V) RELATIONS.

1) Définition.

DEF : une relation R est définie par la donnée d'un *ensemble de départ* E, d'un *ensemble d'arrivée* F et d'un ensemble G de couples (x, y) avec x dans E et y dans F (autrement dit, G est une partie de $E \times F$) ; G est appelé le *graphe* de la relation.

On dit que R est une relation *de* l'ensemble E *vers* (ou *dans*) l'ensemble F.

Lorsque $(x, y) \in G$, on dit que x est *relié* à y par la relation R, ou que y est une *image* de x par R, ou encore que x est un *antécédent* de y par R, et l'on exprime ceci par les écritures :

$$\boxed{x\,R\,y} \text{ ou bien } \boxed{x \overset{R}{\mapsto} y}$$

Autrement dit, $G = \{(x, y) \in E \times F \;/\; x\,R\,y\}$.

Représentation par *diagramme sagittal*, par *diagramme cartésien.*
E1 : relation vide, relation pleine et autres.

Question : combien y a-t-il de relations différentes d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à p éléments ?
D1

REM 1 : ne pas confondre relation et opération : par exemple, $X \subset Y$ exprime une relation (l'inclusion), tandis que $x + y$ est le résultat d'une opération. Le premier est un énoncé, pas le second.
Autre exemple : la divisibité ($a \mid b$ si $b = ka$ avec k entier) est une relation, tandis que la division $(\dfrac{a}{b})$ est une opération.

REM 2 : l'énoncé $x\,R\,y$ se traduit par une phrase "x ...verbe.... y" (par exemple, x a pour carré y) ; le verbe à l'infinitif est appelé le *lien verbal* de la relation.

Par exemple, la relation R de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de lien verbal "avoir pour carré" est définie par

$$x\,R\,y \Leftrightarrow y = x^2$$

E2 : écrire de même la relation R de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de lien verbal "être le cube de", et reconnaître la relation de P^2 dans P^2 de lien verbal : "avoir même milieu que ".

2) Relations à l'intérieur du même ensemble.

a) Généralités.
Vocabulaire : quand l'ensemble de départ est égal à l'ensemble d'arrivée, au lieu de parler de relation *de* E *vers* E, on parle de relation *dans* E.

Diagramme sagittal dans ce cas :

Dans un ensemble quelconque, il y a au moins toujours 3 relations simples : la relation vide (graphe vide) , la relation pleine (graphe plein), et la relation d'égalité (graphe = diagonale de $E = \{(x, x) \;/\; x \in E\} = D_E = G_=$).

b) Propriétés concernant ces relations.

On considère ici une relation R dans E, de graphe G_R.

DEF 1 : la réflexivité :
on dit que R est *réflexive* si

$$\forall x \in E \;\; x\,R\,x$$

autrement dit, $D_E \subset G_R$.

Cela se traduit sur le diagramme sagittal par le fait que ....

et sur le diagramme cartésien par le fait que ....

Exemples et contre-exemples : E3

DEF 2 : la transitivité :
on dit que R est *transitive* si

$$\forall x,y,z\in E\ \begin{cases} x\,R\,y \\ et\ y\,R\,z \end{cases} \Rightarrow xRz$$

Exemples et contre-exemples : E4

DEF 3 : la symétrie :
on dit que R est *symétrique* si

$$\forall x,y\in E\ \ x\,R\,y\Rightarrow y\,R\,x$$

Cela se traduit sur le diagramme sagittal par le fait que ....
et sur le diagramme cartésien par le fait que ....
Exemples et contre-exemples : E5

DEF 4 : l'antisymétrie :
on dit que R est *antisymétrique* si

$$\forall x,y\in E\ \begin{cases} x\,R\,y \\ \text{avec } x\neq y \end{cases} \Rightarrow y\,\not R\,x$$

REM : cette définition est la meilleure pour comprendre cette notion, mais en pratique, on utilise la condition équivalente

$$\forall x,y\in E\ \begin{cases} x\,R\,y \\ \text{et } y\,R\,x \end{cases} \Rightarrow\ x=y$$

Preuve de cette équivalence D2

L'antisymétrie se traduit sur le diagramme sagittal par le fait que ....
et sur le diagramme cartésien par le fait que ....
Exemples et contre-exemples : E6

REM 1 : l'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie, mais son opposé.

REM 2 : Retenir :

$$\begin{array}{rcl} \text{symétrie} & = & \text{pas de sens unique} \\ \text{antisymétrie} & = & \text{pas de double sens} \end{array}$$

Mais par contre, il peut y avoir ou ne pas avoir de boucles dans les deux cas.
REM 2 : une relation peut être à la fois symétrique et antisymétrique ; d'ailleurs les relations à la fois symétriques et antisymétriques sont les relations où deux éléments distincts ne sont jamais reliés entre eux, comme par exemple l'égalité.

3) Relations d'équivalence (HORS PROGRAMME):

a) Définition et exemples.

DEF : une relation dans un ensemble E est appelée une *relation d'équivalence* si elle est réflexive, transitive et symétrique.

Exemples dans un ensemble quelconque : l'égalité et la relation pleine.

Autres exemples : E7

REM : une relation dont le lien verbal est du type : "avoir le même ... que" est toujours une relation d'équivalence.

Exemples importants : les congruences.

α) Congruences dans les entiers.

DEF : on dit que deux entiers a et b sont *congrus modulo* un entier naturel non nul n si leur différence est un multiple de n :

$$\begin{aligned} a &\equiv b \ [n] \Leftrightarrow n \mid b-a \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ b = a + kn \end{aligned}$$

On écrit aussi $a \equiv b \mod n$, ou, de façon abusive car la congruence n'est pas une égalité : $a = b \ [n]$, ou $a = b \mod n$.

Démonstration du fait que c'est une relation d'équivalence : D3

NB : modulo est l'ablatif du latin modulus "mesure" : modulo n signifie donc "à la mesure de n".

ATTENTION : ne pas confondre la congruence modulo n, qui est une *relation* dans $\mathbb{Z}$, et l'*opération* notée mod définie par :

$$a \operatorname{mod} b = \text{ reste de la division euclidienne de } a \text{ par } b = b\operatorname{frac}\left(\frac{a}{b}\right) \ (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$$

Les relations entre ces deux notions sont :

P1 : si $b > 0$, $a \operatorname{mod} b$ est l'unique entier congru à a modulo b compris entre 0 et $b-1$:

$$c = a \operatorname{mod} b \Leftrightarrow c \equiv a \ [b] \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant b-1$$

P2 : a et b sont *congrus modulo* n si et seulement s'ils ont même reste dans la division euclidienne par n :

$$a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow a \operatorname{mod} n = b \operatorname{mod} n$$

D4

β) Congruences dans les réels.

DEF : on dit que deux réels x et y sont *congrus modulo* un réel $a > 0$ si leur différence est un multiple entier de a :

$$x \equiv y \ [a] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ y = x + ka$$

On écrit aussi $x \equiv y \mod a$, ou, de façon abusive car la congruence n'est pas une égalité, $x = y \ [a]$, ou $x = y \mod a$.

Démonstration du fait que c'est une relation d'équivalence : D5

b) Classes d'équivalence.

DEF : étant donné une relation d'équivalence R dans un ensemble E, les classes d'équivalences associées à R sont les sous-ensembles de E non vides regroupant les éléments équivalents (c'est-à dire reliés par la relation R) ; autrement dit , pour $X \subset E$

$$X \text{ est une classe d'équivalence de la relation } R \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1.\ X \neq \emptyset \\ \hline 2.\ \forall x, y \in X \ \ x \, R \, y \\ \hline 3.\ \forall x \in X \ \ \forall y \in {}^cX \ \ x \not R \, y \end{array}}$$

Exemples E8

PROP : l'ensemble des classes d'équivalences associées à une relation d'équivalence dans E est une partition de E.
D6

Vocabulaire : tout élément x de E appartient donc à une unique classe d'équivalence, notée $\text{classe}_R(x)$, qui est l'ensemble des éléments qui lui sont équivalents :

$$\text{classe}_R(x) = \{x' \in E \;/\; x \, R \, x'\}$$

D'après la proposition précédente, à toute relation d'équivalence est associée une partition ; la proposition suivante montre que la réciproque est vraie :

PROP : étant donné une partition $\mathcal{E}$ de E il existe une unique relation d'équivalence dans E dont l'ensemble des classes d'équivalence est $\mathcal{E}$; c'est la relation R définie par

$$x \, R \, y \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{E} \;/\; x \text{ et } y \in X$$

D7
Ceci signifie donc qu'il y a bijection entre les relations d'équivalence et les partitions ; dans un ensemble fini, il existe donc autant de relations d'équivalence que de partitions.

4) Relations d'ordre.

a) Définition et exemples.
DEF : une relation dans un ensemble E est appelée une *relation d'ordre* (ou plus simplement *un ordre*) si elle est réflexive, transitive et *anti*symétrique.
Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit *ordonné*.

Représentation par diagramme sagittal, ou de Hasse.
Exemples dans un ensemble quelconque : l'égalité.
Autres exemples E9.

Le symbole $\leqslant$ étant réservé à la relation d'ordre habituelle dans les réels, nous utiliserons, pour une relation d'ordre arbitraire dans un ensemble E le symbole $\preccurlyeq$.

PROP : si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre dans E, la relation inverse, notée $\succcurlyeq$ et définie par

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow y \preccurlyeq x$$

est aussi une relation d'ordre.

REM : les notions de petitesse et d'infériorité ou de grandeur et de supériorité sont donc interchangeables et arbitraires.

DEF : si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre dans E, on définit la relation d'ordre strict associée, notée $\prec$ par

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \text{ et } x \neq y$$

Remarquons que la relation d'ordre strict n'est plus une relation d'ordre puisque non réflexive. Mais elle reste transitive et antisymétrique.

b) Ordre total.

DEF : un ordre est dit *total* lorsque deux éléments quelconques sont toujours comparables par cette relation, dans un sens ou dans l'autre :

$$\preccurlyeq \text{ est total} \Leftrightarrow \forall x, y \in E \;\; x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x$$

PROP : $\preccurlyeq$ est total(e) si et seulement si

$$\forall x, y \in E \;\; x \npreccurlyeq y \Leftrightarrow x \succ y$$

(autrement dit, le contraire de "*inférieur ou égal à*" est "*supérieur strictement à*").
Une relation d'ordre non totale est dite *partielle*.
D8

Exemples et contre-exemples : E10

PROP : un ordre sur un ensemble fini E est total ssi on peut écrire $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ avec

$$x_1 \prec x_2 \prec .... \prec x_n$$

(autrement dit si on peut classer ses éléments dans l'ordre croissant).

Corollaire : le nombre de relations d'ordre total sur un ensemble à n éléments est égal à.........

c) Majorant, maximum, borne supérieure d'une partie d'un ensemble ordonné.

α) Majorant et minorant.

Dans ce paragraphe E désigne un ensemble ordonné par $\preccurlyeq$ et A une de ses parties.

DEF : un élément m de E est appelé un $\begin{cases}\text{majorant}\\ \text{.............}\end{cases}$ de A (pour la relation $\preccurlyeq$) s'il est $\begin{cases}\text{supérieur ou égal}\\ \text{......................}\end{cases}$ à tous les éléments de A ; l'ensemble des $\begin{cases}\text{majorants}\\ \text{.............}\end{cases}$ de A sera noté $\begin{cases}A^+\\ \text{.............}\end{cases}$; autrement dit :

$$\begin{cases} m \in A^+ \\ \text{...........} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \ \ a \preccurlyeq m \\ \text{...................} \end{cases}$$

Une partie ayant au moins un $\begin{cases}\text{majorant}\\ \text{.............}\end{cases}$ est dite $\begin{cases}\textit{majorée}\\ \text{.............}\end{cases}$.

Exemples E11 : $\varnothing^+ = \varnothing^- = E$

β) Maximum et minimum.

PROP et DEF : il ne peut pas y avoir plus d'un $\begin{cases}\text{majorant}\\ \text{.............}\end{cases}$ de A qui soit élément de A ; cet élément, s'il existe, est appelé le $\begin{cases}\text{maximum}\\ \text{.............}\end{cases}$ ou encore le $\begin{cases}\text{plus grand élément}\\ \text{............................}\end{cases}$ de A :

$$\begin{cases} m = \max(A) \\ m = \min(A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \text{ et } \forall a \in A \ \ a \preccurlyeq m \\ \text{...} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \ \cap A^+ \\ \text{.....................} \end{cases}$$

D9

On définit aussi le maximum et le minimum d'une liste d'éléments de E :

$$\begin{cases} \max(a_1, a_2, ...a_n) = \max(\{a_1, a_2, ...a_n\}) \\ \text{...} \end{cases}$$

le maximum et le minimum d'une famille d'éléments de E :

$$\begin{cases} \max\limits_{i \in I}(a_i) = \max(\{a_i \ / \ i \in I\}) \\ \text{...} \end{cases}$$

le maximum et le minimum d'une fonction à valeurs dans E sur une partie de son ensemble de définition :

$$\begin{cases} \max\limits_{x \in X}(f(x)) = \max(\{f(x) \ / \ x \in X\}) \\ \text{...} \end{cases}$$

Exemples E12

PROP : un ensemble fini totalement ordonné (par exemple une partie finie de $(\mathbb{R}, \leqslant)$) a toujours un maximum et un minimum.

γ) Borne supérieure et borne inférieure.

DEF : la $\left\{\begin{array}{c}\text{borne supérieure}\\ \text{.................}\end{array}\right.$ de A, si elle existe, est le plus $\left\{\begin{array}{c}\text{petit}\\ \text{.......}\end{array}\right.$ des $\left\{\begin{array}{c}\text{majorants}\\ \text{.............}\end{array}\right.$ de A.

$$\left\{\begin{array}{c} m=\sup(A)\\ m=\inf(A)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} m=\min(A^+)\\ \text{....................}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1.\ \forall a\in A\ \ a\preccurlyeq m\\ 2.\ \forall m'\in E\ \ (\forall a\in A\ \ a\preccurlyeq m')\Rightarrow m\preccurlyeq m'\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} 1.\\ 2.\text{..}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

On définit aussi les bornes supérieure et inférieure d'une liste d'éléments de E :

$$\left\{\begin{array}{l}\sup(a_1,a_2,......a_n)=\sup(\{a_1,a_2,......a_n\})\\ \text{...}\end{array}\right.$$

les bornes supérieure et inférieure d'une famille d'éléments de E :

$$\left\{\begin{array}{l}\sup\limits_{i\in I}(a_i)=\sup(\{a_i\ /\ i\in I\})\\ \text{...}\end{array}\right.$$

les bornes supérieure et inférieure d'une fonction à valeurs dans E sur une partie de son ensemble de définition :

$$\left\{\begin{array}{l}\sup\limits_{x\in X}(f(x))=\sup(\{f(x)\ \ /\ x\in X\})\\ \text{...}\end{array}\right.$$

Exemples E13

$\sup(\varnothing)=\min(E)$; $\inf(\varnothing)=\max(E)$.
REM 1 : on a $m=\max(A)\Leftrightarrow m=\sup(A)$ et $m\in A$.

D10
REM 2 : Pour une partie A, on peut donc avoir les cas de figure suivants et eux seuls :
1er cas : A non majorée
exemples :

2ème cas : A majorée, mais sans borne supérieure
exemple : $A=]0,1[$ dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ muni de $\leqslant$ ..

3ème cas : A a une borne supérieure mais pas de maximum
exemples :

4ème cas : A a un maximum, qui est forcément aussi sa borne supérieure.
exemple :

REM 3 : on trouve parfois *infimum* et *supremum* pour borne inférieure et supérieure.

TH (admis) : dans $(\mathbb{R},\leqslant)$, toute partie non vide majorée admet une borne supérieure et toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

REM : ceci est faux dans $(\mathbb{Q},\leqslant)$; par exemple $\{x\in\mathbb{Q}\ /\ x^2\leqslant 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
d) Droite numérique achevée.

DEF : la droite numérique achevée, notée $\overline{\mathbb{R}}$, est l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on a adjoint deux éléments, notés $+\infty$ et $-\infty$, la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ étant prolongée à $\overline{\mathbb{R}}$ de sorte que $\left\{\begin{array}{c}-\infty\\+\infty\end{array}\right.$ soit le $\left\{\begin{array}{c}\text{minimum}\\ \text{maximum}\end{array}\right.$ de $\overline{\mathbb{R}}$.

On déduit alors du théorème ci-dessus le

COROLLAIRE : dans $(\overline{\mathbb{R}},\leqslant)$, toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Dorénavant, lorsque l'on parlera de la borne supérieure ou inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, cette partie sera toujours considérée comme incluse dans $\overline{\mathbb{R}}$.

REMARQUE : $\inf(\emptyset) =$ ...... et $\sup(\emptyset) =$ ....

Pour une partie A non vide de $\mathbb{R}$, on peut donc avoir les cas de figure suivants et eux seuls :

1er cas : A non majorée, cas équivalent à $\sup(A) = +\infty$

exemple :

2ème cas : A a une borne supérieure finie mais pas de maximum, cas équivalent à : $A < \sup(A) < +\infty$

exemple :

3ème cas : A a un maximum, cas équivalent à $\sup(A) \in A$.

exemple :