0. COMMENT APPRENDRE SON COURS ?

Commencer par lire l'ensemble en sautant les détails techniques pour essayer de comprendre la globalité.
Puis reprendre chaque point en notant les définitions sur une fiche (ou un carnet), et les propriétés principales.

REFAIRE sur une feuille toutes les démonstrations, et retravailler les exemples : LIRE NE SUFFIT PAS !

Une heure de cours = 1/4 heure à une heure de travail perso...

I. INÉGALITES

Rappel : $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* \cup \{0\}$.

DEF :

$$\left| \begin{array}{l} a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+ \\ a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow a \leqslant b \text{ et } a \neq b \end{array} \right.$$

PROPRIÉTÉS :

1. Réflexivité : $a \leqslant a$
2. Antisymétrie : $a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Leftrightarrow a = b$
3. Transitivité : $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$
4. Caractère total : $a \nleqslant b \Leftrightarrow b < a$
5. Compatibilité avec + : $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$
6. Somme d'inégalités de même sens : $\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{array} \right. \Rightarrow a + c \leqslant b + d$
7. Changement de signe : $a \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant -a$
8. Compatibilité avec $\times$: si $c > 0$, $a \leqslant b \Leftrightarrow ac \leqslant bc$
9. Inversion : $0 < a \leqslant b \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$

D1

II. VALEUR ABSOLUE et fonctions apparentées.

DEF :

$\min(a,b) = \left\{ \begin{array}{l} a \text{ si } a \leqslant b \\ b \text{ si } b \leqslant a \end{array} \right.$, $\max(a,b) = \left\{ \begin{array}{l} b \text{ si } a \leqslant b \\ a \text{ si } b \leqslant a \end{array} \right.$
$\text{signe}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$
$\lvert x \rvert = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{array} \right.$

PROP :

$\lvert x \rvert = \max(x, -x) = x.\text{signe}(x) = \sqrt{x^2}$
$\min(a,b) = \dfrac{a + b - \lvert b - a \rvert}{2}$, $\max(a,b) = \dfrac{a + b + \lvert b - a \rvert}{2}$

PROPRIÉTÉS :

$-a \leqslant x \leqslant a \Leftrightarrow \lvert x \rvert \leqslant a$; $\lvert x - x_0 \rvert \leqslant a \Leftrightarrow x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$
$\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \lvert y \rvert$, $\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert = \dfrac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$.
Inégalité triangulaire : $\lvert x + y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$
Inégalité triangulaire gauche : $\lvert \lvert x \rvert - \lvert y \rvert \rvert \leqslant \lvert x + y \rvert$

D2

III. PARTIE ENTIÈRE et fonctions apparentées.

DEF :

La *partie entière (inférieure)* de x : $[x] = \lfloor x \rfloor = \mathrm{E}(x) = \underline{\mathrm{E}}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. (Maple : $floor(x)$)

La *partie entière supérieure* de x : $\lceil x \rceil = \overline{\mathrm{E}}(x)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x (Maple : $ceil(x)$).

L'*arrondi (entier)* de x : arrondi(x) est l'entier le plus proche de x ; s'il y en a deux, on prend le plus grand pour $x \geqslant 0$, et le plus petit pour $x < 0$ (Maple : $round(x)$).

La *partie fractionnaire* de x est la différence entre x et sa partie entière : $\mathrm{frac}(x) = \{x\} = x - [x]$

PROPRIÉTÉS :

$n = [x] \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leqslant x < n+1 \end{cases}$
$\overline{\mathrm{E}}(x) = -\mathrm{E}(-x)$; $\mathrm{arrondi}(-x) = -\mathrm{arrondi}(x)$
$n = \mathrm{arrondi}(x) \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$ et $\begin{cases} n - \frac{1}{2} \leqslant x < n + \frac{1}{2} \text{ si } x \geqslant 0 \\ n - \frac{1}{2} < x \leqslant n + \frac{1}{2} \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$
$\mathrm{arrondi}(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ si $x \geqslant 0$

D3 ; tracé des courbes.

On définit aussi :

La *valeur approchée décimale par défaut* à l'ordre n de x : $\mathrm{vad}_n(x) = \dfrac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n}$.

La *valeur approchée décimale par excès* à l'ordre n de x : $\mathrm{vae}_n(x) = \dfrac{\overline{\mathrm{E}}(10^n x)}{10^n}$.

L'*arrondi décimal d'ordre* n de x : $\mathrm{arrondi}_n(x) = \dfrac{\mathrm{arrondi}(10^n x)}{10^n}$.

Par exemple, la conversion euros-francs est la fonction : $x \mapsto \mathrm{arrondi}_2(6,55957x)$.

E1 : remplir le tableau :

n	$\mathrm{vad}_n(\sqrt{3})$	$\mathrm{vae}_n(\sqrt{3})$	$\mathrm{arrondi}_n(\sqrt{3})$
0			
1			
2			
3			
2			

Par convention, lorsqu'on écrit que $x \simeq N.10^{-n}$ avec N entier, cela signifie que $N.10^{-n} - 10^{-n} < x < N.10^{-n} + 10^{-n}$.

Par exemple,

$$x \simeq 31,109$$

$(N = 31109$ et $n = 3)$ signifie :

$$31,108 < x < 31,110$$

et

$$x \simeq 31,1090$$

$(N = 311090$ et $n = 4)$ signifie

$$31,1089 < x < 31,1091$$