

V) RELATIONS.

1) Définition.

DEF : dans son acception la plus générale, une *relation* est définie par la donnée d'une famille d'ensembles E_1, \dots, E_n et d'un ensemble \mathcal{G} de n -uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) où les x_i appartiennent à E_i (appelé le *graphe*, ou la *table* de la relation).

Question : si les ensembles E_1, \dots, E_n ont respectivement p_1, \dots, p_n éléments, combien y a-t-il de relations possibles associées à ces ensembles ?

Réponse :

D1

Exemples E1 :

- Le tableau :

élève	date	colleur	matière	note
.....

définirait une relation associée à une famille de 5 ensembles.

Il y a tableaux possibles, donc autant de relations correspondantes.

- toute fonction est une relation associée à deux ensembles.

Dans ce chapitre on n'étudie que les relations dites "binaires", associées à deux ensembles, et de plus dans le cas où ces deux ensembles sont égaux.

DEF : une relation R dans l'ensemble E est définie par la donnée d'une partie \mathcal{G} du produit cartésien E^2 .

On dit que R est une relation *de* l'ensemble E *vers* (ou *dans*) l'ensemble F .

Lorsque $(x, y) \in \mathcal{G}$, on dit que x est *lié* à y par la relation R , et l'on exprime ceci par l'écriture :

$$\boxed{x R y}$$

Autrement dit, $\mathcal{G} = \{(x, y) \in E^2 / x R y\}$.

Représentation par *diagramme sagittal*, par *table* ou *matrice d'incidence*.

Dans un ensemble quelconque, il y a au moins toujours 3 relations simples : la relation vide (graphe vide), la relation pleine (graphe plein), et la relation d'égalité (graphe = diagonale de $E = \{(x, x) / x \in E\} = \mathcal{D}_E = \mathcal{G}_=$).

Question : combien y a-t-il de relations différentes dans un ensemble à n éléments ?

D'1

REM 1 : ne pas confondre relation et opération : par exemple, $X \subset Y$ exprime une relation (l'inclusion), tandis que $x + y$ est le résultat d'une opération. Le premier est un énoncé, pas le second.

Autre exemple : la divisibilité ($a \mid b$ si $b = ka$ avec k entier) est une relation, tandis que la division $\left(\frac{a}{b}\right)$ est une opération.

REM 2 : l'énoncé $x R y$ se traduit par une phrase " x ...verbe.... y " (par exemple, x a pour carré y) ; le verbe à l'infinitif est appelé le *lien verbal* de la relation.

Par exemple, la relation R dans \mathbb{R} de lien verbal "avoir pour carré" est définie par

$$x R y \Leftrightarrow y = x^2$$

E2 : écrire de même la relation R dans \mathbb{R} de lien verbal "être le cube de".

2) Propriétés concernant ces relations.

On considère ici une relation R dans E , de graphe \mathcal{G}_R .

DEF 1 : la réflexivité :
on dit que R est *réflexive* si

$$\forall x \in E \quad x R x$$

autrement dit, $\mathcal{D}_E \subset \mathcal{G}_R$.

Cela se traduit sur le diagramme sagittal par le fait que
et sur la matrice par le fait que

Exemples et contre-exemples : E3

DEF 2 : la transitivité :
on dit que R est *transitive* si

$$\forall x, y, z \in E \quad \left\{ \begin{array}{l} x R y \\ \text{et } y R z \end{array} \right. \Rightarrow x R z$$

Exemples et contre-exemples : E4

DEF 3 : la symétrie :
on dit que R est *symétrique* si

$$\forall x, y \in E \quad x R y \Rightarrow y R x$$

Cela se traduit sur le diagramme sagittal par le fait que
et sur la matrice par le fait que

Exemples et contre-exemples : E5

DEF 4 : l'antisymétrie :
on dit que R est *antisymétrique* si

$$\forall x, y \in E \quad \left\{ \begin{array}{l} x R y \\ \text{avec } x \neq y \end{array} \right. \Rightarrow y \not R x$$

REM : cette définition est la meilleure pour comprendre cette notion, mais en pratique, on utilise la condition équivalente

$$\forall x, y \in E \quad \left\{ \begin{array}{l} x R y \\ \text{et } y R x \end{array} \right. \Rightarrow x = y$$

Preuve de cette équivalence D2

L'antisymétrie se traduit sur le diagramme sagittal par le fait que
et sur la matrice par le fait que

Exemples et contre-exemples : E6

REM 1 : l'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie, mais son opposé.

REM 2 : Retenir :

$$\begin{array}{lcl} \text{symétrie} & = & \text{pas de sens unique} \\ \text{antisymétrie} & = & \text{pas de double sens} \end{array}$$

Mais par contre, il peut y avoir ou ne pas avoir de boucles dans les deux cas.

REM 2 : une relation peut être à la fois symétrique et antisymétrique ; d'ailleurs les relations à la fois symétriques et antisymétriques sont les relations où deux éléments distincts ne sont jamais reliés entre eux, comme par exemple l'égalité.

3) Relations d'équivalence.

a) Définition et exemples.

DEF : une relation dans un ensemble E est appelée une *relation d'équivalence* si elle est réflexive, transitive et symétrique.

Exemples dans un ensemble quelconque : l'égalité et la relation pleine.

Autres exemples : E7

REM : une relation dont le lien verbal est du type : "avoir le même ... que" est toujours une relation d'équivalence.

Exemples importants : les congruences.

 α) Congruences dans les entiers.

DEF : on dit que deux entiers a et b sont *congrus modulo* un entier naturel non nul n si leur différence est un multiple de n :

$$\begin{aligned} a &\equiv b [n] \Leftrightarrow n \mid b - a \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / b = a + kn \end{aligned}$$

On écrit aussi $a \equiv b \pmod{n}$, ou, de façon abusive car la congruence n'est pas une égalité : $a = b [n]$, ou $a = b \pmod{n}$.

Démonstration du fait que c'est une relation d'équivalence : D3

NB : modulo est l'ablatif du latin modulus "mesure" : modulo n signifie donc "à la mesure de n ".

ATTENTION : ne pas confondre la congruence modulo n , qui est une *relation* dans \mathbb{Z} , et l'*opération* parfois notée "mod" (et notée % en python) définie par :

$$a \bmod b = a \% b = \text{reste de la division euclidienne de } a \text{ par } b = b \cdot \text{frac}\left(\frac{a}{b}\right) \quad (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$$

Les relations entre ces deux notions sont :

P1 : si $b > 0$, $a \% b$ est l'unique entier congru à a modulo b compris entre 0 et $b - 1$:

$$c = a \% b \Leftrightarrow c \equiv a [b] \text{ et } 0 \leq c \leq b - 1$$

P2 : a et b sont *congrus modulo* n si et seulement s'ils ont même reste dans la division euclidienne par n :

$$a \equiv b [n] \Leftrightarrow a \% n = b \% n$$

D4

 β) Congruences dans les réels.

DEF : on dit que deux réels x et y sont *congrus modulo* un réel $a > 0$ si leur différence est un multiple entier de a :

$$x \equiv y [a] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = x + ka$$

On écrit aussi $x \equiv y \pmod{a}$, ou, de façon abusive car la congruence n'est pas une égalité, $x = y [a]$, ou $x = y \pmod{a}$.

Démonstration du fait que c'est une relation d'équivalence : D5

b) Classes d'équivalence.

DEF : étant donné une relation d'équivalence R dans un ensemble E , les classes d'équivalences associées à R sont les sous-ensembles de E non vides regroupant les éléments équivalents (c'est-à-dire reliés par la relation R) ; autrement dit , pour $X \subset E$

$$X \text{ est une classe d'équivalence de la relation } R \Leftrightarrow \begin{array}{|l} 1. X \neq \emptyset \\ 2. \forall x, y \in X \quad x R y \\ 3. \forall x \in X \quad \forall y \in E \setminus X \quad x \not R y \end{array}$$

Exemples E8

PROP : l'ensemble des classes d'équivalences associées à une relation d'équivalence dans E est une partition de E .
D6

Vocabulaire : tout élément x de E appartient donc à une unique classe d'équivalence, notée $\text{classe}_R(x)$, qui est l'ensemble des éléments qui lui sont équivalents :

$$\text{classe}_R(x) = \{x' \in E / x R x'\}$$

D'après la proposition précédente, à toute relation d'équivalence est associée une partition ; la proposition suivante montre que la réciproque est vraie :

PROP : étant donné une partition \mathcal{E} de E il existe une unique relation d'équivalence dans E dont l'ensemble des classes d'équivalence est \mathcal{E} ; c'est la relation R définie par

$$x R y \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{E} / x \text{ et } y \in X$$

D7

Ceci signifie donc qu'il y a bijection entre les relations d'équivalence et les partitions ; dans un ensemble fini, il existe donc autant de relations d'équivalence que de partitions.

4) Relations d'ordre.

a) Définition et exemples.

DEF : une relation dans un ensemble E est appelée une *relation d'ordre* (ou plus simplement *un ordre*) si elle est réflexive, transitive et *antisymétrique*.

Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit *ordonné*.

Représentation par diagramme sagittal, ou de Hasse.

Exemples dans un ensemble quelconque : l'égalité.

Autres exemples E9.

Le symbole \leq étant réservé à la relation d'ordre habituelle dans les réels, nous utiliserons, pour une relation d'ordre arbitraire dans un ensemble E le symbole \preceq .

PROP : si \preceq est une relation d'ordre dans E , la relation inverse, notée \succ et définie par

$$x \succ y \Leftrightarrow y \preceq x$$

est aussi une relation d'ordre.

REM : les notions de petitesse et d'infériorité ou de grandeur et de supériorité sont donc interchangeables et arbitraires.

DEF : si \preceq est une relation d'ordre dans E , on définit la relation d'ordre strict associée, notée \prec par

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \text{ et } x \neq y$$

Remarquons que la relation d'ordre strict n'est plus une relation d'ordre puisque non réflexive. Mais elle reste transitive et antisymétrique.

b) Ordre total.

DEF : un ordre est dit *total* lorsque deux éléments quelconques sont toujours comparables par cette relation, dans un sens ou dans l'autre :

$$\preceq \text{ est total} \Leftrightarrow \forall x, y \in E \quad x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$

PROP : \preceq est total(e) si et seulement si

$$\forall x, y \in E \quad x \not\preceq y \Leftrightarrow x \succ y$$

(autrement dit, le contraire de "inférieur ou égal à" est "supérieur strictement à").

Une relation d'ordre non totale est dite *partielle*.
D8

Exemples et contre-exemples : E10

PROP : un ordre sur un ensemble fini E est total ssi on peut écrire $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec

$$x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$$

(autrement dit si on peut classer ses éléments dans l'ordre croissant).

Corollaire : le nombre de relations d'ordre total sur un ensemble à n éléments est égal à.....

c) Majorant, maximum, borne supérieure d'une partie d'un ensemble ordonné.

α) Majorant et minorant.

Dans ce paragraphe E désigne un ensemble ordonné par \preceq et A une de ses parties.

DEF : un élément m de E est appelé un $\left\{ \begin{array}{l} \text{majorant} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ de A (pour la relation \preceq) s'il est $\left\{ \begin{array}{l} \text{supérieur ou égal} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ à tous les éléments de A ; l'ensemble des $\left\{ \begin{array}{l} \text{majorants} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ de A sera noté $\left\{ \begin{array}{l} A^+ \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$; autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \in A^+ \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A \ a \preceq m \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Une partie ayant au moins un $\left\{ \begin{array}{l} \text{majorant} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ est dite $\left\{ \begin{array}{l} \text{majorée} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$.

Exemples E11 : $\emptyset^+ = \emptyset^- = E$

β) Maximum et minimum.

PROP et DEF : il ne peut pas y avoir plus d'un $\left\{ \begin{array}{l} \text{majorant} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ de A qui soit élément de A ; cet élément, **s'il existe**, est appelé le $\left\{ \begin{array}{l} \text{maximum} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ ou encore le $\left\{ \begin{array}{l} \text{plus grand élément} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ de A :

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \max(A) \\ m = \min(A) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \in A \text{ et } \forall a \in A \ a \preceq m \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \in A \cap A^+ \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

D9

On définit aussi le maximum et le minimum d'une liste d'éléments de E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

le maximum et le minimum d'une famille d'éléments de E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{i \in I} (a_i) = \max(\{a_i / i \in I\}) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

le maximum et le minimum d'une fonction à valeurs dans E sur une partie de son ensemble de définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_X (f) = \max_{x \in X} (f(x)) = \max(\{f(x) / x \in X\}) = \max(f(X)) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Exemples E12

PROP : un ensemble fini totalement ordonné (par exemple une partie finie de (\mathbb{R}, \leq)) a toujours un maximum et un minimum.

γ) Borne supérieure et borne inférieure.
 DEF : la $\left\{ \begin{array}{l} \text{borne supérieure} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ de A , **si elle existe**, est le plus $\left\{ \begin{array}{l} \text{petit majorant} \\ \dots\dots \end{array} \right.$ de A .

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \sup(A) \\ m = \inf(A) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = \min(A^+) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \forall a \in A \quad a \leq m \\ 2. \forall m' \in E \quad (\forall a \in A \quad a \leq m') \Rightarrow m \leq m' \\ 1. \\ 2. \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

On définit aussi les bornes supérieure et inférieure d'une liste d'éléments de E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sup(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

les bornes supérieure et inférieure d'une famille d'éléments de E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{i \in I} (a_i) = \sup(\{a_i / i \in I\}) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

les bornes supérieure et inférieure d'une fonction à valeurs dans E sur une partie de son ensemble de définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_X (f) = \sup_{x \in X} (f(x)) = \sup(\{f(x) / x \in X\}) = \sup(f(X)) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Exemples E13

$\sup(\emptyset) = \min(E)$; $\inf(\emptyset) = \max(E)$.

REM 1 : on a $m = \max(A) \Leftrightarrow m = \sup(A)$ et $m \in A$.

D10

REM 2 : Pour une partie A , on peut donc avoir les cas de figure suivants et eux seuls :

1er cas : A non majorée

exemples :

2ème cas : A majorée, mais sans borne supérieure

exemple : $A =]0, 1[$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ muni de \leq .

3ème cas : A a une borne supérieure mais pas de maximum

exemples :

4ème cas : A a un maximum, qui est forcément aussi sa borne supérieure.

exemple :

REM 3 : on trouve parfois *infimum* et *supremum* pour borne inférieure et supérieure.

TH (admis) : dans (\mathbb{R}, \leq) , toute partie non vide majorée admet une borne supérieure et toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

REM : ceci est faux dans (\mathbb{Q}, \leq) ; par exemple $\{x \in \mathbb{Q} / x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans \mathbb{Q} .

d) Droite numérique achevée.

DEF : la droite numérique achevée, notée $\overline{\mathbb{R}}$, est l'ensemble \mathbb{R} auquel on a adjoint deux éléments, notés $+\infty$ et $-\infty$, la relation d'ordre de \mathbb{R} étant prolongée à $\overline{\mathbb{R}}$ de sorte que $\left\{ \begin{array}{l} -\infty \\ +\infty \end{array} \right.$ soit le $\left\{ \begin{array}{l} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{array} \right.$ de $\overline{\mathbb{R}}$.

On déduit alors du théorème ci-dessus le

COROLLAIRE : dans $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Dorénavant, lorsque l'on parlera de la borne supérieure ou inférieure d'une partie de \mathbb{R} , cette partie sera toujours considérée comme incluse dans $\overline{\mathbb{R}}$.

REMARQUE : $\inf(\emptyset) = \dots$ et $\sup(\emptyset) = \dots$

Pour une partie A non vide de \mathbb{R} , on peut donc avoir les cas de figure suivants et eux seuls :

1er cas : A non majorée, cas équivalent à $\sup(A) = +\infty$

exemple :

2ème cas : A a une borne supérieure finie mais pas de maximum, cas équivalent à : $A < \sup(A) < +\infty$

exemple :

3ème cas : A a un maximum, cas équivalent à $\sup(A) \in A$.

exemple :