P$  de degré  $< n$  vérifiant  $P(x_i) = y_i \quad \forall i \in [1, n]$ .
- 60) Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$ , et  $\mathcal{F} = (\vec{y}_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille d'éléments de  $F$ . Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $f$  de  $E$  vers  $F$  vérifiant  $f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i \quad \forall i \in [1, n]$ .
- 61) Montrer que si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des bases respectives de  $E$  et  $F$ , l'application de  $L(E, F)$  vers  $M_{p,n}(K) : f \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels (60) est connu).
- 62) si  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des bases respectives de  $E, F$ , et  $G$ , de dimensions  $n, p, q$ ,  $f \in L(E, F)$ ,  $g \in L(F, G)$ ,  $A = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)$ ,  $B = \text{mat}_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(g)$ ,  $C = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{D})}(g \circ f)$  ( $C = BA$  par définition), montrer que  $C(i, j) = \sum_{k=1}^p B(i, k) A(k, j)$ .
- 63) Montrer l'associativité du produit des matrices sans utiliser celle de la composition des applications linéaires.
- 64) Idem pour la distributivité.
- 65) Montrer :  $\vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow Y = AX$  en explicitant les notations.

66) Montrer que si  $A \in M_{n,p}(K)$ , l'application linéaire  $f_A: \begin{cases} M_{p,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X \rightarrow AX \end{cases}$  est l'application linéaire qui a pour matrice  $A$  dans les bases canoniques, montrer que  $f_{AB} = f_A \circ f_B$  et en déduire que si  $A, B \in M_{n,p}(K)$  :

$(\forall X \in M_{p,1}(K) AX = BX) \Rightarrow A = B.$

67) Montrer que si  $A = [C_1, C_2, \dots, C_p] \in M_{n,p}(K)$ ,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \ker(f_A) \Leftrightarrow x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_p C_p = 0.$$

68) Montrer que  $A \in M_n(K)$  est inversible si et seulement si le système  $AX = Y$ , d'inconnue  $X \in M_{n,1}(K)$  et de paramètre  $Y \in M_{n,1}(K)$  possède une solution unique, quel que soit  $Y$ . Comment obtient-on alors l'inverse de  $A$  ?

69) Déterminer à quelle CNS  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  est inversible et déterminer son inverse.

70) Montrer que  ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$ ; en déduire que si  $A \in GL_n(K)$ ,  ${}^t A \in GL_n(K)$  et  $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

71) Montrer que  $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$  et déterminer leurs dimensions.

72) Définir la matrice de passage  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , l'interpréter comme une matrice de  $id_E$ ; en déduire qu'elle est inversible, que :  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$ , et que  $P^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ .

73) Montrer la relation  $X = PX'$  en explicitant les notations.

74) Montrer la relation  $A' = Q^{-1}AP$  où :

$$A = \text{mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f), A' = \text{mat}_{(\mathcal{B}', \mathcal{C}')} (f), P = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'), Q = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}').$$

75) Montrer, pour  $A$  et  $B \in M_n(K)$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ; en déduire que deux matrices d'un même endomorphisme ont même trace.

76) Montrer que la relation d'équivalence des matrices de  $M_{np}(K)$  est bien une relation d'équivalence.

77) Montrer que toute application linéaire de rang  $r$  entre espaces de dimensions finie possède une matrice du type :

$$J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

78) En déduire que deux matrices de même format qui ont le même rang sont équivalentes.

79) En déduire que toute matrice a même rang que sa transposée.

80) Montrer qu'un endomorphisme tel que l'image de tout vecteur est colinéaire à ce vecteur est une homothétie vectorielle.

81) En déduire qu'un endomorphisme qui commute avec tout endomorphisme est une homothétie (utiliser une projection de base  $\text{Vect}(\vec{x})$ ). Traduction matricielle de cette propriété ?

82) Montrer que  $p \in L(E)$  est une projection ssi  $p^2 = p$ ; donner une double expression de la base et de la direction de  $p$ .

83) Montrer que  $s \in L(E)$  est une symétrie ssi  $s^2 = id_E$ ; donner une double expression de la base et de la direction de  $s$ .

84) Montrer que toute forme linéaire non nulle sur  $E$  est surjective et que son noyau est un hyperplan de  $E$ ; donner l'expression générale d'une forme linéaire dans une base en dimension finie.

85) Définir la matrice et le rang d'un système linéaire, et montrer que l'ensemble des solutions, s'il n'est pas vide, est un translaté du noyau de la matrice, de dimension : (nbre d'inconnues) - rang.

86) Soit  $f, g \in L(E)$ ; montrer que  $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$ ; en déduire qu'en dimension finie,  $g \circ f$  bijective  $\Rightarrow f$  et  $g$  bijectives. Traduction matricielle ?

87) Montrer que si trois vecteurs  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  d'un espace vectoriel de dimension 3 ont pour coordonnées  $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)$  dans une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , pour toute forme trilinéaire antisymétrique  $f$  sur  $E$  :

$$f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = kf(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \text{ avec}$$

$$k = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3. \stackrel{\text{def}}{=} \det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

88) 87) étant connu ainsi que la trilinearité et l'antisymétrie de  $\det_{\mathcal{B}}$ , montrer que  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est libre ssi  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \neq 0$ .

89) Montrer que  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$  ne dépend que de l'endomorphisme  $f$ .

90) (cas général de 89); montrer que si  $n$  vecteurs  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$  ont pour coordonnées dans une base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  une matrice  $A$ , alors pour toute forme  $n$ -linéaire alternée  $f$  sur  $E$  on a  $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = kf(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_n)$  avec

$$k = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{signature}(\sigma) A(\sigma(1), 1) \dots A(\sigma(n), n)$$

91) 90) étant connu, ainsi que la linéarité et l'antisymétrie de  $\det_{\mathcal{B}}$ , montrer  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  est libre ssi  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \neq 0$ .

92) Montrer que  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$ .

93) montrer que  $\det f \circ g = \det f \det g = \det g \circ f$  et en déduire, pour  $f$  inversible  $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$ .

94) Démontrer que  $\det_{\mathcal{B}} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \det f \times \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ .

95) Montrer que  $\det(A)$  reste inchangé si on ajoute à une ligne (resp. colonne) de  $A$  une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).

96) Énoncer et démontrer les formules de Cramer, pour un système d'ordre 3.

97) Définir la relation "avoir la même orientation que" parmi les bases d'un espace vectoriel réel de dimension  $n = 2$  ou 3 et montrer que c'est une relation d'équivalence ayant exactement deux classes d'équivalence.

98) Montrer qu'un automorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie (théoriquement : 3...) est direct (resp. indirect) ss'il transforme une base donnée en une base de même orientation (resp. d'orientation contraire), ss'il conserve (resp. inverse) l'orientation de toutes les bases.

99) Etudier le caractère direct ou indirect des homothéties, des symétries.

## XII ESPACES EUCLIDIENS

1) Donner la définition du produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n (\approx M_{n,1}(\mathbb{R}))$  et

$M_{n,p}(\mathbb{R})$ , montrer que c'est bien un produit scalaire et montrer que dans  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ , il peut s'écrire  $(A | B) = \text{tr}({}^t AB)$ .

2) Donner la définition du produit scalaire usuels dans  $C([a, b], \mathbb{R})$  ( $a < b$ ) ; montrer que c'est bien un produit scalaire, ainsi que l'application :  $(P | Q) = \int_a^b P(x)Q(x)dx$ , dans  $\mathbb{R}[X]$ .

3) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que le cas d'égalité dans l'inégalité.

4) Définir la norme associée à un produit scalaire et montrer que c'est une norme.

5) Exprimer de 2 façons différentes le produit scalaire à partir de la norme ; montrer la relation d'Al Kashi.

6) Calculer  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$  et en déduire l'égalité du parallélogramme, ainsi que la formule de la médiane.

7) Définir l'orthogonal d'un vecteur, d'une partie ( $X^\perp = \{\vec{y} \in E / \forall \vec{x} \in X \quad \vec{y} \perp \vec{x}\} = \bigcap_{\vec{x} \in X} \vec{x}^\perp$ ), montrer que ce sont des

sous-espaces vectoriels de  $E$ .

8) Définir l'orthogonalité (forte) de deux parties de  $E$  :

$(X \perp Y \Leftrightarrow (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in X \times Y \quad \vec{x} \perp \vec{y}) \Leftrightarrow X \subset Y^\perp \Leftrightarrow Y \subset X^\perp)$  et montrer que :

$$\text{Vect}((x_i)) \perp Y \Leftrightarrow \forall i, \forall \vec{y} \in Y \quad \vec{x}_i \perp \vec{y}$$

9) Montrer qu'une somme de sous-espaces deux à deux orthogonaux est toujours directe.

10) Montrer qu'une famille orthogonale (en incluant dans la définition la non nullité des vecteurs) est toujours libre.

11) Procédé de Schmidt : montrer que si  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base d'un espace euclidien  $E$ , il existe une base orthogonale  $\mathcal{C} = (\vec{f}_i)_{1 \leq i \leq n}$  telle que  $\forall k \in [1, n] \quad \text{Vect}(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq p} = \text{Vect}(\vec{f}_i)_{1 \leq i \leq p}$ .

12) Facultatif : Montrer que si  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base d'un espace euclidien  $E$ , il existe une unique base orthonormée  $\mathcal{D} = (g_i)_{1 \leq i \leq n}$  telle que  $\forall k \in [1, n] \quad \text{Vect}(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq k} = \text{Vect}(\vec{f}_i)_{1 \leq i \leq k}$  et  $(\vec{e}_k | \vec{f}_k) > 0$ .

13) Déduire de 11) le théorème de la base orthonormée incomplète.

14) Déduire de 12) le fait que dans un espace euclidien, l'orthogonal d'un sous-espace est un supplémentaire de ce sous-espace.

15) Montrer que si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux d'un espace euclidiens alors  $G = F^\perp$  et  $F = G^\perp$  (donc  $(F^\perp)^\perp = F$ ).

16) Donner la définition d'une projection orthogonale et démontrer la caractérisation :

$$p \in L(E), p^2 = p, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad (\vec{x} | p(\vec{y})) = (p(\vec{x}) | \vec{y}).$$

17) Donner l'expression d'une projection orthogonale, connaissant une base orthonormée de son image.

Donner par exemple l'expression de la projection orthogonale de base une droite  $D = \text{Vect}(\vec{n})$  et en déduire l'expression de la projection orthogonale de base  $\vec{n}^\perp$ .

19) Donner la définition d'une symétrie orthogonale et démontrer la caractérisation :

$$s \in L(E), s^2 = id_E, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad (\vec{x} | s(\vec{y})) = (s(\vec{x}) | \vec{y}).$$

20) Donner la définition d'une symétrie orthogonale et démontrer la caractérisation :

$$s \in L(E), s^2 = id_E, \forall \vec{x} \in E \quad \|s(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|.$$

21) Montrer qu'étant donnés deux vecteurs distincts et de même norme d'un espace euclidien, il existe une unique réflexion échangeant ces deux vecteurs.

22) Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien et montrer que c'est un automorphisme.

23) Montrer qu'un automorphisme orthogonal conserve le produit scalaire.

24) Facultatif : montrer qu'une application conservant le produit scalaire est linéaire.

25) Montrer que  $O(E)$  est un sous-groupe de  $GL(E)$ .

26) Montrer qu'un endomorphisme de matrice  $A$  dans une base orthonormée est orthogonal ssi  $A$  est inversible d'inverse  ${}^t A$ .

27) Donner et démontrer l'interprétation sur les lignes et les colonnes de la matrice  $A$  des relations  ${}^t AA = I_n$  et  $A{}^t A = I_n$ .

30) Montrer que les automorphismes orthogonaux ont un déterminant égal à  $\pm 1$ , définir  $SO(E) = O^+(E)$  et montrer que c'est un ss-groupe de  $O(E)$ .

31) Montrer que  $SO_2(\mathbb{R}) = O_2^+(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

32) En déduire que  $SO(P)$  ( $P$  plan euclidien) est commutatif. En déduire qu'une rotation de  $P$  (i. e. élément de  $SO(P)$ ) a même matrice dans toute base orthonormée directe de  $P$ ; définir (la mesure de) son angle, si l'on oriente  $P$ .

33) Montrer qu'étant donnés deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  normés d'un plan euclidien, il existe une unique rotation envoyant  $\vec{u}$  sur  $\vec{v}$ .

34) Définir la mesure (modulo  $2\pi$ ) de l'angle orienté de deux vecteurs, la mesure (modulo  $\pi$ ) de l'angle de deux droites du plan euclidien orienté.

35) Montrer que le déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs (sous-entendu : dans une base orthonormée directe) d'un espace orienté de dimension  $n$  ne dépend pas de la base orthonormée directe. Montrer en dimension 2 :  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$  où  $\theta$  est une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

36) Montrer que  $O_2^-(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices  $S_{2\varphi} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$ ; définir géométriquement l'application  $s_\varphi$  de matrice  $S_{2\varphi}$  dans une base orthonormée directe.

37) Montrer que toute rotation du plan orienté, d'angle  $\theta$ , est la composée de deux réflexions dont les axes forment un angle de  $\theta/2$ , l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement.

38) Montrer que l'angle  $\theta$  d'une rotation  $r$  du plan orienté est défini par :

$$\begin{cases} \cos \theta = (\vec{u} | r(\vec{u})) \\ \sin \theta = \det(\vec{u}, r(\vec{u})) \end{cases} \quad \text{où } \vec{u} \text{ est un vecteur unitaire.}$$

39) Montrer que pour toute forme linéaire  $\varphi$  sur un espace euclidien  $E$ , il existe un unique vecteur  $\vec{n}$  tel que  $\forall \vec{x} \in E \quad \varphi(\vec{x}) = (\vec{n} | \vec{x})$ . Qu'en déduit-on pour l'application :  $\begin{matrix} E \rightarrow L(E, \mathbb{R}) \\ \vec{n} \mapsto (\vec{n} | \cdot) \end{matrix} ?$

46) Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien stable par un automorphisme orthogonal  $f$ , alors  $f|_F \in O(F)$ ,  $f(F) = F$ ,  $f(F^\perp) = F^\perp$ , et  $f|_{F^\perp} \in O(F^\perp)$ .

47) Montrer que  $f \in O(E)$ ,  $Inv(f) = \ker(f - id_E)$  et  $Inv^-(f) = \ker(f + id_E)$  sont stables par  $f$  et orthogonaux.

48) facultatif : montrer que si  $F = (Inv(f) \oplus Inv^-(f))^\perp$ , la dimension de  $F$  est paire.

49) Déterminer les éléments de  $O(E_3)$  dont l'ensemble des vecteurs invariants est de dimension 3 ou 2.

50) Caractériser les éléments de  $O(E_3)$  dont l'ensemble des vecteurs invariants est de dimension 1.

51) Déterminer la forme générale des éléments  $f$  de  $O(E_3)$  n'ayant pas d'autre vecteur invariant que  $\vec{0}$ , en raisonnant sur la dimension de  $Inv^-(f)$ .

52) Enoncer la classification des isométries vectorielles en dimension trois (en précisant le caractère direct ou indirect).

53) Définir les éléments caractéristiques d'une rotation propre de  $E_3$ . Indiquer comment obtenir le cosinus de son angle à partir d'une matrice quelconque.

54) Montrer que si  $f$  est une rotation de  $E_3$  d'axe orienté par  $\vec{n}$  et d'angle  $\theta$ , et  $\vec{u}$  un vecteur n'appartenant pas à l'axe, le signe de  $\sin \theta$  est le même que celui de  $\det(\vec{u}, r(\vec{u}), \vec{n})$ .

55) Montrer que si  $r$  est une rotation de  $E_3$  d'axe orienté par  $\vec{n}$  (unitaire), et  $\vec{u}$  un vecteur unitaire orthogonal à l'axe, son angle  $\theta$  est défini par :  $\begin{cases} \cos \theta = (r(\vec{u}) | \vec{u}) \\ \sin \theta = \det(\vec{u}, r(\vec{u}), \vec{n}) \end{cases}$ .

56) Montrer que si  $f$  est une rotation d'angle  $\theta$  de  $E_3$  d'axe orienté par  $\vec{n}$  (unitaire), et  $\vec{u}$  un vecteur orthogonal à l'axe, alors  $f(\vec{u}) = \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{n} \wedge \vec{u}$ .

57) Montrer que toute rotation de  $E_3$  est la composée de deux réflexions dont les plans passent par l'axe de la rotation, et la composée de deux retournements dont les axes sont orthogonaux à l'axe de la rotation.

### XIII COURBES PLANES

1) Montrer que si  $f$  et  $\vec{g} : \mathbb{R} \mapsto \vec{E}$  (espace vectoriel euclidien) sont dérivables,

$$(\vec{f} \vec{g})' = \vec{f}' \vec{g} + \vec{f} \vec{g}' ; \text{ en d\u00e9duire } \|\vec{f}'\| = \frac{\vec{f}'}{\|\vec{f}\|} \cdot \vec{f}' .$$

2) R\u00e9duire l'intervalle d'\u00e9tude et \u00e9tudier la courbe param\u00e9tr\u00e9e :  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

3) D\u00e9finir la notion de point r\u00e9gulier, de point singulier (ou stationnaire), de point bir\u00e9gulier, et les vecteurs fondamentaux  $\vec{f}^{(p)}(t_0), \vec{f}^{(q)}(t_0)$  d'une courbe param\u00e9tr\u00e9e (suffisamment d\u00e9rivable) en un point ; donner l'allure de la courbe au voisinage du point, suivant la parit\u00e9 de  $p$  et  $q$ .

4) D\u00e9terminer la nature de la branche infinie de la courbe param\u00e9tr\u00e9e :  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  quand  $t$  tend vers  $t_0$  (fini) si l'on a :

$$\begin{cases} x(t_0 + u) = \frac{a}{u} + b + cu + o(u) \\ y(t_0 + u) = \frac{a'}{u} + b' + c'u + o(u) \end{cases} , \text{ en indiquant les d\u00e9finitions correspondantes.}$$

5) D\u00e9finir les notions d'\u00e9quation cart\u00e9sienne et d'\u00e9quation polaire d'un sous-ensemble du plan et expliquer comment on passe de l'une \u00e0 l'autre. Montrer que si  $\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = f(t) \cos(at) \\ y = f(t) \sin(at) \end{cases}$  est une \u00e9quation cart\u00e9sienne (param\u00e9trique) d'une courbe (C), une \u00e9quation polaire de (C) est :  $\rho = f\left(\frac{\theta}{a}\right)$ .

6) R\u00e9duire l'intervalle d'\u00e9tude des courbes d'\u00e9quation polaire :  $\rho = a \cos(\omega\theta)$  et  $\rho = a \tan(\omega\theta)$ .

7) D\u00e9finir la base polaire  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ , et d\u00e9terminer, pour une courbe  $\rho = f(\theta)$ , les coordonn\u00e9es du vecteur  $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$  dans cette base. Que se passe-t-il quand la courbe passe par  $O$  ?

8) Que se passe-t-il pour la courbe  $\rho = f(\theta)$ , si  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) = +(\text{ou}-)\infty$  ? Que se passe-t-il si alors  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = l \in \mathbb{R}$  ?

9) \u00c9tudier et tracer dans une m\u00eame figure les deux courbes d'\u00e9quations polaires :  $\rho = \cos 2\theta$  et  $\rho = \frac{1}{\cos 2\theta}$ .

10) Dans l'exemple de la cyclo\u00efde  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ , montrer  $\frac{ds}{dt} = 2a \sin \frac{t}{2}$  et  $\varphi = \frac{\pi - t}{2}$  ; d\u00e9terminer la longueur d'une arche.

11) Dans l'exemple de la cardio\u00efde  $\rho = a(1 + \cos \theta) \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$ , montrer  $\frac{ds}{d\theta} = 2a \cos \frac{\theta}{2}$  et  $\varphi = \frac{3\theta - \pi}{2}$  ; d\u00e9terminer sa longueur.

12) Facultatif : en d\u00e9veloppant  $\det \left( \frac{d\vec{M}}{ds}, \frac{d^2\vec{M}}{ds^2} \right)$ , montrer que  $\frac{ds}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\|\vec{OM}'\|^3}{\det(\vec{OM}', \vec{OM}'')} (= R_c)$