

A) ÉTUDE ALGÈBRIQUE DES SUITES NUMÉRIQUES.

I) GÉNÉRALITÉS

1) Définition.

DEF : une suite d'éléments d'un ensemble E est une fonction de \mathbb{N} vers E dont l'ensemble de définition est du type $[[n_0, +\infty[$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$; si $E = \mathbb{R}$, on parle de suite *réelle*, et si $E = \mathbb{C}$, de suite *complexe*, ou *numérique*.

Au lieu de la notation fonctionnelle : $u(n)$, on utilise une notation indicielle : u_n ; u_n est appelé le *terme général* de la suite, et la suite est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$, voire (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Il ne faut donc pas confondre " u_n " qui est un élément de E et : " (u_n) " qui est une fonction de \mathbb{N} vers E .

Exemple : $(u_n) = (v_n)$ signifie :
 et $(u_n) \neq (v_n)$ signifie :

2) Sens de variation d'une suite réelle.

a) DEF : soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle ; on dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est

<i>croissante</i> ssi	$\forall n \geq n_0 \quad u_n \leq u_{n+1}$
<i>strictement croissante</i> ssi	$\forall n \geq n_0 \quad u_n < u_{n+1}$
<i>décroissante</i> ssi	$\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq u_{n+1}$
<i>strictement décroissante</i> ssi	$\forall n \geq n_0 \quad u_n > u_{n+1}$
<i>monotone</i> ssi	$(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante ou décroissante
<i>strictement monotone</i> ssi	$(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante ou strictement décroissante
<i>constante (ou stationnaire)</i> ssi	$\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n+1}$

Remarque 1: il se peut que le sens de variation d'une suite ne soit stable qu'à partir d'un indice supérieur à n_0 ; si donc n_1 est un entier $\geq n_0$, on dira que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *croissante à partir de n_1* si la suite $(u_n)_{n \geq n_1}$ est croissante (idem pour les autres définitions). On a donc :

$$(u_n)_{n \geq n_0} \text{ est croissante à partir d'un certain rang (APCR)} \Leftrightarrow \exists n_1 \geq n_0 \quad \forall n \geq n_1 \quad u_n \leq u_{n+1}$$

Et donc :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est *n'est croissante à partir d'aucun rang* $\Leftrightarrow \dots$

Ceci équivaut à ce qu'il existe une infinité de n pour lesquels $u_n > u_{n+1}$.

Exemples E1 : $u_n = (n - 10)^2$, $u_n = (-1)^n$.

Remarque 2 : (u_n) est décroissante ssi $(-u_n)$ est croissante (idem pour strictement).

Remarque 3 : (u_n) est constante ssi (u_n) est croissante et décroissante, ssi $\exists a \in \mathbb{R} / \forall n \geq n_0 \quad u_n = a$.

b) Diverses méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite numérique.

α) Se ramener à l'étude d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Ceci n'est possible que si on trouve une fonction f définie sur $[n_0, +\infty[$, telle que pour n entier $\geq n_0$, $u_n = f(n)$, et que le sens de variation de f soit facile à déterminer ; (u_n) a alors même sens de variation que f .

Exemple E2 : $u_n = \frac{n}{\ln n}$.

β) Méthode $u_{n+1} - u_n$.

Cette méthode marche bien quand u_n est défini par des sommes.

Si l'on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$, on a évidemment : $(u_n)_{n \geq n_0}$ est

<i>croissante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n \geq 0$
<i>strictement croissante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n > 0$
<i>décroissante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n \leq 0$
<i>strictement décroissante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n < 0$
<i>constante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n = 0$

(Remarquer la similitude avec les dérivées pour les fonctions).

Variante : on peut prendre $u_n - u_{n-1}$ au lieu de $u_{n+1} - u_n$; le signe est alors à vérifier à partir du rang $n_0 + 1$.

Remarque : si $u_n = \sum_{k=n_0}^n v_k$, alors $u_n - u_{n-1} = v_n$!!!!

Exemples E3 : $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (appelée série harmonique ; $u_n = h_{2n} - h_n$).

γ) Méthode $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Cette méthode marche bien quand u_n est défini par des produits, et de signe constant.

Si donc $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, et si l'on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, on a évidemment : $(u_n)_{n \geq n_0}$ est

<i>croissante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n \geq 1$
<i>strictement croissante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n > 1$
<i>décroissante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n \leq 1$
<i>strictement décroissante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n < 1$
<i>constante ssi</i>	$\forall n \geq n_0 \quad v_n = 1$

Variante : on peut prendre $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ au lieu de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; la position par rapport à 1 est alors à vérifier à partir du rang $n_0 + 1$.

Remarque : si $u_n = \prod_{k=n_0}^n v_k$, alors $\frac{u_n}{u_{n-1}} = v_n$!!!!

Exemples : E4 ; $u_n = \frac{(1,1)^n}{n^{100}}$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $u_n = \frac{(2n)!}{n^n}$

3) Suites réelles majorées ou minorées ; suites complexes bornées.

DEF : On dit que la suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$ est

<i>majorée</i>
<i>minorée</i>

 si l'ensemble de ses valeurs est une partie

<i>majorée</i>
<i>minorée</i>

 de \mathbb{R} ,

autrement dit, si

$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq m$
$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq m$

.

REM : d'après le théorème d'existence des bornes supérieures et inférieures dans \mathbb{R} , on peut donc dire que

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est

<i>majorée</i>
<i>minorée</i>

 ssi

$\sup_{n \geq n_0} u_n \in \mathbb{R}$
$\inf_{n \geq n_0} u_n \in \mathbb{R}$

.

Par conséquent :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est

<i>non majorée</i>
<i>non minorée</i>

 ssi

$\forall \dots$
$\forall \dots$

, ssi

$\sup_{n \geq n_0} u_n = +\infty$
$\inf_{n \geq n_0} u_n = -\infty$

.

ATTENTION : une suite non majorée n'est pas forcément croissante, même APCR !!!!

DEF : On dit que la suite complexe $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *bornée* si la suite des modules $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ est majorée.

PROP : une suite réelle est bornée ssi elle est majorée et minorée.

D1

$$E5 : u_n = (-1)^n, v_n = (1+i)^n, w_n = \int_0^1 \sin(nx^2) dx, x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}, y_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

REM : une suite est minorée (resp. majorée, bornée) ssi elle est minorée (resp. majorée, bornée) APCR.

II) SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE (ou RÉCURRENTES).

1) Suites récurrentes simples.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *définie par récurrence simple*, si sa définition est donnée par

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = f_n(u_n) \end{cases}$$

où a est un élément fixé de E et, pour $n \geq n_0$, f_n est une fonction de E dans E .

Exemples : E6.

En général, la récurrence est "indépendante du rang", c'est-à-dire que f_n ne dépend pas de n ; autrement dit :

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où a est un élément fixé de E et f une fonction de E dans E .

Dans ce dernier cas u_n est tout simplement égal à $f^{n-n_0}(u_{n_0}) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n-n_0 \text{ fois}}(u_{n_0})$; si donc deux suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence simple indépendante du rang à partir de la même fonction f prennent la même valeur, elles sont égales à une translation de l'indice près (i.e. si $u_{n_1} = v_{n_2}$ alors $u_{n_1+k} = v_{n_2+k}$ pour $k \geq 0$).

Visualisation d'une suite réelle récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

V1

Attention, si on est sûr que la suite définie ci-dessus est unique, il se peut qu'elle n'existe pas !

Exemple : E7.

Par contre on a la proposition :

PROP et DEF : s'il existe un ensemble I inclus dans D_f tel que $\forall x \in I \quad f(x) \in I$ (autrement dit $f(I) \subset I$) alors dès que

$a \in I$, la suite $\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est bien définie. I , ensemble *stable* par f , est appelé un *ensemble de sécurité* pour cette récurrence.

D2

REM 1 : si $D_f = \mathbb{R}$, alors \mathbb{R} est un intervalle de sécurité !!

REM 2 : si f est monotone sur $I = [a, b]$ alors I est un intervalle de sécurité ssi $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à I .

Etudions les rapports entre les sens de variation de la fonction f et celui des suites récurrentes qui lui sont associées.

On suppose que I est un ensemble de sécurité et que (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

PROP :

1) si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone ; plus précisément,

$$\begin{cases} \text{Si } u_0 \leq u_1 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{Si } u_0 \geq u_1 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

2) si f est décroissante sur I alors (u_n) est telle que les deux suites des termes de rangs pairs et impairs (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires ; plus précisément,

Si $u_0 \leq u_2$ alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante
Si $u_0 \geq u_2$ alors

D3

2) Autres récurrences.

Suite définie par récurrence double :

$$\begin{cases} u_{n_0} = a, u_{(n_0+1)} = b \\ \forall n \geq n_0 \quad u_{n+2} = f_n(u_n, u_{n+1}) \end{cases}$$

où a et b sont deux éléments fixés de E et, pour $n \geq n_0$, f_n est une fonction de E^2 dans E . (ceci se généralisant à des récurrences p -uples).

Exemple classique : la suite de Fibonacci.

Suite définie par récurrence forte :

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = f_n(u_{n_0}, \dots, u_n) \end{cases}$$

où a est un élément fixé de E et, pour $n \geq n_0$, f_n est une fonction de E^{n-n_0+1} dans E .

E8 : la suite de Catalan : $\begin{cases} c_0 = 1 \\ \forall n \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \end{cases}$.

III) CALCULS DE TERMES GÉNÉRAUX

1) Suites arithmétiques.

DEF : une suite complexe $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *arithmétique* si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est constante ; la valeur constante de cette suite est appelée la *raison* de la suite.

Voici diverses CNS :

CNS 1. $\exists r \in \mathbb{C} / \forall n \quad u_{n+1} = u_n + r$
CNS 2. $\forall n \quad u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ (trois termes consécutifs sont toujours en progression arithmétique)
CNS 3. $\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1})$ (chaque terme est la moyenne arithmétique des termes précédent et suivant)
CNS 4. $\forall n \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ (définition par récurrence linéaire double)

D4

REM : une suite arithmétique est définie par récurrence indépendante du rang (avec la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z + r \end{cases}$) ; d'où la représentation dans le cas réel :

R1

Calcul du terme général :

PROP : si (u_n) est arithmétique de raison r , $u_n = u_0 + nr$.

D5

On en déduit une cinquième CNS pour que (u_n) soit arithmétique :

$$\text{CNS 5. } \exists a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \quad u_n = an + b$$

Sommes de termes consécutifs : si (u_n) est arithmétique, $n_1 \leq n_2 \in \mathbb{N}$ et $N = n_2 - n_1 + 1$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = N \cdot \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} = (\text{nombre de termes}) \times (\text{moyenne arithmétique des termes extrêmes})$$

D6

2) Suites géométriques.

DEF : une suite complexe $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *géométrique* (ou *récurrente linéaire simple*) si $\exists r \in \mathbb{C} / \forall n \ u_{n+1} = r u_n$; la valeur r est appelée la *raison* de la suite.

Voici diverses CNS pour une suite à termes non nuls :

CNS 1. la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est constante
CNS 2. $\forall n \ \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (trois termes consécutifs sont toujours en progression géométrique)
CNS 3. $\forall n \geq 1 \ u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1}$

D7

REM étymologique : le mot raison vient du latin *ratio* signifiant "rapport" : étymologiquement donc, seules les raisons de suites géométriques devraient s'appeler "raison"...

REM 2 : la CNS 3 implique que $|u_n| = \sqrt{|u_{n-1}| |u_{n+1}|}$, donc que le module de chaque terme est la moyenne géométrique des modules des termes précédent et suivant.

REM 3 : une suite géométrique est définie par récurrence indépendante du rang (avec la fonction $f : z \mapsto r z$) ; d'où la représentation dans le cas réel :

R2

Calcul du terme général :

PROP : si (u_n) est géométrique de raison r , $u_n = u_0 r^n$.

D8

On en déduit une quatrième CNS pour que (u_n) soit géométrique, valable pour des suites pouvant s'annuler :

$$\text{CNS 4. } \exists \lambda, a \in \mathbb{C} / \forall n \ u_n = \lambda a^n$$

Exemples : E9

Sommes de termes consécutifs : si (u_n) est géométrique de raison $r \neq 1$, $n_1 \leq n_2 \in \mathbb{N}$ et $N = n_2 - n_1 + 1$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = u_{n_1} \cdot \frac{r^N - 1}{r - 1} = (\text{premier terme}) \times \frac{\text{raison}^{\text{nombre de termes}} - 1}{\text{raison} - 1}$$

D9

REM : quand $|r| < 1$, il vaut mieux utiliser la forme : $\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = u_{n_1} \cdot \frac{1 - r^N}{1 - r}$.

3) Suites arithmético-géométriques (ou récurrentes affines simples).

DEF : une suite complexe $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *arithmético-géométrique* (ou *récurrente affine simple*) si $\exists a, b \in \mathbb{C} / \forall n \ u_{n+1} = a u_n + b$.

REM : pour $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques, et pour $b = 0$, les suites géométriques.

Calcul du terme général quand $a \neq 1$:

$$u_n = a^n u_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1} = (u_0 - \lambda) a^n + \lambda \text{ avec } \lambda = a\lambda + b$$

D10

REM : le résultat n'est pas à retenir par coeur, mais il faut connaître les deux méthodes pour l'obtenir ; on peut aussi retenir que $u_n = \alpha \cdot a^n + \beta$ et déterminer α et β à partir de u_0 et u_1 .

4) Suites récurrentes linéaires doubles.

DEF : une suite complexe (u_n) est dite *récurrente linéaire double* si $\exists a, b \in \mathbb{C} / \forall n \ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.

Comme toute suite à récurrence double, la suite est alors entièrement déterminée par ses deux premiers termes u_0 et u_1 .
Exemple : la suite de Fibonacci.

REM : il n'y a aucun espoir d'arriver à calculer le terme général en itérant la relation de récurrence ci-dessus.

Une méthode pour calculer le terme général (ce qu'on appelle : "résoudre la récurrence"), consiste à considérer l'ensemble de toutes les suites vérifiant la relation de récurrence :

$$(1) : \forall n \ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

pour a et b fixés, et de remarquer que :

Lemme 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient (1) alors toutes les suites du type $(\lambda u_n + \mu v_n)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ vérifient aussi (1).

D11

Lemme 2 : une suite géométrique du type (k^n) vérifie (1) ssi

$$E_{\text{car}} : k^2 = ak + b \text{ (équation caractéristique de la récurrence)}$$

D12

On démontre alors le :

THÉORÈME 1 (cas complexe) :

1) Si E_{car} possède deux solutions distinctes k_1 et $k_2 \in \mathbb{C}$, les suites complexes vérifiant (1) sont du type

$$(\lambda k_1^n + \mu k_2^n)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2) Si E_{car} possède une solution unique $k \neq 0 \in \mathbb{C}$, les suites complexes vérifiant (1) sont du type

$$((\lambda n + \mu) k^n)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

D13

Exemples E10 : calculs du terme général de la suite de Fibonacci, de la suite $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2}) \end{cases}$, de la suite $\begin{cases} v_0 = 0, v_1 = 1 \\ v_n = -v_{n-1} - v_{n-2} \end{cases}$.

THÉORÈME 2(cas où a et b sont réels) :

1) Si E_{car} possède deux solutions distinctes k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$, les suites réelles vérifiant (1) sont du type

$$(\lambda k_1^n + \mu k_2^n)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2) Si E_{car} possède une solution unique $k \neq 0 \in \mathbb{R}$, les suites réelles vérifiant (1) sont du type

$$((\lambda n + \mu)k^n)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3) Si E_{car} possède deux solutions distinctes non réelles conjuguées $k = \rho e^{i\theta}$ et \bar{k} , les suites réelles vérifiant (1) sont du type

$$(\rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)))$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

D14

Dans tous les cas, les coefficients λ et μ sont à déterminer à partir des 2 premiers termes de la suite.

B) ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES SUITES NUMÉRIQUES.

Dans ce chapitre, n, n_0, n_1 désigneront toujours des entiers naturels, et ε et A des réels.

I) CONVERGENCE VERS 0.

On rappelle qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n est vraie "à partir d'un certain rang" (APCR) si

$$\exists n_1 / \forall n \geq n_1 P(n)$$

DEF : une suite complexe $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0 (ou "est de limite nulle") si le module de u_n peut être rendu, à partir d'un certain rang, plus petit que tout réel strictement positif donné à l'avance, autrement dit, si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \geq n_0 / \forall n \geq n_1 |u_n| < \varepsilon$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 |u_n| < \varepsilon \text{ APCR}$$

Notations : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, ou $\lim (u_n) = 0$, ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

REM 1 : il faut lire cette définition sous la forme : pour tout epsilon > 0 , aussi petit soit-il, on pourra toujours trouver un rang à partir duquel la suite est majorée par epsilon en valeur absolue. Cette tradition de nommer epsilon un nombre "petit" remonte à Cauchy ; cela vient de ce que pylon signifie *petit* en grec.

REM 2 : dans la définition ci-dessus, le nombre n_1 dépend de ε ; que signifierait en effet pour la suite (u_n) la définition :

$$\exists n_1 \geq n_0 / \forall \varepsilon > 0 \forall n \geq n_1 |u_n| < \varepsilon \text{????}$$

REM 3 : si on modifie un nombre fini de termes de la suite, cela ne changera pas le fait qu'elle converge vers 0 ou non.

REM 4 : $\lim (u_n) = 0$ équivaut à $\lim (|u_n|) = 0$.

Exemples : E1

PROP 1 (théorème d'encadrement, ou "des gendarmes" en 0 pour les suites réelles) : une suite encadrée par deux suites convergeant vers 0 converge elle-même vers 0, autrement dit :

$$\text{si } (H) \left\{ \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ APCR} \\ \lim (v_n) = \lim (w_n) = 0 \end{array} \right. \text{ alors } (C) : \lim (u_n) = 0$$

CORO : une suite complexe dont le module est majoré par une suite convergeant vers 0, converge elle-même vers 0, autrement dit :

$$\text{si } (H) \left\{ \begin{array}{l} |u_n| \leq v_n \text{ APCR} \\ \lim (v_n) = 0 \end{array} \right. \text{ alors } (C) : \lim (u_n) = 0$$

D1

PROP 2 (théorème de limite de somme pour les suites complexes de limite nulle) :

$$\text{si } (H) : \lim (u_n) = \lim (v_n) = 0 \text{ alors } (C) : \lim (u_n + v_n) = 0$$

D2

PROP 3 : une suite complexe converge vers 0 ssi ses partie réelle et imaginaire convergent vers 0.

D3

PROP 4 : (théorème de produit d'une suite complexe de limite nulle et d'une suite bornée) :

$$\text{si } (H) : \left\{ \begin{array}{l} \lim (u_n) = 0 \\ (v_n) \text{ est bornée} \end{array} \right. \text{ alors } (C) : \lim (u_n v_n) = 0$$

D4

CORO :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \lim u_n = 0} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \lim (\lambda u_n) = 0}$$

II) CONVERGENCE VERS UN COMPLEXE QUELCONQUE.

1) Définition et propriétés fondamentales.

DEF : soit l un complexe ; on dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers l (ou "est de limite l ") si la suite $(u_n - l)$ converge vers 0, autrement dit, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \geq n_0 / \forall n \geq n_1 \quad |u_n - l| < \varepsilon}$$

Notations : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, ou $\lim (u_n) = l$, ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

Une suite est dite *convergente* si elle possède une limite complexe, autrement dit si

$$\boxed{\exists l \in \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \geq n_0 / \forall n \geq n_1 \quad |u_n - l| < \varepsilon}$$

Une suite non convergente est dite *divergente*.

REM : lorsqu'on vous demandera d'étudier la "nature" d'une suite, vous devrez chercher à savoir si elle est convergente ou divergente.

PROP 5 (théorème d'unicité de la limite finie) :

Si une suite converge vers l_1 et vers l_2 alors $l_1 = l_2$.

D5

REM : cette propriété justifie la notation fonctionnelle : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

PROP 6 : Une suite complexe est convergente ssi ses partie réelle et imaginaire le sont, et

$$\lim (\operatorname{Re} u_n) = \operatorname{Re} (\lim (u_n)), \quad \lim (\operatorname{Im} u_n) = \operatorname{Im} (\lim (u_n))$$

CORO : une suite convergente réelle a une limite réelle.

D6

PROP 7 (théorème d'encadrement, ou "des gendarmes" pour les suites réelles) :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} \left\{ \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ APCR} \\ \lim (v_n) = \lim (w_n) = l \in \mathbb{R} \end{array} \right.} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lim (u_n) = l}$$

D7

PROP 8 (théorème de limite de somme pour les suites complexes) :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \left\{ \begin{array}{l} \lim (u_n) = l_1 \in \mathbb{C} \\ \lim (v_n) = l_2 \in \mathbb{C} \end{array} \right.} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lim (u_n + v_n) = l_1 + l_2}$$

D8

PROP 9 : une suite convergente est bornée.

D9

PROP 10 : (théorème de limite de produit pour les suites complexes) :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \left\{ \begin{array}{l} \lim (u_n) = l_1 \in \mathbb{C} \\ \lim (v_n) = l_2 \in \mathbb{C} \end{array} \right.} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lim (u_n v_n) = l_1 l_2}$$

D10

CORO :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \lim u_n = l \in \mathbb{C}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \lim (\lambda u_n) = \lambda l}$$

PROP 11 : (théorème de limite de l'inverse d'une suite complexe de limite non nulle) :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \lim u_n = l \neq 0 \in \mathbb{C}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \begin{cases} 1. |u_n| \text{ est, APCR, minoré par un réel strictement positif} \\ \text{(donc il existe } n_1 \text{ tel que } \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1} \text{ est bien définie)} \\ 2. \lim \left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{l} \end{cases}}$$

D11

CORO (de PROP 10 et 11) :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \begin{cases} \lim (u_n) = l_1 \in \mathbb{C} \\ \lim (v_n) = l_2 \neq 0 \in \mathbb{C} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{l_1}{l_2}}$$

D12

ATTENTION, ON NE PEUT DONC ÉCRIRE :

$$\boxed{\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n ; \lim (u_n v_n) = \lim u_n \lim v_n ; \lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}}$$

QUE SI ON SAIT DÉJÀ QUE (u_n) et (v_n) SONT CONVERGENTES.

PROP 12 (théorème de conservation des inégalités LARGES par passage à la limite finie, pour les suites réelles)

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \begin{cases} u_n \leq v_n \text{ APCR} \\ \lim (u_n) = l_1 \in \mathbb{R} ; \lim (v_n) = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : l_1 \leq l_2}$$

D13

REM : Ce théorème n'est pas à confondre avec celui des gendarmes ; sa conclusion est une inégalité alors que pour celui des gendarmes, c'est une convergence. Il ne faut pas non plus le confondre avec le théorème FAUX que les élèves adorent :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : u_n \leq v_n \text{ APCR}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lim u_n \leq \lim v_n}$$

En effet, une suite n'a pas forcément de limite (voir plus loin).

2) Sous-suites.

DEF : une suite $(v_n)_{n \geq n_1}$ est une *sous-suite* (ou *suite extraite*) d'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ s'il existe une application φ strictement croissante de $\llbracket n_1, +\infty \llbracket$ dans $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ telle que $\forall n \geq n_1 \quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

Autrement dit, une sous-suite est obtenue en supprimant des termes dans la suite de sorte qu'il en reste encore une infinité, et en renumérotant les termes restants à partir de n_1 .

Exemples classiques de sous-suites de $(u_n)_{n \geq n_0}$:

- la sous-suite des termes de rang pair : $(u_{2n})_{n \geq \overline{E}(n_0/2)}$.
- la sous-suite des termes de rang impair : $(u_{2n+1})_{n \geq \overline{E}((n_0-1)/2)}$.
- la sous-suite tronquée de ses p premiers termes : $(u_n)_{n \geq n_0+p}$
- la même, translatée de façon à commencer au rang 0 : $(u_{n+p+n_0})_{n \geq 0}$

TH : toute sous-suite d'une suite convergente est convergente, de même limite.

D14

CORO : une suite possédant deux sous-suites convergentes vers des limites différentes est divergente.

Exemple : E2

III) SUITES AYANT UNE LIMITE INFINIE.

Ce paragraphe ne concerne que les suites réelles.

DEF : une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tend vers $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ si

$$\forall A > 0 \exists n_1 \geq n_0 / \forall n \geq n_1 \begin{cases} u_n > A \\ u_n < -A \end{cases}$$

Notations : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, ou $\lim(u_n) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$.

REM : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$.

PROP 13 : une suite de limite $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ est $\begin{cases} \text{non majorée (i.e. } \sup_{n \geq n_0} u_n = +\infty) \\ \text{non minorée (i.e. } \inf_{n \geq n_0} u_n = -\infty) \end{cases}$, mais la réciproque est fausse.

D14 bis

Une suite de limite infinie est donc divergente ; on dit par conséquent : "diverger vers $+\infty$ ".

Une suite de limite infinie est dite "divergente de première espèce" ; les autres suites divergentes sont dites "divergentes de deuxième espèce".

PROP 14 (théorème *du gendarme* pour une suite de limite infinie) :

Une suite réelle $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \end{cases}$ APCR par une suite de limite $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ est elle-même de limite $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$.

D15

PROP 15 (limite infinie d'une somme ou d'un produit de suites réelles) :

si u_n	et si (v_n)	alors $u_n + v_n$	alors $u_n v_n$
$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$	est minorée	$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$???
$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$	est minorée par un réel > 0	$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$	$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$	est majorée	$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$???
$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$	est minorée par un réel > 0	???	$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

D16

REM : la condition " (v_n) minorée" est réalisée dès qu'elle possède une limite $\in]-\infty, +\infty]$, et la condition " (v_n) minorée par un réel > 0 " est réalisée dès qu'elle possède une limite $\in]0, +\infty]$.

PROP 16 (limite de l'inverse) : si u_n est $\neq 0$ APCR, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|u_n|} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow u_n > 0 \text{ APCR et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

D17

PROP 17 (théorème des limites des sous-suites) :

Toute sous-suite d'une suite réelle ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, a la même limite.

D18

Une suite ayant deux sous-suites ayant des limites distinctes est donc divergente de deuxième espèce.

REM (hors programme) : une limite d'une sous-suite s'appelle une "valeur d'adhérence" de la suite.

Exemple E3 : détermination de nature de la suite (a^n) suivant les valeurs de $a \in \mathbb{C}$.

IV) SUITES MONOTONES, SUITES ADJACENTES.

1) Suites monotones.

TH (de la limite monotone pour les suites) : toute suite monotone APCR possède une limite, finie ou infinie ; plus précisément :

une suite croissante APCR majorée est convergente.

une suite croissante APCR non majorée tend vers $+\infty$.

une suite décroissante APCR minorée est convergente.

une suite décroissante APCR non minorée tend vers $-\infty$.

De plus, si $(u_n)_{n \geq n_1}$ est croissante $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \geq n_1} u_n$, et si $(u_n)_{n \geq n_1}$ est décroissante $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \geq n_1} u_n$.

D19

Exemples E4:

- une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ avec $u_n = \sum_{k=n_0}^n v_k$, et $v_k \geq 0$ pour $k \geq n_0$, possède toujours une limite $\in [v_{n_0}, +\infty]$.

- Les séries géométriques $\sum_{k=0}^n \frac{1}{x^k}$ ($x > 0$) sont convergentes de limite..... pour $x > 1$, et divergentes pour $0 < x \leq 1$.

- la série *harmonique* (h_n) avec $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est divergente.

Démonstration 1 : utilisant le fait que

$$h_{2n} \geq h_n + 1/2$$

Démonstration 2 : utilisant l'encadrement

$$\ln n \leq h_n \leq \ln n + 1$$

- la suite (d_n) avec $d_n = h_n - \ln n$

On en déduit le développement : $\boxed{h_n = \ln n + \gamma + \frac{\varepsilon_n}{\rightarrow 0}}$ où $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n =$ "constante d'Euler" $\simeq 0,577$.

- la série *quadratique* (q_n) avec $q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est convergente, de limite ≤ 2 (on démontrera que cette limite est $\pi^2/6$).

- on en déduit que la série de Riemann (s_n) avec $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ est divergente si $\alpha \leq 1$ et convergente si $\alpha \geq 2$.

2) Suites adjacentes.

DEF : on dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si

1. (u_n) et (v_n) sont, APCR, monotones de sens contraires.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

ATTENTION : NE PAS FAIRE L'ERREUR DE REMPLACER 2. PAR LA DÉFINITION ne présentant aucun intérêt :

$$2' : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

TH des suites adjacentes : deux suites adjacentes sont convergentes de même limite l ; de plus, on a à partir du rang où les deux suites sont monotones :

$$\boxed{l \in [u_n, v_n]}$$

D20

L'intérêt des suites adjacentes est donc double :

- 1 : prouver une convergence.
2 : obtenir un encadrement de la limite.

Exemple E5 :

- Les suites (e_n) et $(e'_n)_{n \geq 1}$ avec $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $e'_n = e_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

On démontrera ultérieurement que la limite commune est le nombre $e = \exp(1)$; ceci permet donc d'obtenir une valeur approchée de e avec la précision que l'on veut.

Pour calculer e_n il est beaucoup plus rapide de le mettre sous la forme de Horner (voir tp d'info) :

$$e_n = 2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \dots \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \dots \right) \right) \right)$$

On peut aussi en déduire le :

TH : le nombre e est irrationnel.

D21

Le théorème des suites adjacentes permet aussi de démontrer deux théorèmes importants :

TH (de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles) :

De toute suite réelle bornée, on peut toujours extraire une sous-suite convergente.

D22

TH : si A est une partie dénombrable de \mathbb{R} , on peut toujours trouver entre deux réels distincts un élément qui n'appartient pas à A . On en déduit que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

D23

V) COMPARAISON DES SUITES À L'INFINI.

1) Suite négligeable devant une autre.

a) Définitions.

DEF : soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes ; on dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) , ou que (v_n) l'*emporte* sur (u_n) , s'il existe une suite (ε_n) , telle que, APCR,

$$u_n = \varepsilon_n v_n \text{ avec } \lim(\varepsilon_n) = 0$$

NOTATIONS :

-de Hardy, en "double inférieur" : $(u_n) \ll_{+\infty} (v_n)$ ou $u_n \ll_{n \rightarrow +\infty} v_n$, simplifiées en $(u_n) \ll (v_n)$ ou $u_n \ll v_n$.

MAIS NE PAS DIRE : u_n est très inférieur à v_n .

- de Landau : $u_n = o(v_n)$, à lire " u_n est un petit o de v_n " et à comprendre comme : " u_n est l'un des petits o de v_n ", autrement dit que (u_n) est l'une des suites négligeable devant (v_n) (il n'y en pas qu'une !). Le o est ici l'initiale du mot ordre.

REM : si u_n et v_n sont non nuls APCR, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$u_n \ll v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ ou encore : } \left| \frac{v_n}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Exemples E6.

b) Propriétés de la relation de négligeabilité :

P1 :

$$u_n \ll v_n \Leftrightarrow |u_n| \ll |v_n|$$

d'où :

$$o(u_n) = o(|u_n|)$$

D24

P2 :

$$u_n = o(1) \text{ (ou } u_n \ll 1) \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

D25

P3 :

$$\text{si } (H) : \begin{cases} u_n = v_n + o(v_n) \\ \lim v_n = l \end{cases} \text{ alors } (C) : \lim u_n = l$$

autrement dit

$$\text{si } (H) : \begin{cases} u_n = v_n + w_n \text{ avec } w_n \ll v_n \\ \lim v_n = l \end{cases} \text{ alors } (C) : \lim u_n = l$$

D26

P4 transitivité :

$$o(o(u_n)) = o(u_n)$$

autrement dit :

$$\text{si } (H) : w_n \ll v_n \text{ et } v_n \ll u_n \text{ alors } (C) : w_n \ll u_n$$

Remarquer la concision de la notation de Landau !

D27

P5 : Comparaison entre $<$ et \ll (suites réelles)

1. $u_n < v_n$ APCR $\not\Rightarrow u_n \ll_{n \rightarrow +\infty} v_n$
2. $u_n \ll_{n \rightarrow +\infty} v_n \not\Rightarrow u_n < v_n$, même APCR
3. Par contre : $u_n \ll_{n \rightarrow +\infty} v_n \Rightarrow u_n \leq v_n $ APCR

D28

P6 : Multiplicativité 1:

$$\lambda_n \cdot o(u_n) = o(\lambda_n u_n)$$

autrement dit :

$$\text{si } (H) : v_n \ll u_n \text{ alors } (C) : \lambda_n v_n \ll \lambda_n u_n$$

P6' : Multiplicativité 2:

$$o(\lambda_n u_n) = \lambda_n \cdot o(u_n)$$

autrement dit :

$$\text{si } (H) : v_n \ll \lambda_n u_n \text{ alors } (C) : v_n = \lambda_n w_n \text{ avec } w_n \ll u_n$$

D29

P7 : compatibilité avec la somme :

$$o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$$

autrement dit :

$$\text{si } (H) : v_n \text{ et } w_n \ll u_n \text{ alors } (C) : v_n + w_n \ll u_n$$

D30

On en déduit, que si dans une somme, un terme l'emporte sur les autres, il l'emporte sur la somme des autres, et que donc, d'après P3, la limite de la somme est la limite de ce terme.

P8 : Si (λ_n) est une suite bornée (en particulier, constante), alors

$$\boxed{\lambda_n o(u_n) = o(u_n) \text{ et } o(\lambda_n u_n) = o(u_n)}$$

autrement dit :

$$\begin{aligned} \text{si } \boxed{(H) : v_n \ll u_n} & \text{ alors } \boxed{(C) : \lambda_n v_n \ll u_n} \\ \text{et si } \boxed{(H) : v_n \ll \lambda_n u_n} & \text{ alors } \boxed{(C) : v_n \ll u_n} \end{aligned}$$

On en déduit le paradoxe :

$$\boxed{o(u_n) - o(u_n) = o(u_n)} \text{ et non } 0 \text{ !!!!!}$$

D31

P9 :

$$\begin{aligned} \text{si } u_n \text{ et } v_n & \neq 0 \text{ APCR, alors } \boxed{u_n \ll v_n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{v_n} \ll \frac{1}{u_n}} \\ \text{si } u_n \text{ et } v_n & > 0 \text{ APCR, alors } \boxed{u_n \ll v_n} \Leftrightarrow \boxed{(u_n)^\alpha \ll (v_n)^\alpha} \text{ si } \alpha > 0 \end{aligned}$$

D32

c) Exemples classiques à bien connaître.

1. si $\alpha < \beta$ $n^\alpha \ll_{n \rightarrow +\infty} n^\beta$, soit $n^\alpha = o(n^\beta)$
2. si $\alpha > 0$ $\ln n \ll_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha$ soit $\ln n = o(n^\alpha)$
2'. mieux : si $\beta > 0$ $(\ln n)^\alpha \ll_{n \rightarrow +\infty} n^\beta$ soit $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$ ceci $\forall \alpha$
2''. encore mieux : si $\alpha < \beta$ $n^\alpha (\ln n)^\gamma \ll_{n \rightarrow +\infty} n^\beta (\ln n)^\delta$ ceci $\forall \gamma, \delta$
3. si $ b > a > 1$ $n^\alpha \ll_{n \rightarrow +\infty} a^n \ll_{n \rightarrow +\infty} b^n$ ceci $\forall \alpha$
4. $a^n \ll_{n \rightarrow +\infty} n!$ ceci $\forall a$
5. $n! \ll_{n \rightarrow +\infty} n^n \ll_{n \rightarrow +\infty} (2n)!$

D33

LEMME : si (u_n) est à termes > 0 et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$.

2) Suites équivalentes.

a) Définitions.

DEF : soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes ; on dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) (à l'infini), s'il existe une suite (a_n) , telle que, APCR,

$$\boxed{u_n = a_n v_n, \text{ avec } \lim(a_n) = 1}$$

NOTATION : $(u_n) \underset{+\infty}{\sim} (v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, simplifiées en $(u_n) \sim (v_n)$ ou $u_n \sim v_n$.

REM1 : si u_n et v_n sont non nuls APCR, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

REM 2 : on peut aussi écrire la définition sous les formes très utiles :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \boxed{u_n = (1 + o(1)) v_n} \Leftrightarrow \boxed{u_n = v_n + o(v_n)} \Leftrightarrow \boxed{u_n - v_n = o(v_n)}}$$

Exemples E7.

b) Propriétés.

P10 : la relation d'équivalence des suites est réflexive, symétrique, et transitive (c'est donc une relation ... d'équivalence (!)).

D34

On en déduit : $u_n - v_n = o(v_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = o(u_n)$: deux suites sont équivalentes si leur différence est négligeable devant l'une d'entre-elles.

P11 :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } l \neq 0, u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} l \Leftrightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} l \\ \text{par contre, } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0 \Leftrightarrow u_n = 0 \text{ APCR} \end{array}}$$

D35

P12 :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \begin{cases} u_n \sim v_n \\ \lim v_n = l \end{cases}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lim u_n = l}$$

REM : ceci est exactement la propriété P3 !!!!!

NE PAS ÉCRIRE DES INSANITÉS DU STYLE : $\lim u_n \sim \lim v_n$.

P13 : Multiplicativité

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : u_n \sim v_n} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lambda_n u_n \sim \lambda_n v_n}$$

d'où

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \begin{cases} u_n \sim u'_n \\ v_n \sim v'_n \end{cases}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : u_n v_n \sim u'_n v'_n}$$

D36

P14 :

$$\text{si } \begin{cases} u_n \text{ et } v_n \neq 0 \text{ APCR et } \alpha \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } u_n \text{ et } v_n > 0 \text{ APCR et } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ alors } \boxed{u_n \sim v_n} \Leftrightarrow \boxed{(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \text{en particulier : } \boxed{\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}}$$

ATTENTION : ici α ne DÉPEND PAS de n !!!!!

D37

PAR CONTRE LES TENTATIONS SUIVANTES SONT **FAUSSES** EN GÉNÉRAL :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : u_n \sim v_n} \text{ alors } \boxed{f(u_n) \sim f(v_n)}$$

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : u_n \sim u'_n} \text{ alors } \boxed{u_n + v_n \sim u'_n + v_n}$$

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : u_n \sim v_n} \text{ alors } \boxed{u_n - v_n \rightarrow 0}$$

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : u_n - v_n \rightarrow 0} \text{ alors } \boxed{u_n \sim v_n}$$

D38

QUE FAIRE EN FACE D'UNE SOMME ?

$$\text{si } \boxed{u_n \ll v_n} \text{ alors } (u_n + v_n) \sim v_n$$

Autrement dit si l'une l'emporte sur l'autre; l'équivalent c'est celui qui l'emporte

si $u_n \sim \lambda a_n$ et $v_n \sim \mu a_n$ alors $(u_n + v_n) \sim (\lambda + \mu) a_n$ SAUF SI $\lambda + \mu = 0$
 dans ce dernier cas il faut développer u_n et v_n avec au moins deux termes.

P15 (théorème des gendarmes pour les équivalents, cas des suites réelles) :

$$\text{si (H) } \left\{ \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ APCR} \\ v_n \sim a_n \text{ et } w_n \sim a_n \end{array} \right. \text{ alors (C) : } u_n \sim a_n$$

D39

Application : $h_n \sim \ln n$.

P16 (remplacement dans un petit o d'une suite par une suite équivalente)

$$\text{si (H) } u_n \sim v_n \text{ alors (C) : } o(u_n) = o(v_n)$$

D40

c) Équivalents classiques.

- un polynôme en n est équivalent à son monôme de plus haut degré :

$$\sum_{k=0}^p a_k n^k \sim a_p n^p \text{ si } a_p \neq 0$$

- plus généralement :

$$\sum_{k=1}^p a_k n^{\alpha_k} (\ln n)^{\beta_k} \sim a_p n^{\alpha_p} (\ln n)^{\beta_p} \text{ si } \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p \text{ et } a_p \neq 0$$

D41

Exemples E8 :

$1 + 2 + \dots + n \sim$	
$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \sim$	
$\binom{n}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$	(avec p fixé)

- si $\lim \varepsilon_n = 0$

$$\sin \varepsilon_n \sim \tan \varepsilon_n \sim \ln(1 + \varepsilon_n) \sim e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \text{sh } \varepsilon_n \sim \boxed{\varepsilon_n}$$

D42

- (Hors programme) la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

- (Hors programme) l'équivalent du n -ième nombre premier :

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln n$$

Autres exemples E9.

3) Suite dominée par une autre.

DEF : soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes ; on dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) , s'il existe une suite (b_n) , telle que APCR,

$$u_n = b_n v_n \text{ avec } (b_n) \text{ bornée}$$

NOTATIONS :

De Hardy : $u_n \leq v_n$ (très peu utilisée : grand risque de confusion avec \leq)

de Landau : $u_n = O(v_n)$, à lire " u_n est un grand O de v_n " et à comprendre comme : " u_n est l'un des grands O de v_n ", autrement dit que (u_n) est l'une des suites dominée par (v_n) .

REM 1: si u_n et v_n sont non nuls APCR, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right) \text{ est majorée}$$

REM 2 : l'expression "dominée par" est assez malheureuse ; en effet (3) est dominée par (2), (n) est dominée par $\left(\frac{n}{2}\right)$; on emploie parfois l'expression : (u_n) est "au plus de l'ordre de" (v_n) .

D'ailleurs lorsque $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \text{et } v_n = O(u_n) \end{cases}$, on dit que (u_n) et (v_n) sont "du même ordre", et cette relation est parfois notée $u_n = \Theta(v_n)$.

Exemples E10.

PROP : si $u_n \sim \lambda v_n$ avec $\lambda \neq 0$, alors (u_n) et (v_n) sont du même ordre, mais la réciproque est fausse.