Sujets avec * : réservés à ceux qui ont une moyenne de DS <=8

INÉGALITÉS ; PARTIES ENTIÈRES

1. Encadrement décimal associé à un encadrement.

On donne deux réels $a < b$.

Soit $A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \ / \ \exists N \in \mathbb{Z} \ / \ (N-1)10^n < a < b < (N+1)10^n \right\}$

a. Montrer que A est non vide et que A est minorée par $\left\lfloor \log\left(\frac{b-a}{2}\right) \right\rfloor$; on en déduit donc que A possède un plus petit élément n_0. Facultatif : montrer que si $n \in A$ alors $n+1 \in A$.

b. Montrer que si $b - a < 1$, alors il existe soit un unique entier N, soit deux entiers N distants d'une unité, vérifiant $N-1 < a < b < N+1$; en déduire que pour $a < b$ quelconques, il existe au maximum deux entiers N distants d'une unité tels que $(N-1)10^{n_0} < a < b < (N+1)10^{n_0}$ et que l'un de ces entiers N est $\left\lceil \frac{a}{10^{n_0}} \right\rceil$.

c. Montrer que $n_0 = \lfloor \log(b-a) \rfloor$ ou $\lfloor \log(b-a) \rfloor + 1$.

d. Si $a < x < b$ est un encadrement de x, on désigne par "encadrement décimal associé" l'encadrement (ou les encadrements dans les rares cas où il y en a deux) $(N-1)10^{n_0} < x < (N+1)10^{n_0}$ défini dans b) à partir de a et b, que l'on écrit plutôt : $x \simeq N.10^{n_0} \pm 10^{n_0}$.

Déterminer l'encadrement décimal associé à

i. $546468 < x < 546489$

ii. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} + \frac{1}{10!}$

RECURRENCES

2. Calcul des sommes des puissances des premiers entiers en fonction de n, et en fonction de $n(n+1)$.

Pour tous entiers naturels n et p on considère les sommes $S_n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$.

a. En calculant de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$, montrer que $(n+1)^{p+1} = \displaystyle\sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} S_n^q$ et en tirer une formule de récurrence (dûe à Pascal) exprimant S_n^p en fonction des S_n^q pour $0 \leqslant q \leqslant p-1$.

b. En déduire les calculs successifs de S_n^1, S_n^2, S_n^3 ainsi que le fait que S_n^p est un polynôme de degré $p+1$ en la variable n.

c. En calculant de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((k(k+1))^{p+1} - (k(k-1))^{p+1}\right)$, montrer que $(n(n+1))^{p+1} = 2 \displaystyle\sum_{0 \leqslant q \leqslant \frac{p}{2}} \binom{p+1}{2q+1} S_n^{2p+1-2q}$ et en tirer une formule de récurrence (trouvée par un certain Faulhaber en 1631) permettant de calculer S_n^{2p+1} en fonction des sommes S_n^r pour $0 \leqslant r$ impair $\leqslant 2p-1$.

d. En déduire les calculs successifs de S_n^1, S_n^3, S_n^5 en fonction de $N = n(n+1)$ ainsi que le fait que S_n^{2p+1} est un polynôme de degré $p+1$ en la variable $N = n(n+1)$. t

3. Soit (a_n) une suite strictement croissante d'entiers, avec $a_0 = 1$.

a. Montrer que tout entier naturel non nul N s'écrit comme somme de nombres a_n

distincts si et seulement si $a_{n+1} \leqslant 2a_n$ pour tout n entier naturel.
Indiquer comment on peut obtenir une décomposition de N.

b. Pour quelle suite (a_n) la décomposition est-elle toujours unique ?

ENSEMBLES

4. * : Étude de la différence symétrique.

a. X, Y étant deux ensembles, montrer que $(X \cup Y)\backslash(X \cap Y) = (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X)$; on note cet ensemble $X \triangle Y$.

b. Montrer l'associativité de Δ.

c. Donner une formule générale pour $X_1 \Delta X_2 \Delta \ldots \Delta X_n$.

d. A étant une partie d'un ensemble E, montrer que l'application $f \begin{cases} P(E) \to P(E) \\ X \mapsto A \Delta X \end{cases}$ est bijective et donner f^{-1}.

e. En déduire que dans un ensemble fini, il y a autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties ayant un nombre impair d'éléments (prendre $A = \{x_0\}$).

5. * : Soient A et B deux parties finies de $\mathbb{N}$, $|A| = n, |B| = p$; on pose $A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$. montrer que $|A + B| \leqslant np$ et donner une exemple où $|A + B| = np$. Faire de même avec le produit.

6. Montrer que $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$; généraliser à $\displaystyle\bigcup_{\substack{J \subset I \\ |J| = p}} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right)$ où $I = \{1, 2, .., n\}$.

7. On se donne une famille finie d'ensembles $E_1, E_2, .., E_n$, indexée par $I = \{1, 2, .., n\}$, vérifiant $\forall i, j \in I \ \exists k \in I / \ E_i \cup E_j \subset E_k$; montrer par récurrence sur n que $\exists k \in I / \ \forall i \in I \quad E_i \subset E_k$. Montrer que ce résultat peut être faux pour une famille infinie d'ensembles.

8. Les chaînes et antichaînes.

Étant donné un ensemble fini E ayant n éléments, on désigne par *chaîne*, un ensemble C de parties de E totalement ordonné pour l'inclusion (c'est-à-dire que $\mathsf{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$ avec $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_p \subset E$) ; à l'opposé, on désigne par antichaine un ensemble A de parties de E telles que deux d'entre elles ne soient jamais incluse l'une dans l'autre ; le nombre de parties composant une chaîne ou une antichaîne sera appelé sa taille ; le but de l'exercice est de déterminer les antichaînes de taille maximale de E.

a. Quelle est la taille maximale d'une chaîne et combien y a-t-il de chaînes de cette taille ?

b. Considérons une antichaine A et l'un de ses éléments A, ayant k éléments ;

i. Montrer qu'il y a $k!(n-k)!$ chaînes de taille maximale ayant A comme élément.

ii. Notons a_k le nombre d'ensembles à k éléments de l'antichaîne A ; déduire de (i) et (a) le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k k!(n-k)! \leqslant n!$, et en déduire que $|\mathsf{A}| \leqslant \begin{pmatrix} n \\ \left[\frac{n}{2}\right] \end{pmatrix}$.

iii. Déterminer toutes les antichaînes de taille $\begin{pmatrix} n \\ \left[\frac{n}{2}\right] \end{pmatrix}$ (séparer les cas n pair et n impair).

GÉOMÉTRIE

9. * Un problème babylonien.

Un paysan possède un champ trapézoïdal $ABDC$) ($(AB) \parallel (CD)$, $AB = a, CD = b$) qu'il souhaite partager en deux trapèzes $(ABYX)$ et $(XYDC)$ pour ses deux fils ; soit h la distance entre (AB) et (XY) et k celle entre (XY) et (CD).

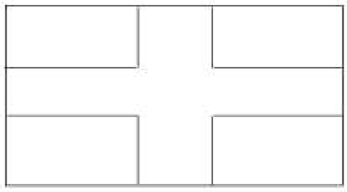
a. Exprimer $c = XY$ en fonction de a, b, h, k.

b. Déterminer c en fonction de a et b lorsque le partage est équitable.

c. Déterminer deux entiers distincts a et b tels que c , déterminé dans b) est aussi entier.

d. Facultatif : déterminer une famille infinie de couples d'entiers distincts (a, b) tels que que c soit entier.

10. *



Ce drapeau a toutes ses dimensions entières, et les deux bandes sont de même largeur.

On demande de déterminer le plus petit drapeau tel que l'aire occupée par les 4 rectangles soit identique à l'aire restante.

11. Même question que la précédente, mais on souhaite cette fois que l'aire occupée par les 4 rectangles soit le double de l'aire restante. Cela nécessitera un balayage informatique.

12. La distance de Manhattan.

On définit dans le plan la "distance de Manhattan" entre deux points A et B comme $d(A,B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$.

On demande de définir, d'étudier, et de dessiner le "cercle de Manhattan" de centre A et de rayon R, ainsi que la "médiatrice de Manhattan" de deux points A et B.

Facultatif : étudier l'"ellipse de Manhattan" lieu des points vérifiant $\frac{d(M,A)+d(M,B)}{2} = a$.

13. On considère les propriétés suivantes d'un sous-ensemble borné F de l'espace :

a. C : il possède un centre de symétrie (i.e. il est invariant par une symétrie centrale)

A : il possède un axe de symétrie (i.e. il est invariant par une symétrie axiale orthogonale)

P : il possède un plan de symétrie (i.e. il est invariant par une symétrie plane orthogonale)

Donner, si c'est possible, un exemple de F vérifiant chacune des propriétés suivantes :

a. 1: $C\,A\,P$; 2 : $\overline{C}\,A\,P$; 3 : $C\,\overline{A}\,P$; 4 : $C\,A\,\overline{P}$; 5 : $\overline{C}\,\overline{A}\,P$; 6 : $C\,\overline{A}\,\overline{P}$; 7 : $\overline{C}\,A\,\overline{P}$; 8 : $\overline{C}\,\overline{A}\,\overline{P}$.

Peut-on trouver un objet $\overline{C}\,\overline{A}\,\overline{P}$ qui soit invariant par une rotation non réduite à l'identité ?

FONCTIONS USUELLES

14. * : Déterminer pour quelles valeurs de x réel on a $x^2 > 2^x$.

COMPLEXES

15. :

a. Démontrer de la gauche vers la droite : $\frac{\sin nx}{\sin x} = \sum\limits_{\substack{-n+1 \leqslant p \leqslant n-1 \\ p = n-1\ [2]}} e^{ipx}$.

b. En déduire une linéarisation de $\frac{\sin nx}{\sin x}$. (Séparer les cas n pair et n impair).

c. En déduire pour n pair $\geqslant 2$ la relation entre polynômes de Tchebychef :

$U_{n-1} = 2(T_1 + T_3 + \ldots + T_{n-1})$ et déterminer la relation similaire pour n impair.

16. : ESTP 1986

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \neq \pm\alpha (\bmod 2\pi)$: $f_n(x) = \dfrac{\cos nx - \cos n\alpha}{\cos x - \cos\alpha}$ où α est un réel donné.

a. Déterminer $l = \lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x)$, quand $\alpha \neq k\pi$, k entier.

b. Dans le cas où $\alpha = k\pi$, k entier, calculer encore l.

c. On suppose désormais $\alpha \neq k\pi$, comme dans la première question. En posant $z = e^{ix}$ et $a = e^{i\alpha}$, linéariser l'expression $f_n(x)$, c'est-à-dire la mettre sous la forme :

$f_n(x) = c_n(\alpha) + 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k(\alpha).\cos(n-k)x$, où les $c_k(\alpha)$ sont des constantes que l'on calculera.

APPLICATIONS

17. *: Pseudo-inverse.

a. Une application g de F dans E est appelée un *pseudo-inverse* d'une application f de E dans F si elle vérifie : $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

b. Montrer que toute application possède un pseudo-inverse.

c. Que dire si f est bijective ?

d. Déterminer par exemple un pseudo-inverse de f définie de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même par $f(x,y) = (2x, 0)$.

e. Montrer que si $E = F$, f possède un pseudo-inverse g commutant avec f (i.e. $g \circ f = f \circ g$) ssi la restriction de f à $f(E)$ définit une bijection de $f(E)$ dans lui-même et montrer que ce pseudo-inverse commutant est alors unique.

18. :

a. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications f et g de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même définies par

$$f(x,y) = (4x - 3y, 5x - 4y) \text{ et } g(x,y) = (4x + 3y, 5x - 4y)$$

b. Soient a, b, c, d 4 entiers, $\Delta = ad - bc$ et f de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même définie par $f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$; montrer que f est injective ssi $\Delta \neq 0$ et qu'elle est surjective ssi $\Delta = \pm 1$; donner l'expression de la réciproque dans le cas de bijectivité. Indications : pour l'injectivité, regarder $f(-b, a)$ et pour la surjectivité, chercher les antécédents de $(1,0)$ et de $(0,1)$.

c. Application : le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; on donne deux points P et Q à coordonnées entières, note E_0 l'ensemble des points à coordonnées entières dans le repère R et E l'ensemble des points à coordonnées entières dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$; montrer que $E = E_0$ ssi l'aire du triangle OPQ vaut 1/2.

19. :

a. Montrer que l'application f telle que $f(x,y) = x + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ définit une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. Déterminer $f^{-1}(100)$.

b. Trouver de même une bijection polynomiale g de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$. Déterminer $g^{-1}(100)$.

OPÉRATIONS

20. Dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ on définit une "addition" notée $\oplus$ et une "soustraction" notée $\ominus$ par

$$A \oplus B = \left\{a + b \,/\, a \in A \text{ et } b \in B\right\} \text{ et } A \ominus B = \overline{\overline{A} \oplus B}$$

a. Dessiner $A \oplus B$ et $A \ominus B$ lorsque A est le disque fermé de centre O et de rayon 1 et B le disque fermé de centre O et de rayon 1/2 ; idem si A est le carré plein de centre O de côté 2, à côtés parallèles aux axes, et B comme précédemment.

b. Étudier la loi $\oplus$.

c. A-t-on $A \oplus (B \ominus C) = (A \oplus B) \ominus C$? A-t-on $A \ominus (B \oplus C) = (A \ominus B) \ominus C$? A-t-on $A \ominus (B \ominus C) = (A \ominus B) \oplus C$?

21. : Pseudo-symétriques.

Dans un ensemble E muni d'une opération $*$ associative, on dit que y est un pseudo-symétrique de x si $x * y = y * x, x * y * x = x$ et $y * x * y = y$; un élément ayant un pseudo-symétrique est dit pseudo-symétrisable.

a. Que dire si E possède un élément neutre e et que x est symétrisable ?

b. Que dire si $x * x = x$ (exemple : 0) ?

c. Montrer l'unicité d'un pseudo-symétrique éventuel.

d. Si x a un pseudo-symétrique x' et y un pseudo-symétrique y', quelle condition suffit-il de rajouter pour être sur que $x * y$ soit pseudo-symétrisable ?

DÉNOMBREMENTS, PROBAS.

22. Des coefficients vérifiant des pseudo-relations de Pascal.

a. On définit le symbole $\left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$ par

$$\begin{cases} \left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle = 1 \text{ si } p = 0, n \text{ ou } n-1 \\ \left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n-2 \\ p \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right\rangle \text{ pour } 1 \leqslant p \leqslant n-2 \end{cases}$$

Montrer que $\left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle$ est en fait un coefficient binomial classique.

b. On définit le symbole $\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$ par

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\} = 1 \text{ si } p = 0\,, \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1 \text{ si } n = 0, 0 \text{ sinon} \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ p-1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ p \end{matrix} \right\} \text{ pour } 1 \leqslant p \leqslant n-1 \end{cases}$$

Montrer que $\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}$ est en fait un coefficient binomial classique.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = F_{n+2}$ (suite de Fibonacci).

23. :

a. Déterminer l'espérance du nombre d'éléments d'une partie d'un ensemble E à n éléments. En déterminer la variance et l'écart-type.

b. Déterminer l'espérance du nombre d'éléments de l'intersection de deux parties de E. Idem pour la réunion.

24. : Dates d'anniversaire.

a. Pour une application f de E_n dans E_p choisie au hasard, quel est le nombre moyen d'éléments de $f(\mathsf{E}_n)$?

b. Dans une classe de 44 élèves, quel est le nombre moyen de dates d'anniversaires différentes ?

25. * : Combinaisons avec répétitions.

Notons $\left(\!\!\binom{n}{p}\!\!\right)$ le nombre de combinaisons avec répétitions de longueur p formées à partir de n objets ($p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$)

a. Déterminer par exemple : $\left(\!\!\binom{4}{3}\!\!\right)$, puis

$\left(\!\!\binom{1}{p}\!\!\right), \left(\!\!\binom{2}{p}\!\!\right), \left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right), \left(\!\!\binom{n}{1}\!\!\right), \left(\!\!\binom{n}{2}\!\!\right)$.

b. Soit p_i le nombre de répétitions de l'objet n° i dans la combinaison ($0 \leqslant p_i \leqslant p$) ; on a donc $\sum_{i=1}^{n} p_i = p$. En fait, une combinaison étant entièrement déterminée par la connaissance des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $\left(\!\!\binom{n}{p}\!\!\right)$ est le nombre de n-uplets $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ d'entiers naturels dont la somme vaut p. Cette remarque doit vous aider à montrer que $\left(\!\!\binom{n+1}{p}\!\!\right) = \sum_{j=0}^{p} \left(\!\!\binom{n}{j}\!\!\right)$.

c. Remplir le tableau des $\left(\!\!\binom{n}{p}\!\!\right)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 4$ et $0 \leqslant p \leqslant 4$.

d. Remarquer que $\left(\!\!\binom{n}{p}\!\!\right)$ peut se mettre sous forme d'un coefficient binomial et démontrer cette formule par récurrence sur n.

e. Combien y a-t-il de monômes $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}$ en les variables $x_1, \ldots, x_p$ de degré $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p \leqslant q$? En déduire qu'il y en a autant que de monômes $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_q^{\alpha_q}$ en les variables $x_1, \ldots, x_q$ de degré $\leqslant p$.

26. : Nombre de partitions à k composantes.

Soit E un ensemble à n ($\geqslant 1$) éléments, k un entier entre 1 et n. Soit $p_{n,k}$ le nombre de partitions de E comportant k composantes, et $p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n,k}$ le nombre de partitions de E.

a. Donner la relation qui lie $p_{n+1,k}$ à $p_{n,k}$ et $p_{n,k-1}$. Remplir le tableau des $p_{n,k}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$ et $1 \leqslant k \leqslant 5$.

b. On pose $f(x) = e^{e^x}$; calculer $f^{(n)}(x)$; constater que les nombres $p_{n,k}$ apparaissent et le démontrer.

c. On admet (développement en série de Taylor, vu plus tard) que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$; en déduire que $e^{e^x} = e \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{x^n}{n!}$, avec la convention $p_0 = 1$.

d. Appliquant aussi le développement en série de Taylor à e^x, donner une autre expression de e^{e^x} et en déduire que $\boxed{p_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}}$.

27. : Déterminer le nombre de partitions *équitables* d'un ensemble à n éléments.

28. : Dénombrer les applications d'un ensemble E de taille n dans lui-même qui sont involutives, c'est-à-dire vérifiant $f \circ f = id_E$.

Les premières valeurs sont : 1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, 2620, 9496.

29. : Nombre de fractions à n étages.

a. Il y a 2 fractions à 3 étages: $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ et $\frac{a}{\frac{b}{c}}$; il y en a 5 à 4 étages :

$\frac{\frac{\frac{a}{b}}{c}}{d}, \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{d}, \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \frac{a}{\frac{\frac{b}{c}}{d}}, \frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}}$; on note f_n le nombre de fractions à n étages ; on demande de déterminer une relation de récurrence permettant de calculer f_{n+1} connaissant $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

b. Donner les résultats simplifiés des f_5 fractions à 5 étages, ou bien faire un programme déterminant les fractions de l'étape n.

ARITHMÉTIQUE

30. :

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur n pour que l'ensemble des nombres de 1 à n puisse être partagé en deux sous-ensembles de même somme, comme par exemple $\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\}$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur n pour que la série des nombres de 1 à n , chacun étant répété deux fois, puisse être rangée dans un ordre tel qu'il y ait un nombre entre les deux "1", deux entre les deux "2", $\ldots$, n entre les deux "n", comme par exemple $3,1,2,1,3,2$.

31. Le nombre $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ peut-il être un nombre entier ?

32. : Exercice python.

Déterminer les puissances parfaites comprises entre 4 et n (application pour $n = 200$) qui sont somme de deux puissances parfaites différentes de 0 et 1 (comme $3^4 = 7^2 + 2^5$) et celles qui ne le sont pas ; pour celles qui ont une décomposition, on donnera celle-ci.

33. Décomposition gloutonne en somme de carrés.

Etant donné un entier naturel non nul a on définit deux suites (u_n) et (a_n) par $u_0 = a,$ et pour tout naturel n, si u_n est nul, la suite s'arrête là, et sinon, a_{n+1} est le plus grand carré inférieur ou égal à u_n et $u_{n+1} = u_n - a_{n+1}$.

Par exemple, pour $a = 15,\ a_1 = 9,\ u_1 = 6,\ a_2 = 4, u_2 = 2, a_3 = 1,\ u_3 = 1,$ $a_4 = 1, u_4 = 0,$ et on s'arrête là.

Justifier que quelque soit a la suite (u_n) s'arrête toujours, et en déduire que tout entier naturel non nul est somme de carrés non nuls.

Programmer l'obtention de la suite (u_n) (python ou calculatrice) ; on note $f(a)$ le nombre de termes non nuls de la suite (u_n) (par exemple, $f(15) = 4$). Quel est le plus petit entier a tel que $f(a) = 5$? $f(a) = 6$? $f(a) = 7$? $f(a) = 8$?

34. Montrer que le produit de n entiers naturels consécutifs est divisible par $n!$

a. En utilisant les coefficients binomiaux.

b. Sans utiliser les coefficients binomiaux, mais en utilisant la relation : $(k+1)\ldots.(k+n) = k(k+1)\ldots.(k+n-1) + n.(k+1)\ldots.(k+n-1)$

c. En utilisant le fait (cf. exercice 32 d'arithmétique) que pour tout nombre premier p, $v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$, et en déduisant que $v_p((n+k)!) \geqslant v_p(n!) + v_p(k!)$ ($v_p(a)$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a).

35. Déterminer tous les couples de rationnels > 0 (x,y) avec $x < y$ vérifiant $x^y = y^x$.

36. Les palindromes.

Un nombre palindrome est un nombre qui se lit dans un base donnée dans les deux sens, comme 1234321. Lorsqu'on ajoute à un nombre son "inversé", on n'obtient malheureusement pas toujours un palindrome, à cause des retenues : par exemple, $338 + 833 = 1171$ qui n'est pas un palindrome, mais $1171 + 1711 = 1881$ est, lui, un palindrome.

Lorsqu'on réitère l'action d'ajouter à un nombre son inversé, on obtient souvent comme précédemment un nombre palindrome en un nombre fini de coups, mais bizarrement, certains nombres ne semblent jamais en donner (en fait, on n'a pas prouvé qu'ils ne donnaient *jamais* de palindrome).

a. Pouvez-vous trouver (sans moyen informatique) 11 nombres < 1000 ayant ce comportement bizarre en base 10, sachant que 196 est l'un d'entre eux ?

b. Pouvez-vous démontrer que, en base deux, 10110 ne donnera jamais un palindrome ?

37. : Décomposition binomiale d'un entier.

a. Soit k un entier $\geqslant 1$. Montrer qu'à tout entier $n \geqslant 1$ est associée une unique suite finie d'entiers b_i vérifiant $0 \leqslant b_1 < \ldots < b_k$ tels que

$$n = \binom{b_1}{1} + \binom{b_2}{2} + \ldots + \binom{b_k}{k}.$$

38. :

a. Montrer qu'un entier de la forme $8k - 1$ ne peut pas être somme de trois carrés.

b. Supposant avoir démontré que tout entier naturel impair qui n'est pas de la forme $8k - 1$ est somme de 3 carrés (théorème difficile !), démontrer que *tout* entier naturel est somme de 3 nombres triangulaires (un nombre triangulaire est un nombre de la forme $0 + 1 + 2 \ldots + n$).

39. : Décomposition fibonaccienne d'un entier.

On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; on appelle "nombre de Fibonnacci" tout entier de la forme F_n avec $n \geqslant 2$; montrer que tout entier $\geqslant 1$ peut s'écrire de façon unique comme somme de nombres de Fibonacci distincts non consécutifs ; donner par exemple la décomposition de $F_n - 1$.

40. Valuation en p de $n!$.

Soit p un nombre premier ; on désigne par $s_p(n)$ la somme des chiffres de l'entier naturel n écrit en base p.

a. Montrer que $s_p(n+1) = s_p(n) + 1 - (p-1)v_p(n+1)$ (v_p désigne la valuation en p).

b. En déduire que $v_p(n!) = \dfrac{n - s_p(n)}{p-1}$.

c. En déduire par exemple le nombre zéros terminant l'écriture de 100! en base 10.

d. En déduire aussi que $v_p(n!) \sim \dfrac{n}{p-1}$ quand n tend vers l'infini.

41. :

a. Démontrer que parmi 7 entiers pris au hasard, on peut toujours en trouver 4 dont la somme est divisible par 4 ; peut-on abaisser le nombre 7 ?

b. Trouver le plus petit n tel que parmi n entiers, on peut toujours en trouver 8 dont la somme est divisible par 8.

c. Est-il exact que parmi $2n - 1$ entiers, on puisse toujours en trouver n dont la somme est divisible par n ?

42. : On suppose connu que si a est un naturel qui n'est pas un carré, alors $\sqrt{a}$ est irrationnel.

a. Montrer que si a, b, c sont trois entiers vérifiant $\sqrt{a} = b + \sqrt{c}$, a et $c > 0$, a non carré, alors $b = 0$ et $c = a$.

b. Soient a et b deux entiers naturels, b non carré.

Montrer qu'il existe deux entiers naturels u et v tels que $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ se mette sous la forme $\sqrt{u} + \sqrt{v}$ si et seulement si b est pair et $a^2 - b$ est un carré c^2, et qu'alors

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

c. Donner des exemples.

43. : **Le théorème chinois** :

a. Déterminer tous les entiers relatifs qui deviennent divisibles par 5 si on leur ôte 1, et divisibles par 4 si on leur ajoute 1.

b. Soit a et b deux entiers premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe donc u et v entiers tels que $au + bv = 1$.

Démontrer le **théorème chinois** : pour tout couple d'entiers (a_1, b_1) donné, on a :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ [a] \\ x \equiv b_1 \ [b] \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv bv \cdot a_1 + au \cdot b_1 \ [ab]$$

On ramène donc ainsi un système de deux congruences à une seule congruence.

c. Résoudre à l'aide du théorème chinois les trois problèmes suivants :

i. Le problème chinois historique du 4ème siècle auquel est dû le nom du théorème :

Nous avons des objets en nombre inconnu, mais nous savons que :
- si nous les regroupons par paquets de 3, il en reste 2.
- si nous les regroupons par paquets de 5, il en reste 3.
- si nous les regroupons par paquets de 7, il en reste 2.

Combien y-a-t-il d'objets ?

ii. Un bon chrétien...

Le numéro de l'année de naissance d'un de mes aïeux a la particularité suivante : il est divisible par 2 ; il est divisible par 3 si on lui ôte 1, par 5 si on lui ôte 2, par 7 si on lui ôte 3, et par 11 si on lui ôte 4.

Mais de quelle année s'agit-il donc, sachant que mon ancêtre a toujours été un bon chrétien ?

iii. Les pirates et le cuisinier...

17 pirates se sont emparés d'un butin composé de pièces d'or identiques. Ils décident de se les partager équitablement, et de donner le reste, soit 3 pièces d'or, au cuisinier. Mais entre temps les pirates se querellent, et 6 d'entre eux meurent. Il reste alors 4 pièces d'or au cuisinier. Ensuite le bateau fait naufrage ; il ne reste que 6 pirates et le cuisinier. Le partage laisserait alors 5 pièces à ce dernier. Mais le cuisinier décide d'empoisonner le reste des pirates.

Quelle fortune minimale peut-il espérer obtenir ?

d. On suppose maintenant a et b quelconques (non nuls) et on cherche toujours à résoudre le système $\begin{cases} x \equiv a_1 \ [a] \\ x \equiv b_1 \ [b] \end{cases}$; soient $d = PGCD(a, b)$ et $m = PPCM(a, b)$; montrer que si $a_1 - b_1$ n'est pas multiple de d, il n'y a pas de solution mais que dans le cas contraire le système se ramène à une congruence $x \equiv m_1 \ [m]$.

44. : Écriture $n = au + bv$ avec u et $v \geqslant 0$.

n est un entier naturel et a et b sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

a. Montrer qu'il existe une unique écriture de n sous la forme $au + bv$ avec u, v entiers et $0 \leqslant u \leqslant b - 1$.

b. Montrer que si $n \geqslant (a-1)(b-1)$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = au + bv$.
Indication : $n \geqslant (a-1)(b-1) \Leftrightarrow n > ab - a - b$

c. Montrer que pour $n = (a-1)(b-1) - 1$ on ne peut pas trouver de $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = au + bv$.

d. Facultatif : soient a, b, c trois entiers naturels non nuls premiers entre eux deux à deux ; démontrer que le plus grand entier naturel à ne pas pouvoir se mettre sous la forme $abu + bcv + caw$ avec $(u, v, w) \in \mathbb{N}^3$ est $2abc - ab - bc - ca$.

45. Les nombres autopotents : exercice de maths et info.

On dit qu'un entier naturel a est autopotent en base b s'il est égal à la somme des puissances n -ième de ses chiffres en base b, n étant le nombre de ses chiffres en base b.

Par exemple 153 est autopotent en base 10 car il possède 3 chiffres et $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$.

a. Effectuer un programme python déterminant tous les nombres autopotents en base b ayant 2, 3, 4 , ou 5 chiffres. Donner les résultats dans le cas de la base 10.

b. Démontrer que dans une base donnée, il n'y a qu'un nombre fini de nombres autopotents.

c. Donner tous les nombres autopotents en base 2 et 3.

46. Un faux crible d'Eratosthène ; exercice d'informatique.

Dans la liste des entiers naturels, on barre un nombre sur 2 :

$$1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \ldots.$$

Puis dans la liste restante, on barre un nombre sur 3 :

$$1, 3, \cancel{5}, 7, 9, \cancel{11}, 13, \ldots$$

puis on barre un nombre sur 4, un nombre sur 5 etc. à l'infini ; soit u_n le nombre de nombres $\leqslant n$ restant dans cette liste ; faire un programme python permettant de calculer u_n ; vers quelle limite semble tendre $\dfrac{4n}{u_n^2}$ quand $n \to +\infty$?

47. Une suite très entière...

On définit une suite par $u_1 = 2$ et $u_n = \dfrac{2 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k^2}{n}$.

a. Trouver une relation de récurrence simple pour (u_n).

b. Trouver une méthode informatique permettant de montrer que les 42 premiers termes de la suite sont entiers, mais le 43-ème ne l'est pas.