1) INÉGALITES

Rappel : $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* \cup \{0\}$.

DEF :

$$\left| \begin{array}{l} a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+ \\ a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow a \leqslant b \text{ et } a \neq b \end{array} \right.$$

PROPRIÉTÉS :

1. Réflexivité : $a \leqslant a$
2. Antisymétrie : $a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Leftrightarrow a = b$
3. Transitivité : $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$
4. Caractère total : $a \not\leqslant b \Leftrightarrow b < a$
5. Compatibilité avec $+$: $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$
6. Somme d'inégalités de même sens : $\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{array} \right. \Rightarrow a + c \leqslant b + d$
7. Changement de signe : $a \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant -a$
8. Compatibilité avec $\times$: si $c > 0$, $a \leqslant b \Leftrightarrow ac \leqslant bc$
9. Inversion : $0 < a \leqslant b \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$

D1

2) INTERVALLES DE $\mathbb{R}$.

Notations : pour $a \leqslant b \in \mathbb{R}$, on pose

$[a,b] = [b,a] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\}$
$[a,b[=]b,a] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x < b\}$
$]a,b] = [b,a[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leqslant b\}$
$]a,b[=]b,a[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$
$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x\},]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leqslant a\}$
$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\},]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leqslant a\}$
$]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

3) VALEUR ABSOLUE et fonctions apparentées.

DEF :

$\min(a,b) = \left\{ \begin{array}{l} a \text{ si } a \leqslant b \\ b \text{ si } b \leqslant a \end{array} \right., \max(a,b) = \left\{ \begin{array}{l} b \text{ si } a \leqslant b \\ a \text{ si } b \leqslant a \end{array} \right.$
$x_+ = \max(x,0)$(= partie positive de x)
$x_- = \min(x,0)$(= partie négative de x)
$\text{signe}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$
$\lvert x\rvert = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{array} \right.$

PROPRIÉTÉS :

1) $x = x_+ + x_-$
2) $\lvert x\rvert = \max(x,-x) = x_+ - x_- = x.\text{signe}(x) = \sqrt{x^2}$
3) $\min(a,b) = \dfrac{a+b-\lvert b-a\rvert}{2}, \max(a,b) = \dfrac{a+b+\lvert b-a\rvert}{2}$
4) $-a \leqslant x \leqslant a \Leftrightarrow \lvert x\rvert \leqslant a$; $\lvert x - x_0\rvert \leqslant a \Leftrightarrow x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a \Leftrightarrow x \in [x_0 - a, x_0 + a]$
5) $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \lvert y\rvert, \left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert = \dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$
6) Inégalité triangulaire : $\lvert x+y\rvert \leqslant \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$
7) Inégalité triangulaire gauche : $\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \rvert \leqslant \lvert x+y\rvert$

D2

4) PARTIE ENTIÈRE et fonctions apparentées.

DEF :

La *partie entière (inférieure)* de x : $\lfloor x \rfloor = \mathrm{E}(x) = \underline{\mathrm{E}}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
(python : $floor(x)$ qui est un flottant, ou $int(x)$ qui est un entier)

La *partie entière supérieure* de x : $\lceil x \rceil = \overline{\mathrm{E}}(x)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x (python : $ceil(x)$).

L'*arrondi (entier)* de x : $\mathrm{rnd}(x) = [x]$ est l'entier le plus proche de x ; s'il y en a deux, on prend le plus grand pour $x \geqslant 0$, et le plus petit pour $x < 0$ (python : $round(x)$).

La *partie fractionnaire* de x est la différence entre x et sa partie entière : $\mathrm{frac}(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Attention, dans les calculatrices, et en particulier en python, "int" arrondit vers 0 (int(-4.8)=-4) ; il ne correspond à la partie entière que pour les positifs.

PROPRIÉTÉS :

$n = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leqslant x < n+1 \end{cases}$		
$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$; $\mathrm{rnd}(-x) = -\mathrm{rnd}(x)$		
$n = \mathrm{rnd}(x) \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$ et $\begin{cases} n - \frac{1}{2} \leqslant x < n + \frac{1}{2} \text{ si } x \geqslant 0 \\ n - \frac{1}{2} < x \leqslant n + \frac{1}{2} \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$		
$\mathrm{rnd}(x) =$	$x + \frac{1}{2}$	si $x \geqslant 0$

D3 ; tracé des courbes.

On définit aussi :

La *valeur approchée décimale par défaut* à l'ordre n de x : $\mathrm{vad}_n(x) = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

La *valeur approchée décimale par excès* à l'ordre n de x : $\mathrm{vae}_n(x) = \dfrac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n}$.

L'*arrondi décimal d'ordre* n de x : $\mathrm{arrondi}_n(x) = \dfrac{\mathrm{arrondi}(10^n x)}{10^n}$.

Par exemple, la conversion euros-francs est la fonction : $x \mapsto \mathrm{arrondi}_2(6,55957x)$.

E1 : remplir le tableau :

n	$\mathrm{vad}_n(\sqrt{3})$	$\mathrm{vae}_n(\sqrt{3})$	$\mathrm{arrondi}_n(\sqrt{3})$
0			
1			
2			
3			
4			

Par convention, lorsqu'on écrit que $x \simeq N.10^{-n}$ avec N entier, cela signifie que $N.10^{-n} - 10^{-n} < x < N.10^{-n} + 10^{-n}$.

Par exemple,

$$x \simeq 31,109$$

($N = 31109$ et $n = 3$) signifie :

$$31,108 < x < 31,110$$

et

$$x \simeq 31,1090$$

($N = 311090$ et $n = 4$) signifie

$$31,1089 < x < 31,1091$$