A) ÉTUDE ALGÉBRIQUE DES SUITES NUMÉRIQUES.

I) GÉNÉRALITÉS

1) Définition.

DEF : une suite d'éléments d'un ensemble E est une fonction de $\mathbb{N}$ vers E dont l'ensemble de définition est du type $[|n_0, +\infty|[$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$; si $E = \mathbb{R}$, on parle de suite *réelle*, et si $E = \mathbb{C}$, de suite *complexe*, ou *numérique*.

Au lieu de la notation fonctionnelle : $u(n)$, on utilise une notation indicielle : u_n ; u_n est appelé le *terme général* de la suite, et la suite est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, voire (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Il ne faut donc pas confondre " u_n " qui est un élément de E et : " (u_n) " qui est une fonction de de $\mathbb{N}$ vers E.

Exemple : $(u_n) = (v_n)$ signifie : ....
et $(u_n) \neq (v_n)$ signifie : ....

2) Sens de variation d'une suite réelle.

a) DEF : soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle ; on dit que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est

croissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
strictement croissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n < u_{n+1}$
décroissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant u_{n+1}$
strictement décroissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n > u_{n+1}$
monotone ssi	$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante ou décroissante
strictement monotone ssi	$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante ou strictement décroissante
constante (ou stationnaire) ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = u_{n+1}$

Remarque 1: il se peut que le sens de variation d'une suite ne soit stable qu'à partir d'un indice supérieur à n_0 ; si donc n_1 est un entier $\geqslant n_0$, on dira que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *croissante à partir* de n_1 si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ est croissante (idem pour les autres définitions). On a donc :

$$(u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est } \textit{croissante à partir d'un certain rang} \text{ (APCR)} \Leftrightarrow \exists n_1 \geqslant n_0 \ \forall\, n \geqslant n_1 \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$

Et donc :
$(u_n)_{n\geqslant n_0}$*n'est croissante à partir d'aucun rang* $\Leftrightarrow$ ...
Ceci équivaut à ce qu'il existe une infinité de n pour lesquels $u_n > u_{n+1}$.

Exemples E1 : $u_n = (n-10)^2$, $u_n = (-1)^n$.

Remarque 2 : (u_n) est décroissante ssi $(-u_n)$ est croissante (idem pour strictement).
Remarque 3 : (u_n) est constante ssi (u_n) est croissante et décroissante, ssi $\exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \geqslant n_0 \ \ u_n = a$.

b) Diverses méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite numérique.

α) Se ramener à l'étude d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ceci n'est possible que si on trouve une fonction f définie sur $[n_0, +\infty[$,telle que pour n entier $\geqslant n_0$, $u_n = f(n)$, et que le sens de variation de f soit facile à déterminer ; (u_n) a alors même sens de variation que f.

Exemple E2 : $u_n = \dfrac{n}{\ln n}$.

β) Méthode $u_{n+1} - u_n$.

Cette méthode marche bien quand u_n est défini par des sommes.
Si l'on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$, on a évidemment : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est

croissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n \geqslant 0$
strictement croissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n > 0$
décroissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n \leqslant 0$
strictement décroissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n < 0$
constante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n = 0$

(Remarquer la similitude avec les dérivées pour les fonctions).

Variante : on peut prendre $u_n - u_{n-1}$ au lieu de $u_{n+1} - u_n$; le signe est alors à vérifier à partir du rang $n_0 + 1$.

Remarque : si $u_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$, alors $u_n - u_{n-1} = v_n$!!!!!

Exemples E3 : $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (appelée série harmonique); $u_n = h_{2n} - h_n$.

γ) Méthode $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Cette méthode marche bien quand u_n est défini par des produits, et de signe constant.
Si donc $\boxed{u_n > 0 \text{ pour tout } n \geqslant n_0}$, et si l'on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on a évidemment : $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est

croissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n \geqslant 1$
strictement croissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n > 1$
décroissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n \leqslant 1$
strictement décroissante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n < 1$
constante ssi	$\forall n \geqslant n_0 \quad v_n = 1$

Variante : on peut prendre $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ au lieu de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; la position par rapport à 1 est alors à vérifier à partir du rang $n_0 + 1$.

Remarque : si $u_n = \prod\limits_{k=n_0}^{n} v_k$, alors $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = v_n$!!!!!

Exemples : E4 ; $u_n = \dfrac{(1,1)^n}{n^{100}}, u_n = \dfrac{n!}{n^n}, u_n = \dfrac{(2n)!}{n^n}$

3) Suites réelles majorées ou minorées ; suites complexes bornées.

DEF : On dit que la suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est $\begin{array}{|c|}\hline \textit{majorée} \\ \hline \textit{minorée} \\ \hline\end{array}$ si l'ensemble de ses valeurs est une partie $\begin{array}{|c|}\hline \text{majorée} \\ \hline \text{minorée} \\ \hline\end{array}$ de $\mathbb{R}$,
autrement dit, si $\begin{array}{|c|}\hline \exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant m \\ \hline \exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant m \\ \hline\end{array}$.

REM : d'après le théorème d'existence des bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$, on peut donc dire que
$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est $\begin{array}{|c|}\hline \text{majorée} \\ \hline \text{minorée} \\ \hline\end{array}$ ssi $\begin{array}{|c|}\hline \sup\limits_{n \geqslant n_0} u_n \in \mathbb{R} \\ \hline \inf\limits_{n \geqslant n_0} u_n \in \mathbb{R} \\ \hline\end{array}$.
Par conséquent :

$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est $\begin{array}{|c|}\hline \text{non majorée} \\ \hline \text{non minorée} \\ \hline\end{array}$ ssi $\begin{array}{|c|}\hline \forall \text{..} \\ \hline \forall \text{..} \\ \hline\end{array}$, ssi $\begin{array}{|c|}\hline \sup\limits_{n \geqslant n_0} u_n = +\infty \\ \hline \inf\limits_{n \geqslant n_0} u_n = -\infty \\ \hline\end{array}$.

ATTENTION : une suite non majorée n'est pas forcément croissante, même APCR !!!!
DEF : On dit que la suite complexe $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est *bornée* si la suite des modules $(|u|_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée.

PROP : une suite réelle est bornée ssi elle est majorée et minorée.

D1

E5 : $u_n = (-1)^n$, $v_n = (1+i)^n$, $w_n = \int_0^1 \sin\left(nx^2\right) dx$, $x_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{2^k}$, $y_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.
REM : une suite est minorée (resp. majorée, bornée) ssi elle est minorée (resp. majorée, bornée) APCR.

II) SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE (ou RÉCURRENTES).

1)Suites récurrentes simples.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est *définie par récurrence simple*, si sa définition est donnée par

$$\left\{\begin{array}{|l|}\hline u_{n_0} = a \\ \hline \forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} = f_n(u_n) \\ \hline \end{array}\right.$$

où a est un élément fixé de E et, pour $n \geqslant n_0$, f_n est une fonction de E dans E.

Exemples : E6.

En général, la récurrence est "indépendante du rang", c'est-à-dire que f_n ne dépend pas de n ; autrement dit :

$$\left\{\begin{array}{|l|}\hline u_{n_0} = a \\ \hline \forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ \hline \end{array}\right.$$

où a est un élément fixé de E et f une fonction de E dans E.

Dans ce dernier cas u_n est tout simplement égal à $f^{n-n_0}(u_{n_0}) = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n-n_0 \text{ fois}}(u_{n_0})$; si donc deux suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence simple indépendante du rang à partir de la même fonction f prennent la même valeur, elles sont égales à une translation de l'indice près (i.e. si $u_{n_1} = v_{n_2}$ alors $u_{n_1+k} = v_{n_2+k}$ pour $k \geqslant 0$).

Visualisation d'une suite réelle récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

V1

Attention, si on est sûr que la suite définie ci-dessus est unique, il se peut qu'elle n'existe pas !
Exemple : E7.

Par contre on a la proposition :

PROP et DEF : s'il existe un ensemble I inclus dans D_f tel que $\forall x \in I \quad f(x) \in I$ (autrement dit $f(I) \subset I$) alors dès que $a \in I$, la suite $\left\{\begin{array}{|l|}\hline u_{n_0} = a \\ \hline \forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ \hline \end{array}\right.$ est bien définie. I, ensemble *stable* par f, est appelé un *ensemble de sécurité* pour cette récurrence.

D2

REM 1 : si $D_f = \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}$ est un intervalle de sécurité !!
REM 2 : si f est monotone sur $I = [a,b]$ alors I est un intervalle de sécurité ssi $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à I.

Etudions les rapports entre le sens de variation de la suite (u_n) et les propriétés de la fonction f .

On suppose que I est un ensemble de sécurité et que (u_n) est définie par $\left\{\begin{array}{|l|}\hline u_0 = a \in I \\ \hline \forall n \geqslant 0 \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ \hline \end{array}\right.$
PROP :
1) si $f(x) \geqslant x$ pour tout x dans I, (u_n) est croissante.
1') si $f(x) \leqslant x$ pour tout x dans I, (u_n) est croissante.

2) si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone ; plus précisément,

Si $u_0 \leqslant u_1$ alors (u_n) est croissante
Si $u_0 \geqslant u_1$ alors (u_n) est décroissante

2') si f est décroissante sur I alors (u_n) est telle que les deux suites des termes de rangs pairs et impairs (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires ; plus précisément,

Si $u_0 \leqslant u_2$ alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante
Si $u_0 \geqslant u_2$ alors

D3

2) Autres récurrences.

Suite définie par récurrence double :

$$\left\{\begin{array}{|l|}\hline u_{n_0} = a,\ u_{(n_0+1)} = b \\ \hline \forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+2} = f_n\left(u_n, u_{n+1}\right) \\ \hline\end{array}\right.$$

où a et b sont deux éléments fixés de E et, pour $n \geqslant n_0, f_n$ est une fonction de E^2 dans E.
(ceci se généralisant à des récurrences p-uples).

Exemple classique : la suite de Fibonacci.

Suite définie par récurrence forte :

$$\left\{\begin{array}{|l|}\hline u_{n_0} = a \\ \hline \forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} = f_n\left(u_{n_0}, ..., u_n\right) \\ \hline\end{array}\right.$$

où a est un élément fixé de E et, pour $n \geqslant n_0, f_n$ est une fonction de E^{n-n_0+1} dans E.

E8 : la suite de Catalan : $\left\{\begin{array}{|l|}\hline c_0 = 1 \\ \hline \forall n \quad c_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \\ \hline\end{array}\right.$.

III) CALCULS DE TERMES GÉNÉRAUX

1) Suites arithmétiques.

DEF : une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *arithmétique* si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante ; la valeur constante de cette suite est appelée la *raison* de la suite.

Voici diverses CNS :

CNS 1. $\exists r \in \mathbb{C}\ / \forall n \geqslant 0\ \ u_{n+1} = u_n + r$
CNS 2. $\forall n \geqslant 0\ \ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ (trois termes consécutifs sont toujours en progression arithmétique)
CNS 3. $\forall n \geqslant 1\ \ u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + u_{n+1}\right)$ (chaque terme est la moyenne arithmétique des termes précédent et suivant)
CNS 4. $\forall n \geqslant 0\ \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ (définition par récurrence linéaire double)

D4

REM : une suite arithmétique est définie par récurrence indépendante du rang (avec la fonction $f : \left\{\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + r\end{array}\right.$) ; d'où la représentation dans le cas réel :

R1

Calcul du terme général :

PROP : si (u_n) est arithmétique de raison r, $\boxed{\forall n \geqslant 0 \ \ u_n = u_0 + nr}$.
D5

On en déduit une cinquième CNS pour que (u_n) soit arithmétique :

$$\boxed{\text{CNS 5. } \exists a, b \in \mathbb{C} \ \ \forall n \ \ u_n = an + b}$$

Sommes de termes consécutifs : si (u_n) est arithmétique, $n_1 \leqslant n_2 \in \mathbb{N}$ et $N = n_2 - n_1 + 1$

$$\boxed{\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = N.\frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} = \text{(nombre de termes)} \times \text{(moyenne arithmétique des termes extrêmes)}}$$

D6
2) Suites géométriques.

DEF : une suite complexe $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est dite *géométrique* (ou *récurrente linéaire simple*) si $\exists r \in \mathbb{C} \ / \ \forall n \geqslant 0 \ \ u_{n+1} = r\, u_n$; la valeur r est appelée la *raison* de la suite.
Voici diverses CNS pour une suite à termes non nuls :

CNS 1. la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geqslant 0}$ est constante
CNS 2. $\forall n \geqslant 0 \ \ \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (trois termes consécutifs sont toujours en progression géométrique)
CNS 3. $\forall n \geqslant 1 \ \ u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1}$

D7
REM étymologique : le mot raison vient du latin *ratio* signifiant "rapport" : étymologiquement donc, seules les raisons de suites géométriques devraient s'appeler "raison"...

REM 2 : la CNS 3 implique que $|u_n| = \sqrt{|u_{n-1}|\,|u_{n+1}|}$, donc que le module de chaque terme est la moyenne géométrique des modules des termes précédent et suivant.
REM 3 : une suite géométrique est définie par récurrence indépendante du rang (avec la fonction $f : z \mapsto r\ z$) ; d'où la représentation dans le cas réel :

R2

Calcul du terme général :
PROP : si (u_n) est géométrique de raison r, $\boxed{u_n = u_0 r^n}$.
D8

On en déduit une quatrième CNS pour que (u_n) soit géométrique, valable pour des suites pouvant s'annuler :

$$\boxed{\text{CNS 4. } \exists \lambda, a \in \mathbb{C} \ / \ \forall n \geqslant 0 \ \ u_n = \lambda a^n}$$

Exemples : E9

Sommes de termes consécutifs : si (u_n) est géométrique de raison $r \boxed{\neq 1}$, $n_1 \leqslant n_2 \in \mathbb{N}$ et $N = n_2 - n_1 + 1$

$$\boxed{\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = u_{n_1}.\frac{r^N - 1}{r - 1} = \text{(premier terme)} \times \frac{\text{raison}^{\text{nombre de termes}} - 1}{\text{raison} - 1}}$$

D9
REM : quand $|r| < 1$, il vaut mieux utiliser la forme : $\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} u_k = u_{n_1}.\dfrac{1 - r^N}{1 - r}$.

3) Suites arithmético-géométriques (ou récurrentes affines simples).

DEF : une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *arithmético-géométrique* (ou *récurrente affine simple*) si $\exists a, b \in \mathbb{C}\ /\ \forall n\ \ u_{n+1} = a\ u_n\ + b$.

REM : pour $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques, et pour $b = 0$, les suites géométriques.

Calcul du terme général quand $\boxed{a \neq 1}$:

$$\boxed{u_n = a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1} = (u_0 - \lambda)\, a^n + \lambda \text{ avec } \lambda = a\lambda + b}$$

D10

REM : le résultat n'est pas à retenir par coeur, mais il faut connaître les deux méthodes pour l'obtenir ; on peut aussi retenir que $u_n = \alpha.a^n + \beta$ et déterminer α et β à partir de u_0 et u_1.

4) Suites récurrentes linéaires doubles.

DEF : une suite complexe (u_n) est dite *récurrente linéaire double* si $\exists a, b \in \mathbb{C}\ /\ \forall n\ \ u_{n+2} = a\ u_{n+1}\ + bu_n$.

Comme toute suite à récurrence double, la suite est alors entièrement déterminée par ses deux premiers termes u_0 et u_1.
Exemple : la suite de Fibonacci.

REM : il n'y a aucun espoir d'arriver à calculer le terme général en itérant la relation de récurrence ci-dessus.

Une méthode pour calculer le terme général (ce qu'on appelle : "résoudre la récurrence"), consiste à considérer l'ensemble de toutes les suites vérifiant la relation de récurrence :

$$\boxed{(1)\ : \forall n\ \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$$

pour a et b fixés, et de remarquer que :

Lemme 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient (1) alors toutes les suites du type $(\lambda u_n + \mu v_n)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ vérifient aussi (1).
D11

Lemme 2 : une suite géométrique du type (k^n) vérifie (1) ssi

$$\boxed{\mathrm{E}_{\text{car}} : k^2 = ak + b \text{ (équation caractéristique de la récurrence)}}$$

D12

On démontre alors le :
THÉORÈME 1 (cas complexe) :
1) Si E_{car} possède deux solutions distinctes k_1 et $k_2 \in \mathbb{C}$, les suites complexes vérifiant (1) sont du type

$$(\lambda k_1^n + \mu k_2^n)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2) Si E_{car} possède une solution unique $k \neq 0 \in \mathbb{C}$, les suites complexes vérifiant (1) sont du type

$$((\lambda n + \mu)k^n)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
D13

Exemples E10 : calculs du terme général de la suite de Fibonacci, de la suite $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = 4\left(u_{n-1} - u_{n-2}\right) \end{cases}$, de la suite $\begin{cases} v_0 = 0, v_1 = 1 \\ v_n = -v_{n-1} - v_{n-2} \end{cases}$.

THÉORÈME 2(cas où a et b sont réels) :

1) Si $\mathrm{E}_{\mathrm{car}}$ possède deux solutions distinctes k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$, les suites réelles vérifiant (1) sont du type

$$\left(\lambda k_1^n + \mu k_2^n\right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2) Si $\mathrm{E}_{\mathrm{car}}$ possède une solution unique $k \neq 0 \in \mathbb{R}$, les suites réelles vérifiant (1) sont du type

$$((\lambda n + \mu) k^n)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3) Si $\mathrm{E}_{\mathrm{car}}$ possède deux solutions distinctes non réelles conjuguées $k = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{k}$, les suites réelles vérifiant (1) sont du type

$$\left(\rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)\right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

D14

Dans tous les cas, les coefficients λ et μ sont à déterminer à partir des 2 premiers termes de la suite.

B) ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES SUITES NUMÉRIQUES.

Dans ce chapitre, n, n_0, n_1 désigneront toujours des entiers naturels, et ε et A des réels.
I) CONVERGENCE VERS 0.

On rappelle qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n est vraie "à partir d'un certain rang" (APCR) si

$$\exists n_1 \ / \ \forall n \geqslant n_1 \ P(n)$$

et que la négation de cet énoncé, s'écrit en langage formalisé

....

Et se dit en français : ....

DEF : une suite complexe $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ *converge vers* 0 (ou "est de limite nulle") si le module de u_n peut être rendu, à partir d'un certain rang, plus petit que tout réel strictement positif donné à l'avance, autrement dit, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_1 \geqslant n_0 \ / \ \forall n \geqslant n_1 \quad |u_n| \leqslant \varepsilon}$$

ou encore :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \ |u_n| \leqslant \varepsilon \text{ APCR}}$$

Notations : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, ou $\lim (u_n) = 0$, ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

REM 1 : il faut lire cette définition sous la forme : pour tout epsilon > 0, aussi petit soit-il, on pourra toujours trouver un rang à partir duquel la suite est majorée par epsilon en valeur absolue. Cette tradition de nommer epsilon un nombre "petit" remonte à Cauchy (1821).

REM 2 : dans la définition ci-dessus, le nombre n_1 dépend de ε ; que signifierait en effet pour la suite (u_n) la définition :

$$\boxed{\exists n_1 \geqslant n_0 \ / \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall n \geqslant n_1 \quad |u_n| \leqslant \varepsilon} ?????$$

REM 3 : si on modifie un nombre fini de termes de la suite, cela ne changera pas le fait qu'elle converge vers 0 ou non.

REM 4 : $\lim (u_n) = 0$ équivaut à $\lim (|u_n|) = 0$.

Exemples : E1 : $(1/n)$, $\left(1/(n^2\right)$, $\left(1/\left(n^2+n\right)\right)$, $\left(2^{-n}\right)$.
PROP 1 (théorème d'encadrement, ou "des gendarmes" en 0 pour les suites réelles) : une suite encadrée par deux suites convergeant vers 0 converge elle-même vers 0 , autrement dit :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) \begin{cases} v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \text{ APCR} \\ \lim (v_n) = \lim (w_n) = 0 \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim (u_n) = 0}$$

CORO : une suite complexe dont le module est majoré par une suite convergeant vers 0, converge elle-même vers 0, autrement dit :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) \begin{cases} |u_n| \leqslant v_n \text{ APCR} \\ \lim (v_n) = 0 \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim (u_n) = 0}$$

D1

PROP 2 (théorème de limite de somme pour les suites complexes de limite nulle) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \lim (u_n) = \lim (v_n) = 0} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim (u_n + v_n) = 0}$$

D2

PROP 3 : une suite complexe converge vers 0 ssi ses partie réelle et imaginaire convergent vers 0.
D3

PROP 4 : (théorème de produit d'une suite complexe de limite nulle et d'une suite bornée) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} \lim(u_n) = 0 \\ (v_n) \text{ est bornée} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim(u_n v_n) = 0}$$

D4

CORO :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \lim u_n = 0} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \ \lim(\lambda u_n) = 0}$$

II) CONVERGENCE VERS UN COMPLEXE QUELCONQUE.

1) Définition et propriétés fondamentales.

DEF : soit l un complexe ; on dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *converge vers* l (ou "est de limite l") si la suite $(u_n - l)$ converge vers 0 , autrement dit, si

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_1 \geqslant n_0 \ / \ \forall n \geqslant n_1 \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon}$$

Notations : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, ou $\lim(u_n) = l$, ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$.

Une suite est dite *convergente* si elle possède une limite complexe, autrement dit si

$$\boxed{\exists l \in \mathbb{C} \ \ \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_1 \geqslant n_0 \ / \ \forall n \geqslant n_1 \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon}$$

Une suite non convergente est dite *divergente.*

REM : lorsqu'on vous demandera d'étudier la "nature" d'une suite, vous devrez chercher à savoir si elle est convergente ou divergente.

PROP 5 (théorème d'unicité de la limite finie) :

Si une suite converge vers l_1 et vers l_2 alors $l_1 = l_2$.

D5

REM : cette propriété justifie la notation fonctionnelle : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

PROP 6 : Une suite complexe est convergente ssi ses partie réelle et imaginaire le sont, et

$$\lim(\operatorname{Re} u_n) = \operatorname{Re}(\lim(u_n)), \lim(\operatorname{Im} u_n) = \operatorname{Im}(\lim(u_n))$$

CORO : une suite convergente réelle a une limite réelle.

D6

PROP 7 (théorème d'encadrement, ou "des gendarmes" pour les suites réelles) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) \begin{cases} v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \text{ APCR} \\ \lim(v_n) = \lim(w_n) = l \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim(u_n) = l}$$

D7

PROP 8 (théorème de limite de somme pour les suites complexes) :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) : \begin{cases} \lim(u_n) = l_1 \in \mathbb{C} \\ \lim(v_n) = l_2 \in \mathbb{C} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \lim(u_n + v_n) = l_1 + l_2}$$

D8

PROP 9 : une suite convergente est bornée.

D9

PROP 10 : (théorème de limite de produit pour les suites complexes) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} \lim (u_n) = l_1 \in \mathbb{C} \\ \lim (v_n) = l_2 \in \mathbb{C} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim (u_n v_n) = l_1 l_2}$$

D10

CORO :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \lim u_n = l \in \mathbb{C}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \ \lim (\lambda u_n) = \lambda l}$$

PROP 11 : (théorème de limite de l'inverse d'une suite complexe de limite non nulle) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \lim u_n = l \neq 0 \in \mathbb{C}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \begin{cases} 1.\ |u_n| \text{ est, APCR, minoré par un réel strictement positif} \\ \text{(donc il existe } n_1 \text{ tel que } \left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_1} \text{ est bien définie)} \\ 2.\ \lim \left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{1}{l} \end{cases}}$$

D11

CORO (de PROP 10 et 11) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} \lim (u_n) = l_1 \in \mathbb{C} \\ \lim (v_n) = l_2 \neq 0 \in \mathbb{C} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{l_1}{l_2}}$$

D12

ATTENTION, ON NE PEUT DONC ÉCRIRE :

$$\boxed{\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n \ ; \ \lim (u_n v_n) = \lim u_n \lim v_n \ ; \ \lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}}$$

QUE SI ON SAIT DÉJÀ QUE (u_n) et (v_n) SONT CONVERGENTES.

PROP 12 (théorème de conservation des inégalités LARGES par passage à la limite finie, pour les suites réelles)

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} u_n \leqslant v_n \text{ APCR} \\ \lim (u_n) = l_1 \in \mathbb{R} \ ; \ \lim (v_n) = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : l_1 \leqslant l_2}$$

D13

REM : Ce théorème n'est pas à confondre avec celui des gendarmes ; sa conclusion est une inégalité alors que pour celui des gendarmes, c'est une convergence. Il ne faut pas non plus le confondre avec le théorème FAUX que les élèves adorent :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : u_n \leqslant v_n \text{ APCR}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim u_n \leqslant \lim v_n}$$

En effet, une suite n'a pas forcément de limite (voir plus loin).

2) Sous-suites.

DEF : une suite $(v_n)_{n \geqslant n_1}$ est une *sous-suite* (ou *suite extraite*) d'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ s'il existe une application φ strictement croissante de $[|n_1, +\infty|[$ dans $[|n_0, +\infty|[$ telle que $\forall n \geqslant n_1 \quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

Autrement dit, une sous-suite est obtenue en supprimant des termes dans la suite de sorte qu'il en reste encore une infinité, et en renumérotant les termes restants à partir de n_1.

Exemples classiques de sous-suites de $(u_n)_{n \geqslant n_0}$:

- la sous-suite des termes de rang pair : $(u_{2n})_{n \geqslant \overline{E}(n_0/2)}$.
- la sous-suite des termes de rang impair : $(u_{2n+1})_{n \geqslant \overline{E}((n_0-1)/2)}$.
- la suite tronquée de ses p premiers termes : $(u_n)_{n \geqslant n_0+p}$
- la même, translatée de façon à commencer au rang 0 : $(u_{n+p+n_0})_{n \geqslant 0}$

TH : toute sous-suite d'une suite convergente est convergente, de même limite.
D14

CORO : une suite possédant deux sous-suites convergeant vers des limites différentes est divergente.

Exemple : E2

III) SUITES AYANT UNE LIMITE INFINIE.

Ce paragraphe ne concerne que les suites réelles.

DEF : une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers $\left\{\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$ si

$$\boxed{\forall A>0\ \ \exists n_1\geqslant n_0\ /\ \forall n\geqslant n_1\ \ \left\{\begin{array}{l} u_n\geqslant A \\ u_n\leqslant -A \end{array}\right.}$$

Notations : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\left\{\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$, ou $\lim\,(u_n)=\left\{\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$, ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \left\{\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$.
REM : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n=+\infty$.

PROP 13 : une suite de limite $\left\{\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$ est $\left\{\begin{array}{l} \text{non majorée (i.e. } \sup\limits_{n\geqslant n_0} u_n=+\infty) \\ \text{non minorée (i.e. } \inf\limits_{n\geqslant n_0} u_n=-\infty) \end{array}\right.$, mais la réciproque est fausse.

D14 bis

Une suite de limite infinie est donc divergente ; on dit par conséquent : "diverger vers $+\infty$".
Une suite de limite infinie est dite "divergente de première espèce" ; les autres suites divergentes sont dites "divergentes de deuxième espèce".

PROP 14 (théorème *du* gendarme pour une suite de limite infinie) :
Une suite réelle $\left\{\begin{array}{l} \text{minorée} \\ \text{majorée} \end{array}\right.$ APCR par une suite de limite $\left\{\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$ est elle-même de limite $\left\{\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$.
D15

PROP 15 (limite infinie d'une somme ou d'un produit de suites réelles) :

si u_n	et si (v_n)	alors u_n+v_n	alors u_nv_n
$\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$	est minorée	$\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$	???
$\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$	est minorée par un réel >0 APCR	$\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$	$\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$
$\underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$	est majorée	$\underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$	???
$\underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$	est minorée par un réel >0 APCR	???	$\underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$

D16

REM : la condition "(v_n) minorée" est réalisée dès qu'elle possède une limite $\in\,]-\infty,+\infty]$, et la condition "(v_n) minorée par un réel >0 APCR" est réalisée dès qu'elle possède une limite $\in\,]0,+\infty]$.

PROP 16 (limite de l'inverse) : si u_n est $\neq 0$ APCR, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\lvert u_n\rvert}=+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty \Leftrightarrow u_n>0$ APCR et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}=0$

D17

PROP 17 (théorème des limites des sous-suites) :
Toute sous-suite d'une suite réelle ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, a la même limite.
D18

Une suite ayant deux sous-suites ayant des limites distinctes est donc divergente de deuxième espèce.
REM (hors programme) : une limite d'une sous-suite s'appelle une "valeur d'adhérence" de la suite.

PROP 18 (image d'une suite convergente par une fonction continue)
Si (u_n) est une suite convergeant vers l, et f une fonction continue en l, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.
Application : si (u_n) est une suite récurrente associée à une fonction f, si (u_n) converge vers l, et f est continue en l , alors $f(l) = l$ (i.e. l est un point fixe de l).
D18 bis

Exemple E3 : détermination de la nature de la suite (a^n) suivant les valeurs de $a \in \mathbb{C}$.
IV) SUITES MONOTONES, SUITES ADJACENTES.

1) Suites monotones.
TH (de la limite monotone pour les suites) : toute suite monotone APCR possède une limite, finie ou infinie ; plus précisément :

une suite croissante APCR majorée est convergente.
une suite croissante APCR non majorée tend vers $+\infty$.
une suite décroissante APCR minorée est convergente.
une suite décroissante APCR non minorée tend vers $-\infty$.

De plus, si $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ est croissante $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\geqslant n_1} u_n$, et si $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ est décroissante $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\geqslant n_1} u_n$.
D19

Exemples E4:
- une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ avec $u_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$, et $v_k \geqslant 0$ pour $k \geqslant n_0$, possède toujours une limite $\in [v_{n_0}, +\infty]$.
- Les séries géométriques $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k}$ $(x > 0)$ sont convergentes de limite.................. pour $x > 1$, et divergentes pour $0 < x \leqslant 1$.
- la série *harmonique* (h_n) avec $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente

Démonstration 1 (Nicole Oresme, 1350) : utilisant le fait que

$$h_{2n} \geqslant h_n + 1/2$$

Démonstration 2 : utilisant l'encadrement

$$\ln n \leqslant h_n \leqslant \ln n + 1$$

- la suite (d_n) avec $d_n = h_n - \ln n$

On en déduit le développement : $\boxed{h_n = \ln n + \gamma + \underset{\to 0}{\varepsilon_n}}$ où $\gamma = \lim d_n =$ "constante d'Euler" $\simeq 0,577$.

- la série *quadratique* (q_n) avec $q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente, de limite $\leqslant 2$ (on démontrera que cette limite est $\pi^2/6$).
- on en déduit que la série de Riemann (s_n) avec $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ est divergente si $\alpha \leqslant 1$ et convergente si $\alpha \geqslant 2$.

2) Suites adjacentes.

DEF : on dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont *semi-adjacentes* si

1. (u_n) est croissante APCR et (v_n) décroissante APCR.
2. $u_n \leqslant v_n$ APCR

Et elles sont dites *adjacentes* si de plus

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

ATTENTION : NE PAS FAIRE L'ERREUR DE REMPLACER 3. PAR LA DÉFINITION ne présentant aucun intéret :

$$2' : \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

REM : pour démontrer que deux suites sont adjacentes, il suffit de démontrer 1. et 3., car 1. et 3. impliquent 2.

TH des suites adjacentes : deux suites semi-adjacentes sont convergentes ; de plus, si $\lim u_n = l_1$, $\lim v_n = l_2$, on a à partir du rang où les deux suites sont monotones :

$$\boxed{u_n \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant v_n}$$

Si les suites sont adjacentes, $l_1 = l_2$.
D20
L'intérêt des suites adjacentes est donc double :
1 : prouver une convergence.
2 : obtenir un encadrement de la limite.

Exemple E5 :
Les suites (e_n) et $(e'_n)_{n\geqslant 1}$ avec $e_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $e'_n = e_n + \dfrac{1}{n.n!}$.
On démontrera ultérieurement que la limite commune est le nombre $e = \exp(1)$; ceci permet donc d'obtenir une valeur approchée de e avec la précision que l'on veut.

Pour calculer e_n il est beaucoup plus rapide de le mettre sous la forme de Horner :

$$e_n = 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \ldots \frac{1}{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\ldots\right)\right)\right)$$

En effet, il y a juste à effectuer n additions et n divisions par des nombres plus petits que n.

On peut aussi en déduire le :
TH : le nombre e est irrationnel.
D21

Le théorème des suites adjacentes permet aussi de démontrer deux théorèmes importants :

TH (de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles) :
De toute suite réelle bornée, on peut toujours extraire une sous-suite convergente.
D22

TH (Cantor 1874) : si A est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, on peut toujours trouver entre deux réels distincts un élément qui n'appartient pas à A. On en déduit que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
D23

V) COMPARAISON DES SUITES À L'INFINI.
1) Suite négligeable devant une autre.

a) Définitions.

DEF : soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes ; on dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n), ou que (v_n) l'*emporte* sur (u_n), s'il existe une suite (ε_n) , telle que, APCR,

$$\boxed{u_n = \varepsilon_n v_n \text{ avec } \lim(\varepsilon_n) = 0}$$

NOTATIONS :

-de Hardy, en "double inférieur" : $(u_n) \underset{+\infty}{\ll} (v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n$, simplifiées en $(u_n) \ll (v_n)$ ou $u_n \ll v_n$.

MAIS NE PAS DIRE : u_n est très inférieur à v_n.

- de Landau : $u_n = o(v_n)$, à lire "u_n est un petit o de v_n" et à comprendre comme : "u_n est l'un des petits o de v_n", autrement dit que (u_n) est l'une des suites négligeable devant (v_n) (il n'y en pas qu'une !). Le o est ici l'initiale du mot ordre.

REM : si u_n et v_n sont non nuls APCR, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\boxed{u_n \ll v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0, \text{ ou encore : } \left|\frac{v_n}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty}$$

Exemples E6.

b) Propriétés de la relation de négligeabilité :

P1 :

$$\boxed{u_n \ll v_n \Leftrightarrow |u_n| \ll |v_n|}$$

d'où :

$$\boxed{o(u_n) = o(|u_n|)}$$

D24

P2 :

$$\boxed{u_n = o(1) \text{ (ou } u_n \ll 1) \Leftrightarrow \lim u_n = 0}$$

D25

P3 :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} u_n = v_n + o(v_n) \\ \lim v_n = l \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim u_n = l}$$

autrement dit

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} u_n = v_n + w_n \text{ avec } w_n \ll v_n \\ \lim v_n = l \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : \lim u_n = l}$$

D26

P4 transitivité :

$$\boxed{o(o(u_n)) = o(u_n)}$$

autrement dit :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : w_n \ll v_n \text{ et } v_n \ll u_n} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : w_n \ll u_n}$$

Remarquer la concision de la notation de Landau !

D27

P5 : Comparaison entre $<$ et $\ll$ (suites réelles)

1. $u_n < v_n$ APCR $\not\Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n$
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n \not\Rightarrow u_n < v_n$, même APCR
3. Par contre : $u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n \Rightarrow |u_n| \leqslant |v_n|$ APCR

D28

P6 : Multiplicativité 1:

$$\boxed{\lambda_n.o\left(u_n\right) = o\left(\lambda_n u_n\right)}$$

autrement dit :

$$\text{si } \boxed{\text{(H) : } v_n \ll u_n} \text{ alors } \boxed{\text{(C) : } \lambda_n v_n \ll \lambda_n u_n}$$

P6' : Multiplicativité 2:

$$\boxed{o\left(\lambda_n u_n\right) = \lambda_n.o\left(u_n\right)}$$

autrement dit :

$$\text{si } \boxed{\text{(H) : } v_n \ll \lambda_n u_n} \text{ alors } \boxed{\text{(C) : } v_n = \lambda_n w_n \text{ avec } w_n \ll u_n}$$

D29

P7 : compatibilité avec la somme :

$$\boxed{o\left(u_n\right) + o\left(u_n\right) = o\left(u_n\right)}$$

autrement dit :

$$\text{si } \boxed{\text{(H) : } v_n \text{ et } w_n \ll u_n} \text{ alors } \boxed{\text{(C) : } v_n + w_n \ll u_n}$$

D30

On en déduit, que si dans une somme, un terme l'emporte sur les autres, il l'emporte sur la somme des autres, et que donc , d'après P3, la limite de la somme est la limite de ce terme.

P8 : Si (λ_n) est une suite bornée (en particulier, constante), alors

$$\boxed{\lambda_n o\left(u_n\right) = o\left(u_n\right) \text{ et } o\left(\lambda_n u_n\right) = o\left(u_n\right)}$$

autrement dit :

$$\text{si } \boxed{\text{(H) : } v_n \ll u_n} \text{ alors } \boxed{\text{(C) : } \lambda_n v_n \ll u_n}$$

$$\text{et si } \boxed{\text{(H) : } v_n \ll \lambda_n u_n} \text{ alors } \boxed{\text{(C) : } v_n \ll u_n}$$

On en déduit le paradoxe :

$$\boxed{o\left(u_n\right) - o\left(u_n\right) = o\left(u_n\right)} \text{ et non 0 !!!!!!}$$

D31

P9 :

$$\text{si } u_n \text{ et } v_n \neq 0 \text{ APCR, alors } \boxed{u_n \ll v_n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{v_n} \ll \frac{1}{u_n}}$$

$$\text{si } u_n \text{ et } v_n > 0 \text{ APCR, alors } \boxed{u_n \ll v_n} \Leftrightarrow \boxed{\left(u_n\right)^\alpha \ll \left(v_n\right)^\alpha} \text{ si } \alpha > 0$$

D32

c) Exemples classiques à bien connaître.

LEMME (règle de D'Alembert faible) : soit (u_n) une suite à termes > 0 ; alors

si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$, $\lim u_n = +\infty$ et on dit que la croissance (ou la divergence) est *exponentielle* (ou *géométrique*)

si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$, $\lim u_n = 0$

si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on ne peut rien dire.

1. si $\alpha < \beta$ $\quad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\ll} n^\beta$, soit $n^\alpha = o\left(n^\beta\right)$
2. si $\alpha > 0$ $\quad \ln n \underset{n\to+\infty}{\ll} n^\alpha$ soit $\ln n = o\left(n^\alpha\right)$
2'. mieux : si $\beta > 0$ $\quad (\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\ll} n^\beta$ soit $(\ln n)^\alpha = o\left(n^\beta\right)$ ceci $\forall\alpha$
2". encore mieux : si $\alpha < \beta$ $\quad n^\alpha (\ln n)^\gamma \underset{n\to+\infty}{\ll} n^\beta (\ln n)^\delta$ ceci $\forall\gamma,\delta$
3. si $\lvert b\rvert > \lvert a\rvert > 1$ $\quad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\ll} a^n \ll b^n$ ceci $\forall\alpha$
4. $a^n \underset{n\to+\infty}{\ll} n!$ ceci $\forall a$
5. $n! \underset{n\to+\infty}{\ll} n^n \underset{n\to+\infty}{\ll} (2n)!$

D33

2) Suites équivalentes.

a) Définitions.

DEF : soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes ; on dit que (u_n) est *équivalente à* (v_n) (à l'infini), s'il existe une suite (a_n) , telle que, APCR,

$$\boxed{u_n = a_n v_n \text{ , avec } \lim(a_n)=1}$$

NOTATION : $(u_n) \underset{+\infty}{\sim} (v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, simplifiées en $(u_n) \sim (v_n)$ ou $u_n \sim v_n$.

REM1 : si u_n et v_n sont non nuls APCR, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1}$$

REM 2 : on peut aussi écrire la définition sous les formes très utiles :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \boxed{u_n = (1 + o(1))\, v_n} \Leftrightarrow \boxed{u_n = v_n + o(v_n)} \Leftrightarrow \boxed{u_n - v_n = o(v_n)}}$$

Exemples E7.

b) Propriétés.

P10 : la relation d'équivalence des suites est réflexive, symétrique, et transitive (c'est donc une relation ... d'équivalence (!)).

D34

On en déduit : $u_n - v_n = o(v_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = o(u_n)$: deux suites sont équivalentes si leur différence est négligeable devant l'une d'entre-elles.

P11 :

si $l \neq 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$
par contre, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0 \Leftrightarrow u_n = 0$ APCR

D35

P12 :

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : \begin{cases} u_n \sim v_n \\ \lim v_n = l \end{cases}} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lim u_n = l}$$

REM : ceci est exactement la propriété P3 !!!!!

NE PAS ÉCRIRE DES INSANITÉS DU STYLE : $\lim u_n \sim \lim v_n$.

P13 : Multiplicativité

$$\text{si } \boxed{\text{(H)} : u_n \sim v_n} \text{ alors } \boxed{\text{(C)} : \lambda_n u_n \sim \lambda_n v_n}$$

d'où

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : \begin{cases} u_n \sim u'_n \\ v_n \sim v'_n \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : u_n v_n \sim u'_n v'_n}$$

D36

P14 :

$$\text{si } \begin{cases} u_n \text{ et } v_n \ \neq 0 \text{ APCR et } \alpha \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } u_n \text{ et } v_n \ > 0 \text{ APCR et } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ alors } \boxed{u_n \sim v_n} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{en particulier : } \boxed{\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}}$$

ATTENTION : ici α ne DÉPEND PAS de n !!!!!
D37

PAR CONTRE LES TENTATIONS SUIVANTES SONT **FAUSSES** EN GÉNÉRAL :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : u_n \sim v_n} \text{ alors } \boxed{f(u_n) \sim f(v_n)}$$

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : u_n \sim u'_n} \text{ alors } \boxed{u_n + v_n \sim u'_n + v_n}$$

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : u_n \sim v_n} \text{ alors } \boxed{u_n - v_n \to 0}$$

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) : u_n - v_n \to 0} \text{ alors } \boxed{u_n \sim v_n}$$

D38

QUE FAIRE EN FACE D'UNE SOMME ?

si $\boxed{u_n << v_n}$ alors $(u_n + v_n) \ \sim \ v_n$
Autrement dit si l'une l'emporte sur l'autre; l'équivalent c'est celui qui l'emporte

si $\boxed{u_n \sim \lambda a_n \text{ et } v_n \sim \mu a_n}$ alors $(u_n + v_n) \ \sim \ (\lambda + \mu)\, a_n$ SAUF SI $\lambda + \mu = 0$
dans ce dernier cas il faut développer u_n et v_n avec au moins deux termes.

P15 (théorème des gendarmes pour les équivalents, cas des suites réelles) :

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H}) \begin{cases} v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \text{ APCR} \\ v_n \sim a_n \text{ et } w_n \sim a_n \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : u_n \sim a_n}$$

D39
Application : $h_n \sim \ln n$.

P16 (remplacement dans un petit o d'une suite par une suite équivalente)

$$\text{si } \boxed{(\mathrm{H})\ u_n \sim v_n} \text{ alors } \boxed{(\mathrm{C}) : o(u_n) = o(v_n)}$$

D40
c) Équivalents classiques.

- un polynôme en n est équivalent à son monôme de plus haut degré :

$$\sum_{k=0}^{p} a_k n^k \sim a_p n^p \text{ si } a_p \neq 0$$

- plus généralement :

$$\sum_{k=1}^{p} a_k n^{\alpha_k} (\ln n)^{\beta_k} \sim \boxed{a_p n^{\alpha_p} (\ln n)^{\beta_p}} \text{ si } \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_p \text{ et } a_p \neq 0$$

D41
Exemples E8 :

$1 + 2 + ... + n \sim$
$1^2 + 2^2 + ... + n^2 \sim$
$\binom{n}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim}$ (avec p fixé)

- si $\lim \varepsilon_n = 0$

$$\sin \varepsilon_n \sim \tan \varepsilon_n \sim \ln(1+\varepsilon_n) \sim e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \text{sh } \varepsilon_n \sim \boxed{\varepsilon_n}$$

D42

- la formule de Stirling (à connaître, démonstration hors programme):

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

- (Hors programme) l'équivalent du n-ième nombre premier :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$$

Autres exemples E9.
3) Suite dominée par une autre.

DEF : soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes ; on dit que (u_n) est *dominée* par (v_n), s'il existe une suite (b_n) , telle que APCR,

$$\boxed{u_n = b_n v_n \text{ avec } (b_n) \text{ bornée}}$$

NOTATIONS :
De Hardy : $u_n \preccurlyeq v_n$ (très peu utilisée : grand risque de confusion avec $\leqslant$)
de Landau : $u_n = O(v_n)$, à lire "u_n est un grand O de v_n" et à comprendre comme : "u_n est l'un des grands O de v_n", autrement dit que (u_n) est l'une des suites dominée par (v_n).

REM 1: si u_n et v_n sont non nuls APCR, la définition s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\boxed{u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right) \text{ est majorée} \Leftrightarrow \exists K > 0 \quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant K \quad \text{APCR}}$$

REM 2 : l'expression "dominée par" est assez malheureuse ; en effet (3) est dominée par (2) , (n) est dominée par $\left(\frac{n}{2}\right)$; on emploie parfois l'expression : (u_n) est "au plus de l'ordre de" (v_n) .

D'ailleurs lorsque $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \text{et } v_n = O(u_n) \end{cases}$, autrement dit si $\exists K_1, K_2 > 0 \quad K_1 \leqslant \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant K_2$ APCR, on dit que (u_n) et (v_n) sont "du même ordre", et cette relation est parfois notée $u_n = \Theta(v_n)$.
Exemples E10.

PROP : si $u_n \sim \lambda v_n$ avec $\lambda \neq 0$, alors (u_n) et (v_n) sont du même ordre, mais la réciproque est fausse.