J'écoute : j'oublie ; je lis : je retiens ; je fais : je comprends.

Proverbe chinois.

QUESTIONS DE COURS DU PREMIER SEMESTRE (MPSI 2)

ALGÈBRE

A1. I) LOGIQUE.

1) Réciproque, contraposée et négation d'une implication.

2) Montrer que si un entier n est tel que n^2 est pair, alors n est pair et n^2 est multiple de 4 ; montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3) Montrer que tout entier naturel $\geqslant 2$ possède au moins un diviseur premier, puis que l'ensemble des nombres premiers est infini.

4) (disjonction des cas) Résoudre le système d'inconnue (x,y) et de paramètre m :

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m^2 \end{cases}.$$

5) (analyse et synthèse) Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de façon unique la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire .

A1. II) SOMMES, PRODUITS, RÉCURRENCES, BINÔME.

6) Décomposer de 2 façons en une succession de 2 sommes : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$, $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$.

Développer : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\right)$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2$.

7) Présenter un exemple de démonstration par récurrence double.

8) Présenter un exemple de démonstration par récurrence forte.

9) Définir les coefficients $\binom{n}{k}$ (à partir de la relation de Pascal) et montrer la formule du binôme.

10) Connaissant la formule du binôme, montrer $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$,

$\sum\limits_{k\ pair}\binom{n}{k} = \sum\limits_{k\ impair}\binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

11) Calculer $\sum\limits_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$.

12) Montrer, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, et en déduire le calcul de $\binom{n}{k}$.

13) Donner une méthode permettant de calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ (sans récurrence).

14) Formule de Bernoulli de factorisation de $a^n - b^n$; en déduire que si $2^n - 1$ $(n \geqslant 2)$ est

premier, alors n est premier.

15) Formule de Bernoulli de factorisation de $a^n + b^n$ pour n impair ; en déduire que si $2^n + 1$ $(n \geqslant 1)$ est premier, alors n est une puissance de 2.

16) A partir de la relation $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

17) Utilisant la fonction $f \,/\, f(x) = (1+x)^n$, calculer $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

A1. III) ENSEMBLES.

18) Définir en compréhension $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ (comme parties de $\mathbb{R}$), la courbe d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Donner la définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles. Donner également des CNS de non inclusion et de non égalité.

19) Déterminer $\bigcup_{n \geqslant 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right]; \bigcap_{n \geqslant 1} \left]-\frac{1}{n}, 1\right]$.

20) Sachant $(A, B$ finis disjoints $\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|)$, déterminer $|A \cup B|$, puis $|A \cup B \cup C|$.

21) Déterminer $|\mathcal{P}(E)|$ pour $|E| = n$.

22) Tous les ensembles suivants étant finis, déterminer $|E \times F|, |E_1 \times \ldots \times E_n|, |E^n|$.

A1 IV) APPLICATIONS.

23) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ n.f(n-1) \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$; déterminer $f(n)$.

$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ x.f(x-1) \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$; déterminer f sur $[1,2[$ et sur $[2,3[$.

Soit f une application de E vers F. Les lettres A désignent des parties de E, les lettres B désignent des parties de F.

24) Montrer : $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$; $\boxed{f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)}$ (montrer qu'on ne peut pas dire mieux que l'inclusion).

25) Montrer $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$: $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

26) Montrer : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; $\boxed{f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)} \cap f(\mathsf{E})}$ (montrer qu'on ne peut pas dire mieux que l'inclusion).

27) Montrer : $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

28) Montrer : $\boxed{f^{-1}(f(A)) \supset A}$ (montrer qu'on ne peut pas dire mieux) ; $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

29) Montrer : $gof(A) = g(f(A))$, où g est une application de F vers un ensemble G ; $(gof)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ où $C \subset G$.

30) I = injective, S = surjective. Donner un exemple d'application de E dans E $IS, \overline{I}S, I\overline{S}, \overline{IS}$

(avec preuves).

31) Soit f une application de E vers F. Montrer que s'il existe une application g de F vers E telle que $g \circ f = id_E$ alors f est injective, et que s'il existe une application g de F vers E telle que $f \circ g = id_F$ alors f est surjective. En déduire une CNS de bijectivité de f.

32) Pour E fini, f application de E vers F, caractériser l'injectivité puis la surjectivité de f par une condition portant sur $|f(E)|$ (sans démonstration).

En déduire pour f de E vers F, E et F finis de même cardinal :

f est injective ssi f est surjective, ssi f est bijective.

33) Dénombrer les applications, les fonctions, les applications injectives de E vers F (ensembles finis).

34) facultatif : Montrer que $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$ (donc $\mathbb{Q}$) sont dénombrables.

35) facultatif : Montrer que les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ ont la puissance du continu.

A1 V) RELATIONS.

36) Dénombrer les relations de E vers F (ensembles finis), les relations réflexives, les relations symétriques de E dans E.

37) Donner trois exemples de relations transitives et trois exemples de relations non transitives (avec justifications).

38) donner trois exemples de relations d'équivalences et déterminer leurs classes d'équivalence.

39) Montrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{N}$.

40) Définir majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, inférieure.

Montrer : $\begin{cases} m = \sup(A) \\ \text{et } m \in A \end{cases} \Leftrightarrow m = \max(A)$.

41) Donner des exemples, dans un ensemble et pour une relation d'ordre à préciser, de partie a) non majorée, b) majorée sans borne supérieure, c) avec borne supérieure et sans maximum, d) avec maximum.

A1. VI) STRUCTURES ALGÉBRIQUES

42) Montrer l'unicité de l'élément neutre, s'il existe ; s'il y a un élément neutre et si l'opération est associative, montrer l'unicité du symétrique d'un élément, s'il existe.

43) Montrer que si $*$ est associative et possède un élément neutre, x et y symétrisables $\Rightarrow$ $x * y$ symétrisable (être symétrisable signifiant : posséder un symétrique).

44) Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables de $(\mathbb{Z}, \times)$, de $(\mathbb{R}, \times)$, de $(E^E, \circ)$.

45) Montrer que si l'opération est associative, un élément ayant un symétrique est simplifiable, mais que la réciproque est fausse. Donner un exemple de matrice non nulle qui n'est pas simplifiable.

46) Donner un exemple de groupe avec un exemple de sous-groupe non trivial (avec démonstration).

47) Donner un exemple de groupe à n éléments (avec démonstration).

48) Montrer que dans un anneau A,

$a.0_A = 0_A.a = 0_A$ et que $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

49) Montrer que l'anneau $M_2(\mathbb{R})$ n'est ni commutatif, ni intègre. Donner des exemples où les formules du binôme et de Bernoulli (à l'ordre 2) sont mises en défaut.

50) Donner un exemple de sous-corps strict de $\mathbb{R}$, un exemple de sous-anneau qui n'est pas un sous-corps, un exemple de sous-groupe (additif) qui n'est pas un sous-anneau, et un exemple de partie stable pour + qui n'est pas un sous-groupe (avec démonstrations).

A2. GÉOMÉTRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE.

1) Expliquer la méthode du pivot de Gauss, les notions de système échelonné, d'inconnues principales et secondaires, de rang, d'indétermination et de compatibilité, à partir du système :

$$\begin{cases} x+y+mz = 1 \\ x+my+z = m \\ mx+y+z = m^2 \end{cases}$$

2) Définir la représentation cartésienne paramétrique d'une droite du plan et, sur un exemple, en déduire une représentation cartésienne du type : $ax+by = c$.

3) Définir la représentation cartésienne paramétrique d'un plan de l'espace et, sur un exemple, en déduire une représentation cartésienne du type : $ax+by+cz = d$.

4) Définir la représentation cartésienne paramétrique d'une droite de l'espace et, sur un exemple, en déduire un système d'équation cartésiennes.

5) Donner la définition d'une translation. Composée de translations, bijectivité d'une translation.

6) Donner la définition d'une homothétie. Composée d'homothéties de même centre, bijectivité d'une homothétie de rapport non nul.

7) Montrer que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ caractérise les homothéties et les translations.

8) En déduire que la composée de deux homothéties ou translations est une homothétie ou une translation.

9) Donner la définition d'une projection du plan, de base une droite et de direction une droite sécante à la précédente.

10) Donner la définition d'une symétrie du plan, de base une droite et de direction une droite sécante à la précédente.

A3. NOMBRES COMPLEXES.

1) Démontrer les propriétés : $\overline{z+z'} = \ldots, \overline{zz'} = \ldots, |zz'| = \ldots$, et donner une application de cette dernière formule.

2) Montrer que $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$.

3) Déduire de 2) : $|z|-|z'| \leqslant |z+z'|$ puis $||z|-|z'|| \leqslant |z+z'|$.

4) Énoncer les 9 propriétés qui font que $(\mathbb{C}, +, .)$ est un corps commutatif. Démontrer la dernière (inversibilité).

5) Montrer que dans $\mathbb{C}$, il ne peut y avoir de relation d'ordre total compatible avec l'addition et la multiplication, prolongeant la relation de $\mathbb{R}$.

6) Donner une méthode permettant de déterminer sous forme algébrique les deux racines carrées d'un complexe.

7) Mettre sous forme canonique az^2+bz+c $(a \neq 0)$; en déduire la factorisation complexe de az^2+bz+c et les solutions complexes de $az^2+bz+c = 0$.

8) Formules de Moivre et d'Euler ; leur utilité.

9) Démontrer que pour tout entier naturel n il existe un polynôme T_n tel que $\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \cos n\theta = T_n(\cos\theta)$; écrire $T_k(x)$ pour $1 \leqslant k \leqslant 4$.

10) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, il existe un polynôme U_{n-1} tel que $\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \sin n\theta = \sin\theta . U_{n-1}(\cos\theta)$; écrire $U_k(x)$pour $1 \leqslant k \leqslant 3$.

11) Factorisation de $e^{ia}+e^{ib}$ et $e^{ia}-e^{ib}$; interpréter géométriquement.

12) Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta+\varphi)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta+\varphi)$ à l'aide des complexes.

13) Montrer : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \quad z = \rho e^{i\theta}$ et résoudre $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$.

14) Montrer que si $n = pq$, les racines n-ièmes de Z sont les racines p-ièmes des racines q-ièmes de Z, et que si z_0 est une racine n-ième particulière de $Z \neq 0$, on obtient les autres en multipliant z_0 par les racines n-ièmes de 1.

15) Montrer que tout nombre complexe non nul possède exactement n racines n-ièmes.

16) Déterminer une valeur approchée d'une racine huitième de $(-3+4i)/5$ à l'aide d'une

machine à calculer ; faire une figure avec les huit racines huitièmes.

17) Déterminer les racines cubiques de $2+11i$ sachant que $(2+i)^3 = 2+11i$.

18) Facultatif : la réponse à 17) étant connue, résoudre l'équation de Bombelli $z^3 = 15z+4$ à l'aide de la méthode de Cardan.

19) Facultatif : résoudre l'équation $z^3+3z-2 = 0$.

20) Définir géométriquement une similitude plane de centre Ω, d'angle θ et de rapport k, et montrer que les applications $M(z) \mapsto M'(az+b)$ sont des similitudes ou des translations.

A4. DÉNOMBREMENTS ET PROBABILITÉS.

1) Déterminer, pour $|E| = n$, $|E^p|$, $|\mathsf{A}_p(E)|$ et $|\mathsf{P}_p(E)|$ (p-listes, p-listes sans répétition, p-parties)

2) Donner 5 caractérisations différentes des coefficients binomiaux (sans preuve)

-> Il y a $\binom{5}{2} = 10$ équivalences donc autant d'exercices possibles à partir de cette question de cours !

3) Montrer que $\binom{n}{p}$, nombres de p-parties d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre de n-uplets dont p coordonnées sont égales à a et les $n-p$ autres égales à b.

4) Démontrer par un raisonnement combinatoire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, puis que

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ \text{k pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \text{k impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

5) Montrer par un raisonnement combinatoire la relation de Pascal :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

6) Montrer par un raisonnement combinatoire la formule du binôme.

7) Montrer pour une probabilité P sur un univers fini :

$P_1 : P(\varnothing) = 0$

$P_2 : P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P_3 : A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

$P_4 : P(A) \leqslant 1$

$P_5 : P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$

P_6 : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'évènements deux à deux incompatibles: #

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$ #

8) Montrer que sur un univers fini, il existe une unique probabilité où tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

9) Définir $P(A|B)$ en expliquant cette définition, et en déduire la petite formule de Bayes reliant $P(A|B)$ à $P(B|A)$.

10) Si $(A_i)_{i=1..n}$ est un système quasi-complet d'évènements de proba non nulles, et B un évènement de proba non nulle, alors déterminer $P(B)$ et $P(A_j|B)$ en fonction des $P(A_i)$ et des

$P(B|A_i)$.

11) Montrer que si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ également.

12) Définir ce qu'est une variable aléatoire X sur un univers Ω , et, une probabilité P étant défine sur Ω, donner les deux expressions (sur Ω et sur $X(\Omega)$) de son espérance.

13) Linéarité et croissance de l'espérance.

13) Définir la variance et l'écart-type, et montrer que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

A5. ARITHMÉTIQUE

1) Énoncer et démontrer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

2) Démontrer que tout sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$.

3) Montrer que pour tout entier $b \geqslant 2$ et tout entier $a \geqslant 1$, il existe un unique entier n et une unique suite finie $(r_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ d'entiers entre 0 et $b-1$ ($r_n \neq 0$) telle que $a = \sum_{k=0}^{n} r_k b^k$.

4) Montrer que l'entier n ci-dessus est égal à $[\log_b(a)]$.

5) Facultatif : Donner le principe de l'algorithme d'exponentiation rapide et le mettre en oeuvre sur un exemple.

6) Montrer que les congruences dans $\mathbb{Z}$ sont compatibles avec l'addition et la multiplication.

7) Donner et justifier les méthodes d'obtention en système décimal du reste de la division par 2 et 5, 4 et 25, 3 et 9, et 11 d'un entier à partir de son écriture décimale (on pourra aussi tenter 7 !).

8) Enoncer et démontrer le théorème de Bézout.

9) Enoncer et démontrer le théorème de Gauss. En déduire que si a et b sont premiers entre eux et divisent c, alors ab divise c.

10) Présenter et justifier l'algorithme d'Euclide.

11) Montrer que $\mathrm{pgcd}(a,b) \times \mathrm{ppcm}(a,b) = ab$ ($a,\ b$ entiers > 0).

12) Montrer qu'un nombre $n \geqslant 2$ est premier si et seulement s'il ne possède pas de diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

13) 11) étant connu, donner la méthode d'Eratosthène :

a) Pour déterminer si un naturel donné est premier.

b) Pour écrire la liste des nombres premiers inférieurs à un naturel donné.

14) Compléter les CNS suivantes, portant sur les exposants de la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels non nuls $a,b,c,d,m,$ et justifier l'une d'entre elles (notation : $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p(a)}$) :

a) $a = b \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}\ldots$

b) a divise $b \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}\ldots$

c) $c = ab \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}\ \alpha_p(c) = \ldots$

d) $d = \mathrm{pgcd}\ (a,b) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}\quad \alpha_p(d) = \ldots$

e) $m = \mathrm{ppcm}\ (a,b) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}\quad \alpha_p(m) = \ldots$

15) Connaissant 14), montrer que la racine carrée de tout naturel qui n'est pas un carré est irrationnelle.

A6. ESPACES VECTORIELS.

1) Montrer que dans un K-espace vectoriel E, $\forall \vec{x} \in E\ \forall \lambda \in K\quad \lambda\vec{x} = \vec{0}_E \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0_K \\ \text{ou } \vec{x} = \vec{0}_E \end{cases}$.

2) Montrer que dans E, $\lambda(-\vec{x}) = (-\lambda)\vec{x} = -(\lambda\vec{x})$, en déduire $\lambda(\vec{x} - \vec{y}) = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{y}$ et $(\lambda - \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} - \mu\vec{x}$.

3) Montrer que $K^I = \{(x_i)_{i \in I} / \forall i \in I\quad x_i \in K\}$ muni d'opérations que l'on définira est un K-espace vectoriel.

4) Montrer que $K^I = \left\{ f : \left| \begin{array}{l} I \to K \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right. \right\}$ muni d'opérations que l'on définira est un K-espace vectoriel (par rapport au 4), seules les notations changent).

5) Montrer que si E_1 et E_2 sont deux K-espaces vectoriels, $E_1 \times E_2$, muni d'opérations que l'on définira, est un K-espace vectoriel.

6) Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels du K-espace vectoriel K sont $\{0\}$ et K.

7) Donner une représentation paramétrique du sous-ensemble de K^4 défini par

$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z + t = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{array} \right.$ et montrer que c'en est un sous-espace vectoriel.

8) Donner trois exemples de sous-ensembles non triviaux de R^{N} qui en sont des sous-espaces vectoriels et deux exemples qui n'en sont pas.

9) Donner trois exemples de sous-ensembles non triviaux de R^{R} qui en sont des sous-espaces vectoriels et deux exemples qui n'en sont pas.

10) Donner un exemple de sous-espace vectoriel de R^{R} qui n'en est pas un sous-anneau.

11) Montrer que la droite engendrée par $\vec{x}_1 \neq \vec{0} \in E$, $\{\lambda\vec{x}_1 / \lambda \in K\}$, notée $K\vec{x}_1$ ou vect($\vec{x}_1$) , est un sous-espace vectoriel de E.

12) Montrer que l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, et que la somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels également. En déduire que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs est un sous-espace vectoriel (noté $vect(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p})$).

13) Montrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues dans K est un sous-espace vectoriel de K^p .

14) Donner deux CNS pour qu'une famille finie soit liée (et montrer leur équivalence) et les CNS correspondantes pour les familles libres.

15) Facultatif : Montrer de trois façons différentes que la famille (f_0, f_1, f_2) où $f_k(x) = e^{kx}$, est libre.

16) Donner une équation cartésienne du sous-ensemble de K^3 défini paramétriquement par

$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda, \mu \in K \\ x = \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \end{array} \right.$ et montrer que c'en est un sous-espace vectoriel.

17) Donner la définition d'une base (finie) et démontrer l'équivalence avec l'existence et l'unicité de la décomposition d'un vecteur quelconque.

18) Donner des bases de K^n, $M_{np}(K)$, $\mathsf{P}_n(K,K)$, ensembles des fonctions polynômes de degré $\leqslant n$(avec preuves).

19) Montrer qu'une base est une famille génératrice minimale.

20) Réciproque de 19).

21) Montrer qu'une base est une famille libre maximale.

22) Réciproque de 21).

23) Facultatif : Montrer que le nombre d'éléments d'une famille libre est toujours inférieur ou égal au nombre d'éléments d'une famille génératrice.

23 bis) En déduire que deux bases ont toujours le même nombre d'éléments.

24) Facultatif : Montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie (i.e. possède une base finie), ssi le nombre d'éléments de ses familles libres est majoré et que dans un espace de dimension finie toute famille libre peut être complétée en une base.

25) Montrer que $\mathsf{P}(K,K)$ (ensemble des fonctions polynomes de K dans K) et K^{N} sont de dimension infinie.

26) Montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie (i.e. possède une base finie), ssi il possède au moins une famille génératrice finie et que dans un espace de dimension finie, de toute

famille génératrice, on peut extraire une base.

27) Montrer, en utilisant 23 bis), que dans un espace vectoriel ayant une base à n éléments, les familles libres (resp. génératrices) ont au plus (resp. au moins) n éléments, et que si une famille possédant n éléments est libre (resp. génératrice) alors c'est une base.

28) Montrer qu'un sous espace vectoriel d'un espace E de dimension n est de dimension finie inférieure ou égale à n, et que si sa dimension est égale à n, il est égal à E.

29) Donner la définition du rang r d'une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n et montrer que $r \leqslant \min(n,p)$.

30) Suite de 29) : caractériser les cas $r = p$ et $r = n$.

31) Facultatif : Donner la définition d'une famille finie échelonnée dans une base, et montrer qu'une famille échelonnée est libre.

32) Indiquer (et montrer la validité) des opérations élémentaires permettant de transformer une famille finie quelconque en une famille échelonnée de même rang.

33) Déterminer la dimension de $E \times F$ en fonction de celles de E et F.

34) Montrer que $E = F \oplus G \Leftrightarrow \forall \vec{z} \in E \quad \exists!(\vec{x},\vec{y}) \in F \times G \quad \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

35) Montrer que la "réunion" d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F et d'une famille génératrice d'un sous espace G donne une famille génératrice de $F + G$ et que si la somme de F et G est directe, la "réunion" d'une famille libre de F et d'une famille libre de G donne une famille libre de $F + G$.

36) Déduire de 5) que la "réunion" d'une base de F et d'une base de G donne une base de $F + G$ ssi la somme de F et G est directe et que donc $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

37) Montrer que tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.

38) Montrer la relation de GRASSMANN.

39) En déduire que l'intersection de deux plans vectoriels distincts en dimension 3 est une droite vectorielle.

40) Montrer qu'en dimension finie, $E = F \oplus G$ ssi 2 parmi les trois propriétés suivantes sont réalisées :

1. $E = F + G$; 2. $F \bigcap G = \left\{\vec{0}\right\}$; 3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

ANALYSE

B1. FONCTIONS NUMÉRIQUES NIVEAU 1.

B1. I) INÉGALITÉS

1) Démontrer $\Big|\, |x| - |y| \,\Big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ dans $\mathbb{R}$.

2) Donner et démontrer une expression de $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ à l'aide de la valeur absolue.

3) Tracer les courbes sur [-2, 2] des fonctions partie entière mathématique (floor) , partie entière des calculatrices (int), partie entière supérieure (ceil), et arrondi (round).

B1. II) FONCTIONS, GÉNÉRALITÉS

4) Donner un exemple illustrant la différence entre

$$\forall x \neq x' \in I \ \Big(\ t_f(x,x') > 0 \text{ ou } t_f(x,x') < 0\Big)$$

et

$$\Big(\forall x \neq x' \in I \quad t_f(x,x') > 0\Big) \text{ ou } \Big(\forall x \neq x' \in I \ \ t_f(x,x') < 0\Big)$$

5) Montrer que f est majorée et minorée sur I ssi $|f|$ est majorée sur I.

6) Montrer que f est paire ssi sa courbe est symétrique par rapport à Oy.

7) Donner en langage formalisé la définition d'une fonction périodique. Montrer que la somme de deux périodes est une période, et que l'opposé d'une période est une période.

B1. III) FONCTIONS CIRCULAIRES.

8) Montrer la formule $\cos(a-b) = \ldots$, et en déduire $\cos(a+b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$.

9) Comment calculer $\tan(x/2)$ connaissant $\cos x$ et $\sin x$? Appliquer à $\tan \pi/8$ et $\tan \pi/12$.

10) Exprimer $\cos x, \sin x, \tan x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$.

11) Formules de linéarisation ; application à $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$.

12) Formules $\cos p \pm \cos q$, $\sin p \pm \sin q$, $a \cos x + b \sin x$.

13) Calculer $\cos \pi/5$.

14) Réduire l'intervalle d'étude de la fonction sin, dresser son tableau de variations sur l'intervalle d'étude, et tracer sa courbe.

15) Réduire l'intervalle d'étude de la fonction tan, dresser son tableau de variations sur l'intervalle d'étude, et tracer sa courbe.

16) Déterminer une transformation géométrique faisant passer de $C_{\cos}$ à $C_{\sin}$ et de $C_{\tan}$ à $C_{\cot}$.

17) Calculer $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(\theta + k\varphi)$ en multipliant cette expression par $\sin \frac{\varphi}{2}$.

18) Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(\theta + k\varphi)$ en multipliant cette expression par $\sin \frac{\varphi}{2}$.

B1. IV) LIMITES

19) Montrer $|u| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin u| \leq |u|$, en déduire la continuité de sin en 0.

19 bis) Montrer la continuité en tout point de la fonction sin et de la fonction cos, en utilisant 19).

20) Montrer que $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

B1. V) DÉRIVATION, ÉTUDE DE FONCTIONS.

21) Montrer la dérivabilité de la somme et du produit de deux fonctions dérivables.

22) Montrer la dérivabilité de l'inverse d'une fonction dérivable, de la composée de deux fonctions dérivables (uniquement dans le cas de $g \circ f$, avec $f(x') \neq f(x)$ si $x' \neq x$).

23) (Petite règle de L'Hospital). Montrer que si f et g sont dérivables et nulles en x_0, g non nulle sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $g'(x_0) \neq 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

24) Sachant 20), déterminer la dérivée de la fonction cos puis en déduire celle de sin.

25) Donner des exemples de fonctions dont la courbe admet :

a) une direction asymptotique (horizontale, oblique, verticale) mais pas d'asymptote (en précisant bien les définitions correspondantes).

b) une branche infinie sans direction asymptotique.

B1. VI) FONCTIONS USUELLES.

26) Montrer $\begin{cases} \forall a, b > 0 \quad f(ab) = f(a) + f(b) \\ f \text{ dérivable sur }]0, +\infty[\end{cases} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} \;\; f = k \ln,$

où $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

27) Montrer $\ln ab = \ln a + \ln b \;\; \forall a, b > 0$.

28) Montrer $\ln x^r = r \ln x \quad \forall x > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$.

29) Montrer $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

30) Montrer que $\ln x \leqslant x - 1$.

31) En déduire $\ln x \leqslant 2(\sqrt{x} - 1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; interprétation géométrique ?

32) Soit f injective sur un intervalle I et f^{-1}, fonction réciproque de la restriction de f à I ; montrer que les courbes de $f_{|I}$ et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

33) Pour une fonction f injective sur un intervalle I, dérivable de dérivée non nulle, et f^{-1}, fonction réciproque de la rectriction de f à I, étant admise comme dérivable, calculer l'expression de $(f^{-1})'(y)$ pour y dans $f(I)$.

34) Montrer que $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ et $\exp rx = (\exp x)^r \quad \forall x,y \quad \forall r \in \mathbb{Q}$.

35) Donner les définitions du symbole a^b, et montrer : $\begin{cases} a^{b+c} = a^b a^c \ (a > 0) \\ a^{bc} = (a^b)^c \ (a > 0) \end{cases}$.

36) Étudier et tracer les courbes des diverses fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ sur $]0,+\infty[$.

37) déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{1+x^\beta}$, suivant les valeurs de $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

38) Sachant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, déterminer $\lim\limits_{x\to0} x\ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$.

39) Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

40) Montrer $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$,
et $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b$.

41) 42) 43) Étudier les fonctions ch, sh, th.

44) 45) 46) Définition et étude d'arcsin, arccos, arctan.

47) Montrer que $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

48) Montrer que pour $x > 0$ $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

49) Montrer que si $ab < 1$, $\arctan a + \arctan b = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab}$.

B1 VII) INTÉGRATION.

50) Positivité et croissance de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment [a,b]. Inégalité triangulaire.

51) Dérivée de $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ (préciser les hypothèses).

52) Montrer que si u et v sont dérivables, de dérivée continue sur un intervalle I, $\int udv = uv - \int vdu$, en explicitant ces notations (calculer par exemple $\int \ln(x)dx$, $\int \arctan(x)dx$ et $\int xe^x dx$), puis que si u et v sont dérivables, de dérivée continue sur $[a,b]$,
$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

53) Montrer que si u est dérivable, de dérivée continue sur I et f continue sur $u(I)$, alors $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$, en explicitant ces notations (calculer par exemple $\int \sin^3(x)dx$ et $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$), puis que si u est dérivable, de dérivée continue sur $[a,b]$ et f continue sur $u([a,b])$, alors $\displaystyle\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$.

54) En déduire que si f est continue sur $\mathbb{R}$,

- si f est paire, $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- si f est impaire, $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- si f est T-périodique, $\displaystyle\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de a.

55) Déterminer $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\, x}$ et $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\, x}$.

56) Faculatatif : Déterminer $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ et $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$.

57) Facultatif : Déterminer $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ ($a > |b| > 0$, poser $t = \tan \frac{x}{2}$) ; en déduire la moyenne sur une période de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a+b\cos x}$.

B2. SUITES

1) Écrire : (u_n) est croissante à partir d'un certain rang ; (u_n) n'est croissante (resp. monotone) à partir d'aucun rang. Donner des exemples.

2) Donner un exemple de suite $\begin{cases} \text{a) ni majorée, ni minorée.} \\ \text{b) non majorée et croissante partir d'aucun rang.} \end{cases}$,
en précisant bien les définitions utilisées.

3) Étudier les sens de variation de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\geqslant 1}$ et de $\left(\frac{n^{100}}{(1,1)^n}\right)_{n\geqslant 0}$.

4) Étudier les sens de variation de $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et $\left(\frac{(2n)!}{n^n}\right)$.

5) Étudier le sens de variation d'une suite récurrente $u_n = f(u_{n-1})$ lorsque $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est croissante sur I, $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$.

6) Comme 5) avec f décroissante (5) peut être supposé connu).

7) Donner 3 définitions des suites arithmétiques et montrer leur équivalence.

$$\left(\begin{array}{c} \exists r \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1}), \ \exists a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = an + b \end{array} \right)$$

8) Calcul de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, géométrique.

9) Calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique ($u_n = au_{n-1} + b$).

10) Récurrences linéaires doubles : ($u_0 = \alpha, u_1 = \beta, u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$).

Énoncer (sans preuve) les résultats, dans le cas complexe puis dans le cas réel (en expliquant d'où vient l'équation caractéristique).

11) R.L.D. : montrer que

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists A, B \in \mathbb{C} \quad \forall n \quad u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n.$$

12) R.L.D. : montrer que

$$\Delta = 0 \Rightarrow \exists A, B \in \mathbb{C} \quad \forall n \quad u_n = An\lambda^n + B\lambda^n.$$

13) R.L.D. (cas réel).

Montrer que

$$\Delta < 0, \lambda = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \exists C, D \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad u_n = \rho^n(C\cos n\theta + D\sin n\theta).$$

11 bis) R. L. D. : montrer que si λ est solution de l'équation caractéristique (E) : $\lambda^2 = a\lambda + b$, la suite $(u_n - \lambda u_{n-1})$ est géométrique de raison $a - \lambda$.

12 bis) Dans le cas où (E) a deux solutions distinctes, calculer le terme général u_n en utilisant les deux suites géométriques $(u_n - \lambda_1 u_{n-1})$ et $(u_n - \lambda_2 u_{n-1})$.

13 bis) Dans le cas où (E) a une solution double $\lambda \neq 0$, montrer qu'$\left(\frac{u_n}{\lambda^n}\right)$ est arithmétique et en déduire u_n.

14) (suites réelles)

Montrer $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0 \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim u_n = \lim w_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim v_n = 0$ (gendarmes).

15) (suites complexes) Montrer : $\lim u_n = \lim v_n = 0 \Rightarrow \lim(u_n + v_n) = 0$.

16) Montrer $\begin{cases} (u_n) \text{ bornée} \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n v_n) = 0$.

17) Prouver l'unicité de la limite finie d'une suite.

18) (suites réelles) : conservation des inégalités larges par passage à la limite.

19) Montrer qu'une suite convergente est bornée.

20) Montrer (en utilisant les propriétés ci-dessus) que la somme et le produit de suites convergentes est une suite convergente.

21) Montrer que si $\lim u_n = l \neq 0 (\in \mathbb{C})$, alors il existe n_1 tel que $u_n \neq 0$ pour $n \geq n_1$ et $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_1}$ est bornée, puis que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

22) Montrer que toute sous-suite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.

23) (suites réelles) Montrer que si $\lim u_n = +\infty$ et (v_n) est minorée, alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

24) (suites réelles) Montrer que si $\lim u_n = +\infty$ et $v_n \geqslant \lambda > 0$, alors $\lim(u_n v_n) = +\infty$. Donner un contre-exemple avec $v_n > 0$.

25) Facultatif : montrer qu'une suite réelle est non majorée si et seulement si elle possède une sous-suite tendant vers $+\infty$.

25) On sait que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \to +\infty} u_{n,k} = 0$; que dire des suites : $v_n = \sum_{k=1}^{p} u_{n,k}$ (p fixé) , et $w_n = \sum_{k=1}^{n} u_{n,k}$?

26) Montrer : (u_n) croissante majorée $\Longrightarrow (u_n)$convergente.

27) Montrer : (u_n) croissante non majorée $\Longrightarrow \lim u_n = +\infty$.

28) Donner un exemple de suite de limite $+\infty$ qui n'est croissante à partir d'aucun rang (avec preuve).

29) $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; montrer que (h_n) est divergente.

30) Montrer que $\forall n \geqslant 1 \quad \ln n \leq h_n \leq \ln n + 1$.

31) Donner trois exemples de suites divergentes vérifiant $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ (avec preuves).

32) $q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que (q_n) est convergente.

33) Définir la notion de suites adjacentes, et montrer qu'elles convergent vers la même limite.

34) Facultatif : Application des suites adjacentes : montrer que si A est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, entre deux réels, il existe toujours un réel qui n'appartient pas à A (autrement dit : une partie dénombrable est de complémentaire dense ; $\mathbb{R}$ n'est donc pas dénombrable).

35) Démontrer que toute suite bornée possède une sous-suite convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass).

36) $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $e'_n = e_n + \frac{1}{nn!}$; montrer que (e_n)et (e'_n) sont adjacentes.

37) En admettant 36) et $\lim e_n = e$, montrer que e est irrationnel.

38) Montrer la transitivité de $<<$; traduction en termes de "petits o" ?

39) Montrer que si $\lim(u_n) = l$, $\lim(u_n + o(u_n)) = l$.

40) Montrer : $o(u_n v_n) = u_n o(v_n)$, $u_n o(v_n) = o(u_n v_n)$, $o(\lambda u_n) = o(u_n)$, $\lambda o(u_n) = o(u_n)$, $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$.

41) Montrer : $\alpha < \beta \Rightarrow n^\alpha (\ln n)^\gamma << n^\beta (\ln n)^\delta \quad \forall \gamma, \delta$.

41) bis Montrer : si (u_n) est à termes > 0 et si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$.

42) Montrer $n^\alpha << a^n \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall a, |a| > 1$.

43) Montrer $a^n << n! \quad \forall a > 1$.

44) Montrer $n! << n^n$.

45) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des suites complexes ; montrer la compatibilité de cette relation avec la multiplication et les fonctions puissance.

46) Donner un exemple où $\begin{cases} u_n \sim u_n' \\ v_n \sim v_n' \end{cases}$ et $u_n + v_n \nsim u_n' + v_n'$, un exemple où $u_n \sim v_n$ et $f(u_n) \nsim f(v_n)$, un exemple où $u_n \sim v_n$ et $(u_n)^{\alpha_n} \nsim (v_n)^{\alpha_n}$.

47) Facultatif : Montrer que s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u_n \sim \lambda v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$, mais que la réciproque est fausse.