

Les sujets d'étude du premier trimestre sauf les 2), 5), 8), 9), 10), 15), 16, 17), 20), 22), 24), peuvent être encore pris.

GEOMÉTRIE ET INFO

1. : On se donne 3 réels α, β, γ dont la somme est non nulle et tels que deux d'entre eux n'ont pas la même somme que le troisième ; soit $A' = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ -\alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $B' = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$, $C' = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix}$, $G = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$; on demande
- d'exprimer G comme barycentre de A', B', C' et comme barycentre de A, A' , de B, B' de C, C'
 - d'exprimer A comme barycentre de B', C' , B comme barycentre de C', A' , et C comme barycentre de A', B' .
 - de faire un programme mathematika, avec pour données d'entrée les coordonnées de A, B, C et les valeurs de α, β, γ , renvoyant la figure illustrant la configuration précédente.

OPERATIONS

2. Dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ on définit une "addition" notée \oplus et une "soustraction" notée \ominus par

$$A \oplus B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\} \text{ et } A \ominus B = \overline{A \oplus B}$$

- Dessiner $A \oplus B$ et $A \ominus B$ lorsque A est le disque fermé de centre O et de rayon 1 et B le disque fermé de centre O et de rayon $1/2$; idem si A est le carré plein de centre O de côté 2, à côtés parallèles aux axes, et B comme précédemment.
- Étudier la loi \oplus .
- A-t-on $A \oplus (B \ominus C) = (A \oplus B) \ominus C$? A-t-on $A \ominus (B \oplus C) = (A \ominus B) \oplus C$? A-t-on $A \ominus (B \ominus C) = (A \ominus B) \oplus C$?

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

3. : La courbe du nageur emporté par le courant, et celle du chien suivant son maître.

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Une personne $M(x, y)$ nage dans une rivière dont le courant est uniforme de vitesse $\vec{v} = v\vec{j}$. Elle tente de rallier le point O en nageant toujours dans la direction de O à une vitesse constante v' par rapport au courant ; on supposera dans ce sujet que $v' = v (= 1)$, car c'est le cas le plus simple mathématiquement (mais il n'est pas interdit de tenter de résoudre le cas v' quelconque).

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le nageur est en $A(1, 0)$, on demande sa trajectoire, en quel point il atteindra l'axe Oy , et au bout de combien de temps.

Indications (à justifier bien sur) : $\vec{V}(M) = \vec{j} - \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$; $xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = \frac{1 - x^2}{2}$; $t = -\ln \sqrt{x} + \frac{1 - x^2}{4}$.

- Quelle est la trajectoire du nageur dans le plan mobile de la rivière, c'est-à-dire dans le plan rapporté au repère $(0, t), \vec{i}, \vec{j}$? La tracer.

Réponse : $Y = y - t = \frac{1 - x^2}{4} + \ln \sqrt{x}$.

- Montrer que cela revient à chercher la trajectoire d'un chien $M(x, y)$ trottant à vitesse constante dans la direction de son maître $M_0(0, -t)$ qui suit la droite Oy vers le bas, à vitesse constante.

SUITES

4. : Déterminer la valeur de

$$\underbrace{1}_{1 \text{ impair}} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}_{2 \text{ impairs}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}}_{3 \text{ impairs}} - \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}}_{4 \text{ impairs}} - \frac{1}{8} + \dots$$

5. : Sommes de familles d'inverses d'entiers finies ou infinies.

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers > 0 . On désigne par $S(a_n)$ la limite de $\sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n}$ quand N tend vers $+\infty$ (Par exemple, $S(n^2) = \frac{\pi^2}{6}$).

- (a) Montrer que $a_n = O(n) \Rightarrow S(a_n) = +\infty$.
- (b) Montrer que si $n^\alpha = O(a_n)$ avec $\alpha > 1$ alors $S(a_n) < +\infty$.
- (c) Est-ce que $a_n \gg n \Rightarrow S(a_n) < +\infty$?
- (d) Est-ce que $S(a_n) < +\infty \Rightarrow a_n \gg n$?

6. On pose $u_1 = 1; u_2 = u_3 = 1/2; u_4 = u_5 = u_6 = 1/3$; etc

- (a) Définir correctement cette suite et déterminer un équivalent simple de u_n .
- (b) On pose $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$; déterminer $\lim s_n$ et un équivalent simple de s_n .

7. On définit deux suites récurrentes doubles par $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 0, v_1 = 1 \\ v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{n} + v_n \end{cases}$.

On demande de déterminer des formules générales pour u_n et pour v_n et de déterminer $\lim \frac{u_n}{n}$ et $\lim \frac{v_n}{n^2}$.

8. : Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = [an]$. Par exemple pour $a = \sqrt{2}$, on a $u_n = (0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \dots)$

- (a) Quelle est la moyenne des entiers $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$?
- (b) A quelle condition nécessaire et suffisante la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est-elle convergente ?

9. : Une suite de rationnels de limite un irrationnel a des dénominateurs qui tendent vers l'infini.

- (a) Soit (r_n) une suite de rationnels > 0 de limite un irrationnel $x > 0$; on pose $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n et q_n entiers > 0 ; on se propose de montrer que $\lim q_n = +\infty$. Supposons donc, par l'absurde, que ce ne soit pas le cas.
- (b) Montrer qu'alors la suite (q_n) possède une sous-suite $(q_{\varphi(n)})$ majorée.
- (c) En utilisant le fait (à justifier) qu'à partir d'un certain rang, on a $\left| x - \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} \right| < 1$, donc que $p_{\varphi(n)} \leq q_{\varphi(n)}(1+x)$, montrer que la suite $(p_{\varphi(n)})$ est elle aussi majorée.
- (d) En déduire que la suite $(r_{\varphi(n)})$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et qu'elle est donc constante APCR.
- (e) En déduire l'affreuse contradiction et conclure.

10. : Sur les sommes $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$.

On pose $e_n(p) = \sum_{k=0}^n \frac{k^p}{k!}$; on sait que la suite $(e_n(0))_n$ est convergente vers e .

- (a) Montrer que la suite $(e_n(p))_n$ est convergente ; désignons par $e(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ sa limite.
- (b) Trouver une relation de récurrence entre $e(p+1)$ et les $e(q)$ pour $0 \leq q \leq p$; calculer $e(p)$ pour $p = 1, 2, 3, 4, 5$.
- (c) En déduire que $e(p)/e$ est le nombre de partitions d'un ensemble à p éléments (appelé nombre de Bell).

11. : Est-il exact que de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone ?

12. :

- (a) Est-ce que si $a_n \rightarrow 0$, alors forcément $(a_1 a_2 \dots a_n + a_2 \dots a_n + \dots + a_{n-1} a_n + a_n) \rightarrow 0$?

(b) Est-ce que si $u_{n-1} \ll u_n$, alors forcément $(u_1 + u_2 + \dots + u_n) \sim u_n$?

13. : On aimerait avoir une définition précise pour la notion de suite réelle "globalement croissante", comme par exemple $(n + (-1)^n)$.

Le cahier des charges impose que les suites croissantes et les suites qui tendent vers l en restant $\leq l$ soient globalement croissantes. Par contre une suite strictement décroissante, ou une suite comme $((-1)^n n)$ ne doit pas être globalement croissante.

Quelles sont alors les suites à la fois globalement croissantes et globalement décroissantes ?

14. : Approximations de $\sqrt{2}$ par des rationnels.

(a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$

(b) Définir à l'aide d'une récurrence simple les suites (a_n) et (b_n) . En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

(c) Démontrer que chaque suite (a_n) et (b_n) vérifie la même relation de récurrence double.

(d) Démontrer que $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.

(e) En déduire que $a_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2} + o(1)$ et $b_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} + o(1)$ ainsi que $\lim \frac{a_n}{b_n}$.

(f) Montrer que $a_n \leq b_n$ puis que $\left| \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n} \frac{1}{b_n} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{b_n^2}$

Rem : cela démontre que $\sqrt{2}$ est approchable à l'ordre 2 par les rationnels (ce résultat est valable pour tout irrationnel).

(g) Montrer que si (u_n) est la suite de Héron de l'exercice 39 sur les suites, avec $a = 2$, alors $u_n = \frac{a2^n}{b2^n}$.

15. La décomposition égyptienne gloutonne.

Une fraction égyptienne est une fraction de numérateur 1 et de dénominateur > 0 (leur nom vient de ce que c'était les seules que les Egyptiens connaissaient).

Étant donné un réel $x_0 \in]0, 1[$, on lui retranche la plus grande fraction égyptienne qui lui soit inférieure ou égale, pour obtenir un nombre x_1 ; si x_1 est nul, on s'arrête, sinon, on recommence.

(a) Définir rigoureusement x_{n+1} à partir de x_n .

(b) Montrer que si x_0 est irrationnel, $\lim x_n = 0$ et si x_0 est rationnel, alors la suite (x_n) est finie (ce qui démontre que tout rationnel est somme d'un nombre fini de fractions égyptiennes de dénominateurs distincts).

16. : Étudier la suite définie par :

$$\begin{aligned} 1. u_0 &= a, u_1 = b \text{ (réels)} \\ 2. u_{n+2} &= |u_{n+1} - u_n| \end{aligned}$$

17. : Une définition de $x!$ pour tout x réel.

(a) Montrer que pour tout naturel k $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k n!}{(k+1) \dots (k+n)} = k!$.

(b) Pour n naturel et $x > -1$ on pose $f_n(x) = \frac{n^x n!}{(x+1) \dots (x+n)}$;

i. Montrer que si $x \geq 0$ la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante majorée.

ii. Montrer que si $-1 < x \leq 0$ la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante minorée.

(c) On pose donc $x! = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ pour $x > -1$; montrer que $x! = x(x-1)!$ pour $x > 0$.

(d) Donner $\left(\frac{1}{2}\right)!$ à 10^{-2} près.

18. : Suite de l'exercice 27 sur les suites.

On pose $a = 1/(2\sqrt{3})$ et $b = 1/3$; que vaut $1/l$? Montrer qu'alors $1/b_n$ et $1/a_n$ sont respectivement les demi-longueurs des polygones à $6 \cdot 2^n$ côtés inscrits et circonscrits d'un cercle de rayon 1 (longueurs qu'Archimède avait utilisées pour déterminer la valeur de π).

19. Une suite chaotique.

On considère la suite récurrente définie par son premier terme u_0 et la relation $u_n = f(u_{n-1})$ où $f(x) = 4x(1-x)$.

- Visualiser cette suite pour différentes valeurs de u_0 . Que se passe-t-il pour $u_0 < 0, u_0 = 0, u_0 = 1, u_0 > 1$?
- Montrer que si $u_0 \in]0, 1[$, il existe un unique $\theta \in]0, \pi/2[$ tel que $u_0 = \sin^2 \theta$; calculer alors $f(u_0)$ et en déduire une expression de u_n en fonction de θ .
- Déterminer en utilisant b) les points fixes de $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$ pour p entier ≥ 1 . Les déterminer exactement dans le cas $p = 3$. Combien y en a-t-il dans le cas général?
- Visualiser la suite (u_n) pour u_0 égal successivement à chaque point fixe dans le cas $p = 2$ et à un point fixe différent des précédents dans le cas $p = 3$ (autant de figures que de points fixes).

20. Les lampions.

On considère un rectangle de longueur 2π et de largeur 1 quadrillé par mn rectangles identiques, avec m rectangles en largeur et n en longueur. Ce rectangle est courbé en un cylindre de hauteur 1 et de rayon 1 ; chaque petit rectangle curviligne possède 4 sommets et un centre (appartenant au cylindre) et définit donc 4 triangles plans. Le lampion $L_{m,n}$ est le polyèdre formé de ces $4mn$ triangles.

- Montrer que l'aire totale du lampion est égale à $A_{m,n} = 2n \sin \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^4} (2n \sin \frac{\pi}{2n})^4} \right)$.
- Vérifier que lorsque n tend vers l'infini, $A_{n,n}$ tend bien vers l'aire du cylindre, mais que l'on peut trouver f de sorte que $A_{f(n),n}$ tende vers l'infini !
- Montrer que pour tout réel $\alpha \geq 2\pi$ il existe une suite de lampions dont l'aire tend vers α .

ALGÈBRE LINÉAIRE

21. : Démontrer que l'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre n est de dimension supérieure ou égale à $n^2 - 2n - 1$, et que sa dimension exacte est $n^2 - 2n$.

ARITHMÉTIQUE

22. Déterminer tous les couples de rationnels > 0 (x, y) avec $x < y$ vérifiant $x^y = y^x$.

23. Les palindromes.

Un nombre palindrome est un nombre qui se lit dans une base donnée dans les deux sens, comme 1234321. Lorsqu'on ajoute à un nombre son "inverse", on n'obtient malheureusement pas toujours un palindrome, à cause des retenues : par exemple, $338 + 833 = 1171$ qui n'est pas un palindrome, mais $1171 + 1711 = 1881$ est lui un palindrome.

Lorsqu'on réitère l'action d'ajouter à un nombre son inverse, on obtient souvent comme précédemment un nombre palindrome en un nombre fini de coups, mais bizarrement, certains nombres ne semblent jamais en donner (mais en fait on n'a pas prouvé qu'ils ne donnaient *jamais* de palindrome).

- Pouvez-vous trouver (sans moyen informatique) 11 nombres < 1000 ayant ce comportement bizarre en base 10, sachant que 196 est l'un d'entre eux ?
- Pouvez-vous démontrer que, en base deux, 10110 ne donnera jamais un palindrome ?

24. : Décomposition binomiale d'un entier.

- Soit k un entier ≥ 1 . Montrer qu'à tout entier $n \geq 1$ est associée une unique suite finie d'entiers b_i vérifiant $0 \leq b_1 < \dots < b_k$ tels que $n = C_{b_1}^1 + C_{b_2}^2 + \dots + C_{b_k}^k$.

- (a) Montrer qu'un entier de la forme $8k - 1$ ne peut pas être somme de trois carrés.
 (b) Supposant avoir démontré que tout entier naturel impair qui n'est pas de la forme $8k - 1$ est somme de 3 carrés (théorème difficile !), démontrer que *tout* entier naturel est somme de 3 nombres triangulaires (un nombre triangulaire est un nombre de la forme $0 + 1 + 2 + \dots + n$).

25. : Décomposition fibonaccienne d'un entier.

On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; on appelle "nombre de Fibonacci" tout entier de la forme F_n avec $n \geq 2$; montrer que tout entier ≥ 1 peut s'écrire de façon unique comme somme de nombres de Fibonacci distincts non consécutifs ; donner par exemple la décomposition de $F_n - 1$.

26. :

- (a) Démontrer que parmi 7 entiers pris au hasard, on peut toujours en trouver 4 dont la somme est divisible par 4 ; peut-on abaisser le nombre 7 ?
 (b) Trouver le plus petit n tel que parmi n entiers, on peut toujours en trouver 8 dont la somme est divisible par 8.
 (c) Est-il exact que parmi $2n - 1$ entiers, on puisse toujours en trouver n dont la somme est divisible par n ?

27. : Soient a et b deux entiers naturels ;

- (a) Montrer qu'il existe deux entiers u et v tels que $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ se mette sous la forme $\sqrt{u} + \sqrt{v}$ si et seulement si b est pair et $a^2 - b$ est un carré c^2 , et qu'alors

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

- (b) A quelle CNS existe-t-il deux *rationnels* u et v tels que $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ se mette sous la forme $\sqrt{u} + \sqrt{v}$?

28. : **Le théorème chinois :**

- (a) Déterminer tous les entiers relatifs qui deviennent divisibles par 5 si on leur ôte 1, et divisibles par 4 si on leur ajoute 1.
 (b) Soit a et b deux entiers premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe donc u et v entiers tels que $au + bv = 1$.

Démontrer le **théorème chinois** : pour tout couple d'entiers (a_1, b_1) donné, on a :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{a} \\ x \equiv b_1 \pmod{b} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv bv \cdot a_1 + au \cdot b_1 \pmod{ab}$$

On ramène donc ainsi un système de deux congruences à une seule congruence.

- (c) Résoudre à l'aide du théorème chinois les trois problèmes suivants :

i. **Le problème chinois historique du 4^{ème} siècle auquel est dû le nom du théorème :**

Nous avons des objets en nombre inconnu, mais nous savons que :

- si nous les regroupons par paquets de 3, il en reste 2.
- si nous les regroupons par paquets de 5, il en reste 3.
- si nous les regroupons par paquets de 7, il en reste 2.

Combien y-a-t-il d'objets ?

ii. **Un bon chrétien...**

Le numéro de l'année de naissance d'un de mes aïeux a la particularité suivante : il est divisible par 2 ; il est divisible par 3 si on lui ôte 1, par 5 si on lui ôte 2, par 7 si on lui ôte 3, et par 11 si on lui ôte 4.

Mais de quelle année s'agit-il donc, sachant que mon ancêtre a toujours été un bon chrétien ?

iii. **Les pirates et le cuisinier...**

17 pirates se sont emparés d'un butin composé de pièces d'or identiques. Ils décident de se les partager équitablement, et de donner le reste, soit 3 pièces d'or, au cuisinier. Mais entre temps les pirates se querellent, et 6 d'entre eux meurent. Il reste alors 4 pièces d'or au cuisinier. Ensuite le bateau fait naufrage ; il ne reste que 6 pirates et le cuisinier. Le partage laisserait alors 5 pièces à ce dernier. Mais le cuisinier décide d'empoisonner le reste des pirates.

Quelle fortune minimale peut-il espérer obtenir ?

- (d) On suppose maintenant a et b quelconques (non nuls) et on cherche toujours à résoudre le système $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{a} \\ x \equiv b_1 \pmod{b} \end{cases}$; soient $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $m = \text{PPCM}(a, b)$; montrer que si $a_1 - b_1$ n'est pas multiple de d , il n'y a pas de solution mais que dans le cas contraire le système se ramène à une congruence $x \equiv m_1 \pmod{m}$.

29. : Écriture $n = au + bv$ avec u et $v \geq 0$.

n est un entier naturel et a et b sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

- (a) Montrer qu'il existe une unique écriture de n sous la forme $au + bv$ avec u, v entiers et $0 \leq u \leq b - 1$.
 (b) Montrer que si $n \geq (a - 1)(b - 1)$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = au + bv$.
 Indication : $n \geq (a - 1)(b - 1) \Leftrightarrow n > ab - a - b$
 (c) Montrer que pour $n = (a - 1)(b - 1) - 1$ on ne peut pas trouver de $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = au + bv$.
 (d) Facultatif : soient a, b, c trois entiers naturels non nuls premiers entre eux deux à deux ; démontrer que le plus grand entier naturel à ne pas pouvoir se mettre sous la forme $abu + bcv + caw$ avec $(u, v, w) \in \mathbb{N}^3$ est $2abc - ab - bc - ca$.

30. Les nombres autopotents : exercice de maths et info.

On dit qu'un entier naturel a est autopotent en base b s'il est égal à la somme des puissances n -ième de ses chiffres en base b , n étant le nombre de ses chiffres en base b .

Par exemple 153 est autopotent en base 10 car il possède 3 chiffres et $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$.

- (a) Effectuer un programme mathematica déterminant tous les nombres autopotents en base b ayant 2, 3, 4, ou 5 chiffres. Donner les résultats dans le cas de la base 10.
 (b) Démontrer que dans une base donnée, il n'y a qu'un nombre fini de nombres autopotents.
 (c) Donner tous les nombres autopotents en base 2 et 3.

31. Un faux crible d'Eratosthène ; exercice d'informatique.

Dans la liste des entiers naturels, on barre un nombre sur 2 :

$$1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \dots$$

Puis dans la liste restante, on barre un nombre sur 3 :

$$1, 3, \cancel{5}, 7, 9, \cancel{11}, 13, \dots$$

puis on barre un nombre sur 4, un nombre sur 5 etc. à l'infini ; soit u_n le nombre de nombres $\leq n$ restant dans cette liste ; faire un programme mathematica permettant de calculer u_n ; vers quelle limite semble tendre $\frac{4n}{u_n}$ quand $n \rightarrow +\infty$?

32. Exercice d'informatique.

Ecrire un programme mathematica permettant de déterminer le plus petit entier naturel s'écrivant de deux façons différentes comme somme de deux puissances n -ième (par exemple, pour $n = 2$, c'est $50 = 25 + 25 = 49 + 1$) ; le programme doit donner la réponse pour $n = 4$ en moins de quelques secondes.

33. Exercice d'informatique.

Etant donné un irrationnel x , on appelle meilleure approximation rationnelle de x un rationnel qui est plus proche de x que tout rationnel ayant un dénominateur strictement plus petit que lui.

Ecrire un programme mathematica donnant la liste des n premières meilleures approximations rationnelles de x .

par exemple, pour $x = \pi$, on obtiendra la liste $3, 13/4, 16/5, 19/6, 22/7, 179/57, \dots$

On fera tourner le programme pour $n = 15$ et $x = \pi, e, \sqrt{2}$.

34. Les hexagones magiques.

On désigne par hexagone d'ordre n une figure formée de n couches d'hexagones autour d'un hexagone central. Sur la figure 1 est représenté l'hexagone d'ordre 2.

- (a) Déterminer le nombre de cases x_n de l'hexagone d'ordre n .

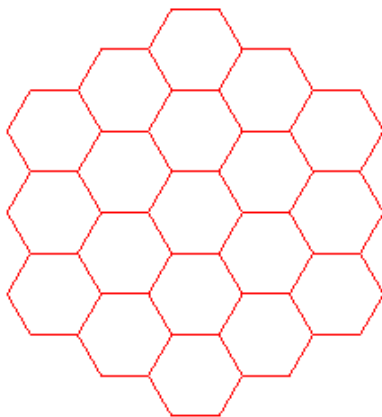


Figure 1:

- (b) Un hexagone dont chaque case contient un nombre est dit magique lorsque tous les alignements de cases ont la même somme totale, appelée constante magique.
Déterminer la constante magique d'un hexagone magique dont les cases seraient remplies par tous les entiers de 1 à x_n .
- (c) Montrer qu'il n'y a que deux valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles il y a des chances d'exister un hexagone magique avec les entiers de 1 à x_n (indication : $a = 2n + 1 \Leftrightarrow n = \frac{a-1}{2}$).
- (d) Facultatif : déterminer un hexagone magique avec les entiers de 1 à x_n pour un $n \geq 1$.

POLYNÔMES

35. : Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré.

On considère l'équation $(E) : ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- (a) Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $x = \alpha y + \beta$ est solution de (E) ssi y est solution de $(E') : y^3 + \varepsilon \frac{3}{4}y = \gamma$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

$$\text{Réponse : } \beta = -\frac{b}{3a}, \alpha^2 = \frac{4}{9} \frac{|3ac - b^2|}{a^2}, \varepsilon = \text{signe}(3ac - b^2), \gamma = -\frac{a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d}{a\alpha^3}.$$

- i. Montrer que pour $\varepsilon = -1$, les 3 solutions (éventuellement confondues) de (E') sont réelles ssi $\gamma \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4} \right]$, et qu'elles sont alors comprises entre -1 et 1.
- ii. En déduire que si l'on pose $\theta = \frac{1}{3} \arccos 4\gamma$, ces trois solutions sont

$$\cos \theta, \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \text{ et } \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

- iii. Appliquer cette méthode pour résoudre $9x^3 - 9x^2 + 1 = 0$.

- (b) Montrer que dans le cas $\varepsilon = 1$, les 3 solutions de (E') ne sont jamais toutes 3 réelles.

36. :

- (a) Montrer que les relations : $\begin{cases} P_0 = 1, P_1 = X \\ \forall n \geq 1 & P_n^2 + X^2 = 1 + P_{n-1}P_{n+1} \end{cases}$ définissent une unique suite de fractions rationnelles.

- (b) Montrer qu'en fait les P_n sont des polynômes.
 (c) Reconnaître enfin ces polynômes (avec preuve).

37. : Les séries formelles.

$K^{\mathbb{N}}$ muni des opérations $(a_k) + (b_k) = (a_k + b_k)$ et $(a_k)(b_k) = (c_k)$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ est noté $K[[X]]$ et ses éléments sont appelés des séries formelles, ou polynômes illimités.

- (a) Montrer que $K[[X]]$ est un anneau commutatif intègre dont $K[X]$ est un sous-anneau et justifier l'écriture $S = (a_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$.
 (b) Montrer que $S = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ est inversible dans $K[[X]]$ ssi $a_0 \neq 0$; donner par exemple les inverses de $1 - X$, de $1 - X - X^2$ et $1 + X + X^2$.
 (c) Montrer que toute fraction rationnelle F non nulle de degré $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme $F = X^n S$ où S est une série formelle inversible.
 (d) Si S est une série formelle non inversible, montrer qu'on peut poser $e^S = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{S^k}{k!}$; montrer la relation $e^{S+T} = e^S e^T$.

NOMBRES RÉELS

38. : Densité de la suite $(\sin n)$.

Soit ω un irrationnel > 0 ; pour n entier naturel on pose $u_n = n - \left[\frac{n}{\omega} \right] \omega = \omega \operatorname{frac} \left(\frac{n}{\omega} \right)$

- (a) Montrer que $u_n \in [0, \omega[$.
 (b) Montrer que $n \neq m \implies u_n \neq u_m$
 (c) Montrer que $u_n \leq u_m \implies u_{m-n} = u_m - u_n$ (cf 6. b.)
 (d) Soit p un entier > 0 ; On partage l'intervalle $[0, \omega[$ en p sous intervalles de longueur ω/p ; montrer que l'un de ces intervalles contient au moins deux éléments distincts de la suite (u_n) .
 (e) En déduire qu'il existe un entier $q > 0$ tel que $u_q \in [0, \frac{\omega}{p}[$.
 (f) En déduire que la suite (u_n) est dense dans $[0, \omega[$ (c'est-à-dire que l'ensemble des u_n est dense dans $[0, \omega[$).
 (g) En déduire que $\mathbb{N} - \omega\mathbb{N}$ est dense dans \mathbb{R} .
 (h) En déduire que la suite $(\sin n)$ est dense dans $[-1, 1]$.

FONCTIONS NUMÉRIQUES

39. Contre exemples concernant les limites

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur \mathbb{R} à valeurs réelles ; $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$; pour chaque énoncé, dire et prouver s'il est vrai ou faux.

- (a) Si f admet une limite en x_0 alors $|f|$ aussi.
 (b) Réciproque de l'énoncé précédent.
 (c) Si f admet une limite en x_0 , et que g n'en admet pas, alors $f + g$ n'en admet pas.
 (d) Si f admet une limite finie en x_0 , et que g n'en admet pas, alors $f + g$ n'en admet pas.
 (e) Si f est définie et monotone sur $]a, b[$, alors f admet une limite à gauche stricte en tout point de $]a, b[$, et une limite à droite (stricte) en tout point de $]a, b[$.
 (f) Si f admet une limite finie stricte à gauche et une limite finie stricte à droite en tout point de $]a, b[$, alors f est bornée sur $]a, b[$.
 (g) Réciproque de l'énoncé précédent.
 (h) f admet une limite en au moins un point de \mathbb{R} .

- (i) Si f est continue en x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que f soit continue sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.
- (j) Il existe au moins un intervalle $]a, b[$ sur lequel f est bornée.

40. : Une application de l'exercice 5. (b) sur la continuité.

Déterminer tous les couples $(f, g) \in (\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(y) + g(x)g(y) \\ g(x+y) &= g(x)f(y) + f(x)g(y) \end{aligned}$$

41. : On définit f sur \mathbb{R} de la façon suivante :

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $f(x) = 0$,

et si $x \in \mathbb{Q}$, avec $\left(x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(p, q) = 1\right)$ $f(x) = \frac{1}{q}$

- (a) Vérifier que f est paire et 1-périodique.
- (b) Démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de réels de $[0, 1]$ ayant une image supérieure à un réel $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.
- (c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ pour tout $x_0 \in [0, 1]$ puis pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
- (d) En déduire l'ensemble des points de continuité de f .
- (e) Dessiner à l'aide de l'ordinateur une idée de la courbe de f .
- (f) On pose $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ si $x \in \mathbb{Q}$. Quelle propriété pathologique la fonction g possède-t-elle ?

42. : D'après l'exercice 14. (b) sur la continuité, on sait que sur tout grand cercle de la sphère terrestre, il existe deux points antipodaux où la température est égale ; admettant que lorsque le grand cercle se déplace continûment sur la sphère, on peut trouver deux points antipodaux de même température se déplaçant continûment sur ce grand cercle, montrer qu'il existe à chaque instant sur la terre deux points antipodaux où la température *et la pression* sont égales.

43. : Le problème des deux crêpes :

- (a) Démontrer qu'on peut découper une crêpe d'un coup de couteau rectiligne en deux parties de même aire, suivant une direction fixée à l'avance.
- (b) Montrer que si deux crêpes sont posées sur un plan, on peut d'un unique coup de couteau rectiligne couper chacune en deux parties de même aire.

44. : Les polygones inscriptibles.

Ecrire un programme mathematica, qui, une liste de réels >0 étant donnée, déterminera et tracera, si c'est possible, un polygone inscriptible dans un cercle dont les côtés ont dans l'ordre, les longueurs données dans la liste.