INEGALITES ; PARTIES ENTIERES

1. Encadrement décimal associé à un encadrement.

   On donne deux réels $a < b$.

   Soit $A = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ \exists N \in \mathbb{Z} \ / \ (N-1)\,10^n < a < b < (N+1)\,10^n\}$

   (a) Montrer que $A$ est non vide et que $A$ est minorée par $E\left(\log\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right)$ ; on en déduit donc que $A$ possède un plus petit élément $n_0$.Facultatif : montrer que si $n \in A$ alors $n+1 \in A$.

   (b) Montrer que si $b - a < 1$, alors il existe soit un unique entier $N$, soit deux entiers $N$ distants d'une unité vérifiant $N-1 < a < b < N+1$ ; en déduire que pour $a < b$ quelconques, il existe au maximum deux entiers $N$ distants d'une unité tels que $(N-1)\,10^{n_0} < a < b < (N+1)\,10^{n_0}$ et que l'un de ces entiers $N$ est $\overline{E}\left(\dfrac{a}{10^{n_0}}\right)$.

   (c) Montrer que $n_0 = E(\log(b-a))$ ou $E(\log(b-a)) + 1$

   (d) Si $a < x < b$ est un encadrement de $x$, on désigne par "encadrement décimal associé" l'encadrement (ou les encadrements dans les rares cas où il y en a deux) $(N-1)\,10^{n_0} < x < (N+1)\,10^{n_0}$ défini dans b) à partir de $a$ et $b$, que l'on écrit plutôt : $x \simeq N.10^{n_0} \pm 10^{n_0}$.

   Déterminer l'encadrement décimal associé à

      i. $546468 < x < 546489$

      ii. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} + \frac{1}{10!}$

   GÉOMÉTRIE

2. * Un problème babylonien.

   Un paysan possède un champ trapézoïdal $ABDC$) $((AB) \parallel (CD),\ \ AB = a, CD = b)$ qu'il souhaite partager en deux trapèzes $(ABYX)$ et $(XYDC)$ pour ses deux fils ; soit $h$ la distance entre $(AB)$ et $(XY)$ et $k$ celle entre $(XY)$ et $(CD)$.

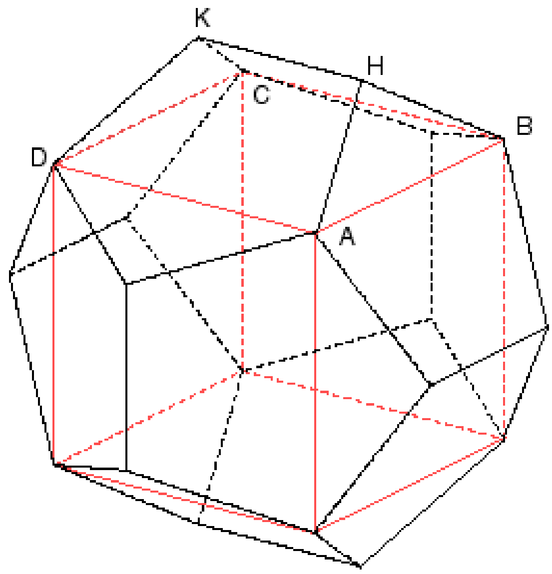
   (a) Exprimer $c = XY$ en fonction de $a, b, h, k$.

   (b) Déterminer $c$ en fonction de $a$ et $b$ lorsque le partage est équitable.

   (c) Déterminer deux entiers distincts $a$ et $b$ tels que $c$ , déterminé dans b) est aussi entier.

   (d) Facultatif : déterminer une famille infinie de couples d'entiers distincts $(a, b)$ tels que que $c$ soit entier.

3. Détermination des sommets du dodécaèdre régulier




   Le dodécaèdre régulier est un polyèdre à 12 faces qui sont des pentagones réguliers ; la figure ci-dessus montre que 8 des sommets forment un cube ; on choisit $A(1,1,1), B(-1,1,1), C(-1,-1,1), D(1,-1,1)$ et on pose $H(0, y, 1+h)$.

(a) Déterminer $y$ et $h$ en utilisant que $AH = HK$ et $\widehat{AHB} = \widehat{KHB}$ ; on vérifiera que cette dernière condition équivaut à $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AK}$.On exprimera $y$ et $h$ en fonction du nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Ecrire les coordonnées des 16 autres sommets du dodécaèdre, .

(c) Faire tracer le dodécaèdre par mathematica en utilisant Polygon[{A,H,B,..,..},......,{..,..,..,..,..}], A étant remplacé par {1,1,1}, ainsi que H, B etc.

4. 4 points sont sur une sphère ; déterminer leur disposition pour que la plus petite distance entre deux d'entre eux soit la plus grande possible.

5. On considère les propriétés suivantes d'un objet de l'espace :

   (a) C : il possède un centre de symétrie
   A : il possède un axe de symétrie
   P : il possède un plan de symétrie
   Donner, si c'est possible, un exemple d'objet vérifiant chacune des propriétés suivantes :
   1: $C\ A\ P$; $2 : \overline{C}\ A\ P$; $3 : C\ \overline{A}\ P$; $4 : C\ A\ \overline{P}$; $5 : \overline{C}\ \overline{A}\ P$; $6 : C\ \overline{A}\ \overline{P}$; $7 : \overline{C}\ A\ \overline{P}$; $8 : \overline{C}\ \overline{A}\ \overline{P}$.
   Peut-on trouver un objet $\overline{C}\ \overline{A}\ \overline{P}$ qui soit invariant par une rotation non réduite à l'identité ?

6. (2 personnes) : **Les courbes de Bézier** (découvertes dans les années 60 par Pierre Bézier, ingénieur de la firme Renault)
   Soient $A, B$ deux points (du plan ou de l'espace) qui seront les extrémités de la courbe de Bézier, et soient $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$, $(n-1)$ points dits de "contrôle". La courbe de Bézier associée à ces points est l'ensemble des points $M(t)$, barycentres des points $(A_i)_{i=0...n}$ (avec $A_0 = A$ et $A_n = B$) affectés des coefficients $p_i(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i}$ avec $t$ décrivant $[0, 1]$.

   (a) S'il n'y a pas de point de contrôle ($n = 1$), qu'est-ce que la courbe de Bézier ?

   (b) Vérifier que $M(0) = A_0$ et que la courbe de Bézier est tangente à $\overrightarrow{A_0A_1}$ en $A_0$. (calculer $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ pour $t = 0$).

   (c) Vérifier que la courbe de Bézier associée à $A_n, A_{n-1}, ..., A_0$ est la même que celle associée à $A_0, A_1, ..., A_n$. En déduire que la propriété de la question précédente se retrouve en $A_n$.

   (d) Justifier l'inclusion de la courbe de Bézier dans l'enveloppe convexe des $A_i$, c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe contenant les $A_i$.

   (e) Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$, $A_1 \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ et $B \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$. Quelle est la courbe de Bézier ?

   (f) Soit $P(t)$ le point courant de la courbe de Bézier d'extrémités $A_1$ et $B$ et soit $Q(t)$ le point courant de la courbe de Bézier d'extrémités $A$ et $A_{n-1}$.
   Montrer que $M(t)$ est le barycentre de $\begin{pmatrix} P(t) & Q(t) \\ t & (1-t) \end{pmatrix}$. En déduire la construction des points $M(0,25)$, $M(0,5)$ et $M(0,75)$ lorsque $n = 2$ (figure).

   (g) Le point $M(t)$ correspondant à $A_0, A_1, ..., A_n$ est noté $B_t(A_0, A_1, ..., A_n)$.

      i. Vérifier que $B_t(A_0, A_1, ..., A_n) = B_t(B_t(A_0, A_1, ..., A_{n-1}), B_t(A_1, ..., A_{n-1}, A_n))$.
      ii. En déduire par exemple une formule donnant $B_t\ (A_0, A_1, A_2, A_3)$ en utilisant uniquement la fonction $B_t$ appliquée à un couple de points.
      iii. (pour la deuxième personne) : programmer le tracé des courbes de Bézier avec mathematica :

```
bezier[v_, t_] :=
Module[ {v1, v2, r},
If[Length[v] > 1, v1 = Delete[v, Length[v]]; v2 = Delete[v, 1];
r = (1 - t) bezier[v1, t] + t bezier[v2, t], r = v[[1]]];
r]
```

7. : **Le paraboloïde hyperbolique :**
   On se donne quatre points $O, I, J, K$. On pose $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.
   La notation $B_\alpha(X, Y)$ désigne le barycentre de $(X, 1-\alpha)$ et $(Y, \alpha)$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $M(x, y) = B_y(B_x(O, I), B_x(J, K))$
   $PH$ désigne l'ensemble des points $M(x, y)$ lorsque $(x, y)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $O, I, J, K$ sont dans $PH$.

(b) Exprimer $M(x,y)$ comme barycentre de $O, I, J, K$. En déduire que $M(x,y) = B_x(B_y(O,J), B_y(I,K))$.

(c) Vérifier que $\overrightarrow{OM(x,y)} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$. Qu'est-ce que $PH$ si $O, I, J, K$ sont coplanaires non alignés ?
On suppose dorénavant que $O, I, J, K$ ne sont pas coplanaires.

(d) Ecrire l'équation cartésienne de $PH$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

(e) Soit $\mathcal{D}_x$ l'ensemble des points $M(x,y)$ lorsque $y$ décrit $\mathbb{R}$, à $x$ fixé et $\mathcal{D}'_y$ l'ensemble des points $M(x,y)$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}$, à $y$ fixé.
Montrer que $\mathcal{D}_x$ est une droite ; en donner un vecteur directeur ; vérifier que $PH$ est la réunion de la famille $(\mathcal{D}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ (on dit que $PH$ est une surface réglée ), et que les droites $\mathcal{D}_x$, pour $x$ décrivant $\mathbb{R}$, restent parallèles à un plan $\mathcal{P}$.
Enoncer des propriétés analogues concernant les $\mathcal{D}'_y$. Qu'est-ce que $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}'_y$ ?
moralité : pour avoir une idée de $PH$, tendez des élastiques régulièrement espacés entre $(OI)$ et $(JK)$ ou entre $(OJ)$ et $(IK)$ ; il y a une maquette à la Cité des Sciences.

(f) On suppose $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ orthonormée. Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la mesure de l'angle entre $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}'_y$.
Montrer que $\cos\theta = \dfrac{|xy|}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$. En déduire que $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_{-x}$ coupent $\mathcal{D}'_y$ sous le même angle.

8. : Existence d'un polygone de côtés donnés.

(a) Soit dans un plan deux cercles $C$ et $C'$de rayons $R$ et $R'$ et de centres distants de $d$.
Montrer que ces deux cercles sont sécants (i.e. ont un point en commun) ssi $|R' - R| \leqslant d \leqslant R + R'$.

(b) En déduire qu'étant donné trois réels $\geqslant 0$ : $a, b, c$, il existe un triangle de côtés de longueurs $a, b, c$ ssi l'un de ces nombres est compris entre la valeur absolue de la différence et la somme des deux autres.

(c) Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ $n$ réels $\geqslant 0$ ; montrer en utilisant (b) qu'il existe un polygone $(A_1A_2...A_n)$ dont les côtés ont pour longueurs les $(a_i)$ (soit $A_iA_{i+1} = a_i$) si et seulement si chaque $a_i$ est inférieur ou égal à la somme des autres.

COMPLEXES

9. :

(a) Démontrer de la gauche vers la droite : $\dfrac{\sin nx}{\sin x} = \displaystyle\sum_{\substack{-n+1\leqslant p\leqslant n-1 \\ p\equiv n-1\ [2]}} e^{ipx}$.

(b) En déduire une linéarisation de $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$. (Séparer les cas $n$ pair et $n$ impair).

(c) En déduire pour $n$ pair $\geqslant 2$ la relation entre polynômes de Tchebychef : $U_{n-1} = 2(T_1 + T_3 + ... + T_{n-1})$ et déterminer la relation similaire pour $n$ impair.

10. : ESTP 1986
On pose pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \neq \pm\alpha \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ : $f_n(x) = \dfrac{\cos nx - \cos n\alpha}{\cos x - \cos\alpha}$ où $\alpha$ est un réel donné.

(a) Déterminer $l = \lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x)$, quand $\alpha \neq k\pi$, $k$ entier.

(b) Dans le cas où $\alpha = k\pi$, $k$ entier, calculer encore $l$.

(c) On suppose désormais $\alpha \neq k\pi$, comme dans la première question. En posant $z = e^{ix}$ et $a = e^{i\alpha}$, linéariser l'expression $f_n(x)$, c'est-à-dire la mettre sous la forme : $f_n(x) = c_n(\alpha) + 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k(\alpha) . \cos(n-k)x$, où les $c_k(\alpha)$ sont des constantes que l'on calculera.

11. : Minimum de la moyenne des distances à trois points.
Soit $ABC$ un triangle de sens direct, $a, b, c$ les affixes respectives de $A, B, C$, et $M$ d'affixe $z$.

(a) On suppose que les angles du triangle ont tous une mesure $\leqslant \dfrac{2\pi}{3}$;

i. Montrer que les trois arcs de cercle définis respectivement par $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$, $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$, $\left(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ se coupent en un point commun $F$ (appelé point de Fermat du triangle, point où les trois côtés sont vus sous le même angle).

ii. On translate le triangle de façon à ce $F$ ait pour affixe $O$ ; on pose $p=\dfrac{a}{|a|},q=\dfrac{b}{|b|},r=\dfrac{c}{|c|}$ ; montrer que $p+q+r=0$.

iii. Montrer que $|z-a|+|z-b|+|z-c|\geqslant|a|+|b|+|c|$ (indication : considérer $\overline{p}z-|a|+\overline{q}z-|b|+\overline{r}z-|c|$) et qu'on a égalité ssi $z=0$. Quelle est la traduction géométrique de ce résultat ? (Regarder le titre de l'exercice).

(b) On suppose que l'angle en $A$ du triangle a une mesure $>\dfrac{2\pi}{3}$ et on translate cette fois le triangle de sorte que $A$ ait pour affixe 0 ; on pose $u=\dfrac{\overline{b}}{|b|},v=\dfrac{\overline{c}}{|c|}$ ;

i. Montrer que $|u+v|<1$;

ii. Montrer que $|z|+|z-b|+|z-c|\geqslant|b|+|c|$ (indication : considérer $|(u+v)z-u(z-b)-v(z-c)|$) et que l'on a égalité ssi $z=0$. Quelle est la traduction géométrique de ce résultat ?

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

12. : Une application de l'exercice 8. sur les équations différentielles (à faire avant).

Déterminer tous les couples $(f,g)$ de fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels $a$ et $b$ :

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a)f(b)-g(a)g(b) \\ g(a+b) &= g(a)f(b)+f(a)g(b) \end{aligned}$$

13. : Trouver tous les couples $(f,g)$ de fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(fg)'=f'g'$. Etudier par exemple le cas où $f(x)=e^{ax}$.

14. : La courbe du jet d'eau.

(a) On considère le système différentiel $\begin{cases}\ddot{x}=-k\dot{x}\\ \ddot{y}=-k\dot{y}-g\end{cases}$ (avec $k=\dfrac{h}{m}$ et $g>0$) ; l'interpréter physiquement.

(b) Montrer que les solutions du système différentiel vérifiant la condition initiale $x(0)=y(0)=0$ sont données par : $\begin{cases}x=a(1-e^{-kt})\\ y=b(1-e^{-kt})-ckt\end{cases}$ ; exprimer $a,b,c$ en fonction des données et de la vitesse initiale $v_0$ et de l'angle $\varphi_0$ que fait $\overrightarrow{v_0}$ avec $\overrightarrow{i}$.

(c) Montrer que la trajectoire est donnée par $y=\dfrac{b}{a}x+c\ln\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$ ; étudier cette courbe.

(d) Déterminer sous forme paramétrique ($\begin{cases}x=f(\varphi_0)\\ y=g(\varphi_0)\end{cases}$ le lieu des points d'altitude maximale quand $\varphi_0$ varie. Si c'est possible, tracer à l'aide de mathematica des courbes du c) et la courbe du d) dans une même figure.

NOMBRES ENTIERS

15. :

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $n$ pour que l'ensemble des nombres de 1 à $n$ puisse être partagé en deux sous-ensembles de même somme, comme par exemple $\{1,2,3\}=\{1,2\}\cup\{3\}$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $n$ pour que la série des nombres de 1 à $n$ , chacun étant répété deux fois, puisse être rangée dans un ordre tel qu'il y ait un nombre entre les deux "1", deux entre les deux "2", ..., $n$ entre les deux "$n$", comme par exemple $3,1,2,1,3,2$.

16. Le nombre $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}$ peut-il être un nombre entier ?

17. * : Montrer que le produit de $n$ entiers naturels consécutifs est divisible par $n!$

(a) En utilisant les coefficients binomiaux.

(b) En écrivant : (k+1)....(k+n) sous la forme k(k+1)....(k+n-1) + n .(k+1)....(k+n-1)

(c) En utiliser le fait (à démontrer) que $v_p(n!)$ est égal à $[n/p]$.

18. : Exercice mathematica.

Déterminer les puissances parfaites comprises entre 4 et $n$ (application pour $n = 100$) qui sont somme de deux puissances parfaites différentes de 0 et 1 (comme $3^4 = 7^2 + 2^5$ ) et celles qui ne le sont pas.

DÉNOMBREMENTS

19. :

(a) Déterminer la moyenne (ou l'espérance) du nombre d'éléments d'une partie d'un ensemble $E$ à $n$ éléments. En déterminer la variance et l'écart-type (rappel : $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$)

(b) Déterminer la moyenne (ou l'espérance) du nombre d'éléments de l'intersection de deux parties de $E$. Idem pour la réunion.

20. : Théorème des couples.

Lors d'une soirée, $n$ garçons ont chacune une liste de filles avec qui ils souhaiteraient danser ; montrer par récurrence forte sur $n$ que si la réunion des listes de tout sous-ensemble de $k$ garçons contient au moins $k$ filles différentes (pour $1 \leqslant k \leqslant n$), alors il est possible que les garçons puissent danser chacun avec une partenaire qui lui plait (il est possible si vous le souhaitez d'inverser le rôle des garçons et des filles).

21. * : Combinaisons avec répétitions.

Notons $\left(\binom{n}{p}\right)$ le nombre de combinaisons avec répétitions de longueur $p$ formées à partir de $n$ objets ($p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$)

(a) Déterminer par exemple : $\left(\binom{4}{3}\right)$, puis $\left(\binom{1}{p}\right)$,$\left(\binom{2}{p}\right)$,$\left(\binom{n}{0}\right)$,$\left(\binom{n}{1}\right)$ ,$\left(\binom{n}{2}\right)$ .

(b) Soit $p_i$ le nombre de répétitions de l'objet n° $i$ dans la combinaison ($0 \leqslant p_i \leqslant p$) ; on a donc $\sum_{i=1}^{n} p_i = p$. En fait, une combinaison étant entièrement déterminée par la connaissance des nombres $p_1, p_2, ..., p_n$, $\left(\binom{n}{p}\right)$ est le nombre de $n$-uplets $(p_1, p_2, ..., p_n)$ d'entiers naturels dont la somme vaut $p$. Cette remarque doit vous aider à montrer que $\left(\binom{n+1}{p}\right) = \sum_{j=0}^{p} \left(\binom{n}{j}\right)$.

(c) Remplir le tableau des $\left(\binom{n}{p}\right)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 4$ et $0 \leqslant p \leqslant 4$.

(d) Remarquer que $\left(\binom{n}{p}\right)$ peut se mettre sous forme d'un coefficient binomial et démontrer cette formule par récurrence sur $n$.

(e) Combien y a-t-il de monômes $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_p^{\alpha_p}$ en les variables $x_1, ..., x_p$ de degré $\alpha_1 + ... + \alpha_p \leqslant q$ ? En déduire qu'il y en a autant que de monômes $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_q^{\alpha_q}$ en les variables $x_1, ..., x_q$ de degré $\leqslant p$.

22. Nombre de partitions à $k$ composantes.

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble à $n(\geqslant 1)$ éléments, $k$ un entier entre 1 et $n$. Soit $p_{nk}$ le nombre de partitions de $\mathbb{E}$ comportant $k$ composantes, et $p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk}$ le nombre de partitions de $\mathbb{E}$.

(a) Donner la relation qui lie $p_{n+1,k}$ à $p_{n,k}$ et $p_{n,k-1}$. Remplir le tableau des $p_{n,k}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$ et $1 \leqslant k \leqslant 5$.

(b) On pose $f(x) = e^{e^x}$; calculer $f^{(n)}(x)$ ; constater que les nombres $p_{n,k}$ apparaissent et le démontrer.

(c) Calculer $f^{(n)}(0)$ et en déduire que $e^{e^x} = e \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{x^n}{n!}$.

23. : Déterminer le nombre de partitions *équitables* d'un ensemble à $n$ éléments.

24. : Dénombrer les applications d'un ensemble $E$ de taille $n$ dans lui-même qui sont involutives, c'est-à-dire vérifiant $f \circ f = id_E$ .

    Les premières valeurs sont : 1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, 2620, 9496.

25. : Nombre de fractions à $n$ étages.

    (a) Il y a 2 fractions à 3 étages: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ et $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ ; il y en a 5 à 4 étages : $\dfrac{\frac{\frac{a}{b}}{c}}{d}, \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \dfrac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{d}, \dfrac{a}{\frac{\frac{b}{c}}{d}}, \dfrac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}}$; on note $f_n$ le nombre de fractions à $n$ étages ; on demande de déterminer une relation de récurrence permettant de calculer $f_{n+1}$ connaissant $f_1, f_2, ..., f_n$.

    (b) Donner les résultats simplifiés des $f_5$ fractions à 5 étages, ou bien faire un programme déterminant les fractions de l'étape $n$.

ENSEMBLES

26. * : Etude de la différence symétrique.

    (a) $X, Y$ étant deux ensembles, montrer que $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$ ; on note cet ensemble $X \triangle Y$ .

    (b) Montrer l'associativité de $\Delta$.

    (c) $A$ étant une partie d'un ensemble $E$, montrer que l'application $f \left\{ \begin{array}{c} P(E) \to P(E) \\ X \mapsto A \Delta X \end{array} \right.$ est bijective et donner $f^{-1}$.

    (d) En déduire que dans un ensemble fini, il y a autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties ayant un nombre impair d'éléments (prendre $A = \{x_0\}$).

27. Montrer que $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$ ; généraliser à $\displaystyle\bigcup_{\substack{J \subset I \\ |J| = p}} \left( \bigcap_{j \in J} A_j \right)$ où $I = \{1, 2, .., n\}$ .

28. Les chaînes et antichaînes.

    Étant donné un ensemble fini $E$ ayant $n$ éléments, on désigne par *chaîne*, un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de $E$ totalement ordonné pour l'inclusion (c'est-à-dire que $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_p\}$ avec $C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_p \subset E$) ; à l'opposé, on désigne par antichaine un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de $E$ telles que deux d'entre elles ne soient jamais incluse l'une dans l'autre ; le nombre de parties composant une chaîne ou une antichaîne sera appelé sa taille ; le but de l'exercice est de déterminer les antichaînes de taille maximale de $E$.

    (a) Quelle est la taille maximale d'une chaîne et combien y a-t-il de chaînes de cette taille ?

    (b) Considérons une antichaine $\mathcal{A}$ et l'un de ses éléments $A$, ayant $k$ éléments ;

       i. Montrer qu'il y a $k!\,(n-k)!$ chaînes de taille maximale ayant $A$ comme élément.

       ii. Notons $a_k$ le nombre d'ensembles à $k$ éléments de l'antichaîne $\mathcal{A}$ ; déduire de (i) et (a) le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)! \leqslant n!$, et en déduire que $|\mathcal{A}| \leqslant \begin{pmatrix} n \\ \left[\frac{n}{2}\right] \end{pmatrix}$.

       iii. Déterminer toutes les antichaînes de taille $\begin{pmatrix} n \\ \left[\frac{n}{2}\right] \end{pmatrix}$ (séparer les cas $n$ pair et $n$ impair).

APPLICATIONS

29. :

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ (a_1, ...a_n) \mapsto (a_i + a_j)_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \end{array} \right.$ est injective pour $n \geqslant 3$.

(b) $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties à $n$ éléments de $\mathbb{R}$. Soit $f : \left| \begin{array}{c} \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \{a_1, ..., a_n\} \mapsto \{a_i + a_j \ / \ 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \end{array} \right.$.
Montrer que pour $n = 3$, $f$ est injective (quelle est son image ? ) mais qu'elle ne l'est pas pour $n = 4$.

30. :

(a) Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications $f$ et $g$ de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même définies par

$$f(x, y) = (4x - 3y, 5x - 4y) \text{ et } g(x, y) = (4x + 3y, 5x - 4y)$$

(b) Soient $a, b, c, d$ 4 entiers, $\Delta = ad - bc$ et $f$ de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même définie par $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ ; montrer que $f$ est injective ssi $\Delta \neq 0$ et qu'elle est surjective ssi $\Delta = \pm 1$ ; donner l'expression de la réciproque dans le cas de bijectivité.
Indications : pour l'injectivité, regarder $f(-b, a)$ et pour la surjectivité, chercher les antécédents de $(1, 0)$ et de $(0, 1)$.

(c) Application : le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ; on donne deux points $P$ et $Q$ à coordonnées entières, note $E_0$ l'ensemble des points à coordonnées entières dans le repère $R$ et $E$ l'ensemble des points à coordonnées entières dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$ ; montrer que $E = E_0$ ssi l'aire du triangle $OPQ$ vaut $1/2$.