Sujets du premier semestre ne pouvant plus être pris : 1,2,8,13,28,30,42,43,44.

ARITHMÉTIQUE.

1. * Soient a et b deux entiers > 0 ; à quelle CNS $\log_a b$ est il un nombre rationnel ?

ARITHMÉTIQUE et INFO

2. (deux personnes) On désigne par "super-carré" de taille n une liste strictement décroissante d'entiers > 0 : $x_1 >..> x_n$ tels que pour tous k de 1 à n les sommes $x_1^2 + \ldots + x_k^2$ soient toutes des carrés parfaits (exemple : (4,3)).
   a. Ecrire un programme python recherchant le plus petit (en un sens à définir) super-carré de taille n.
   b. Existe-t-il un super carré dans toutes les tailles ?
3. Ecrire un programme python déterminant les nombres qui, dans une base donnée, sont égaux à la somme de la somme de leurs chiffres et du produit de leurs chiffres (par exemple 19 = 1+9 + 1*9). Démontrez mathématiquement ce que vous constatez expérimentalement.
4. :
   a. Ecrire une fonction **carres** de paramètre un entier n renvoyant la liste des quadruplets d'entiers [a,b,c,d] vérifiant :$0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant n, a^2 + b^2 + c^2 = d^2$
      La tester avec $n = 10$.
   b. Ecrire une fonction **matrice** de paramètres deux entiers N et n renvoyant la liste des N-listes d'entiers $[a_1, \ldots a_N]$ vérifiant $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant .. \leqslant a_N \leqslant n$
   c. Ecrire une fonction **puissances** de paramètres trois entiers N, n, k renvoyant la liste des $N + 1$-listes vérifiant : $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant .. \leqslant a_N \leqslant a_{N+1} \leqslant n$; $a_1^k + \ldots + a_N^k = a_{N+1}^k$.

   Combien faut-il apparemment de cubes pour qu'une somme de cubes puisse être un cube ? Idem pour puissances quatrièmes.
5. Deux entiers $n, N > 1$ étant donnés, écrire un programme python déterminant le plus petit entier $w(n,N)$ entre 1 et N nécessitant le plus de puissances n-ièmes dans sa décomposition de longueur minimale en somme de puissances n-ièmes (non nulles) (ce nombre de puissances étant noté $g(n,N)$).

   Par exemple, $g(2,6) = 3$ car tous les entiers entre 1 et 6 peuvent s'écrire comme somme de 3 carrés, et $w(2,6) = 3$ car 3 est le premier entier à nécessiter 3 carrés pour être décomposé.

   Dresser la liste des $w(n, 100\,000)$ et $g(n, 100\,000)$ pour n entre 2 et 10.

   Le principe consiste à générer la liste nombres entre 1 et n qui sont sommes de k puissances n-ièmes (en les générant, et non en cherchant à décomposer chaque nombre), et de déterminer le premier k pour lequel cette liste est complète (cela donne $g(n,N)$). Ensuite, le plus petit élément manquant dans la liste précédente donne $w(n,N)$.
6. Ecrire une fonction python qui, étant donné une liste de nombres L et un entier n, retourne le nombre minimal d'éléments de L nécessaires pour exprimer n comme somme d'éléments de L (avec répétitions possibles).

   Tester avec des listes de nombres du type $\frac{k(p(k-1)+2)}{2}$, p fixé , $k = 0, \ldots, K$ (nombres $p+2$-gonaux). Faire des conjectures sur le nombre minimal de nombres 3,4,5..-gonaux pour pouvoir exprimer tout nombre entier naturel.

   SUITES
7. : Déterminer la valeur de

$$\underbrace{1}_{\text{1 impair}} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}_{\text{2 impairs}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}}_{\text{3 impairs}} - \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}}_{\text{4 impairs}} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots$$

8. : Etudier suivant les valeurs de $a > 0$ les suites récurrentes définies par $u_0 = a, u_n = a^{u_{n-1}}$.

9. : Sommes de familles d'inverses d'entiers finies ou infinies.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement croissante d'entiers > 0. On désigne par $S(a_n)$ la limite de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ quand N tend vers $+\infty$ (Par exemple, $S(n^2) = \frac{\pi^2}{6}$).

a. Montrer que $a_n = O(n) \Rightarrow S(a_n) = +\infty$.

b. Montrer que si $n^\alpha = O(a_n)$ avec $\alpha > 1$ alors $S(a_n) < +\infty$.

c. Est-ce que $a_n \gg n \Rightarrow S(a_n) < +\infty$?

d. Est-ce que $S(a_n) < +\infty \Rightarrow a_n \gg n$?

10. On pose $u_1 = 1; u_2 = u_3 = 1/2; u_4 = u_5 = u_6 = 1/3;$ etc

a. Définir correctement cette suite et déterminer un équivalent simple de u_n.

b. On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$; déterminer $\lim s_n$ et un équivalent simple de s_n.

11. On définit deux suites récurrentes doubles par $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_1 = 1, v_2 = 1 \\ v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{n} + v_n \end{cases}$.

On demande de déterminer des formules générales pour u_n et pour v_n (sous forme de sommes) et de déterminer $\lim \frac{u_n}{n}$ et $\lim \frac{v_n}{n^2}$.

12. : Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = [an]$. Par exemple pour $a = \sqrt{2}$, on a $u_n = (0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \dots)$

a. Quelle est la moyenne des entiers $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$?

b. A quelle condition nécessaire et suffisante la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est-elle convergente ?

13. : Une suite de rationnels de limite un irrationnel a des dénominateurs qui tendent vers l'infini.

a. Soit (r_n) une suite de rationnels > 0 de limite un irrationnel $x > 0$; on pose $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n et q_n entiers > 0 ; on se propose de montrer que $\lim q_n = +\infty$. Supposons donc, par l'absurde, que ce ne soit pas le cas.

b. Montrer qu'alors la suite (q_n) possède une sous-suite $(q_{\varphi(n)})$ majorée.

c. En utilisant le fait (à justifier) qu'à partir d'un certain rang, on a $\left| x - \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} \right| < 1$, donc que $p_{\varphi(n)} \leqslant q_{\varphi(n)}(1 + x))$, montrer que la suite $(p_{\varphi(n)})$ est elle aussi majorée.

d. En déduire que la suite $(r_{\varphi(n)})$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et qu'elle est donc constante APCR.

e. En déduire l'affreuse contradiction et conclure.

14. : Sur les sommes $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$.

On pose $e_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^p}{k!}$; on sait que la suite $(e_n(0))_n$ est convergente vers e.

a. Montrer que la suite $(e_n(p))_n$ est convergente ; désignons par $e(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ sa limite.

b. Trouver une relation de récurrence entre $e(p + 1)$ et les $e(q)$ pour $0 \leqslant q \leqslant p$; calculer $e(p)$ pour $p = 1, 2, 3, 4, 5$.

c. En déduire que $e(p)/e$ est le nombre de partitions d'un ensemble à p éléments (appelé nombre de Bell).

15. : Est-il exact que de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone ?

16. :

a. Est-ce que si $a_n \to 0$, alors forcément $(a_1a_2\dots a_n + a_2\dots a_n + \dots + a_{n-1}a_n + a_n) \to 0$?

b. Est-ce que si $u_{n-1} << u_n$, alors forcément $(u_1 + u_2 + \dots + u_n) \sim u_n$?

17. : Approximations de $\sqrt{2}$ par des rationnels.

a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$

b. Définir à l'aide d'une récurrence simple les suites (a_n) et (b_n). En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

c. Démontrer que chaque suite (a_n) et (b_n) vérifie la même relation de récurrence double.

d. Démontrer que $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.

e. En déduire que $a_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n}{2} + o(1)$ et $b_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}} + o(1)$ ainsi que $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$.

f. Montrer que $a_n \geqslant b_n$ puis que $\left|\sqrt{2} - \dfrac{a_n}{b_n}\right| = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^n}\dfrac{1}{b_n} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}-1}{b_n^2}$

Rem : cela démontre que $\sqrt{2}$ est approchable à l'ordre 2 par les rationnels (ce résultat est valable pour tout irrationnel).

g. Montrer que si (u_n) est la suite de Héron de l'exercice 40 sur les suites, avec $a = 2$, alors $u_n = \dfrac{a_{2^n}}{b_{2^n}}$ pour $n \geqslant 1$.

18. : Étudier la suite définie par :

1. $u_0 = a, u_1 = b$ (réels)
2. $u_{n+2} = |u_{n+1} - u_n|$

19. : Une définition de $x!$ pour tout x réel.

a. Montrer que pour tout naturel k $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k n!}{(k+1)\dots(k+n)} = k!$.

b. Pour n naturel et $x > -1$ on pose $f_n(x) = \dfrac{n^x n!}{(x+1)\dots(x+n)}$;

i. Montrer que si $x \geqslant 0$ la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante majorée.

ii. Montrer que si $-1 < x \leqslant 0$ la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante minorée.

c. On pose donc $x! = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour $x > -1$; montrer que $x! = x(x-1)!$ pour $x > 0$.

d. Montrer que $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (utiliser la formule de Stirling).

20. : Suite de l'exercice 27 sur les suites.

On pose $a = 1/\left(2\sqrt{3}\right)$ et $b = 1/3$; que vaut $1/l$? Montrer qu'alors $1/b_n$ et $1/a_n$ sont respectivement les demi-longueurs des polygones à 6.2^n côtés inscrits et circonscrits d'un cercle de rayon 1 (longueurs qu'Archimède avait utilisées pour déterminer la valeur de π).

21. Une suite chaotique.

On considère la suite récurrente définie par son premier terme u_0 et la relation $u_n = f(u_{n-1})$ où $f(x) = 4x(1-x)$.

a. Visualiser cette suite pour différentes valeurs de u_0. Que se passe-t-il pour $u_0 < 0, u_0 = 0, u_0 = 1, u_0 > 1$?

b. Montrer que si $u_0 \in]0,1[$, il existe un unique $\theta \in]0,\pi/2[$ tel que $u_0 = \sin^2\theta$; calculer alors $f(u_0)$ et en déduire une expression de u_n en fonction de θ.

c. Déterminer en utilisant b) les points fixes de $f^p = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$ pour p entier $\geqslant 1$. Les déterminer exactement dans le cas $p = 3$. Combien y en a-t-il dans le cas général?

d. Visualiser la suite (u_n) pour u_0 égal successivement à chaque point fixe dans le cas $p = 2$ et à un point fixe différent des précédents dans le cas $p = 3$ (autant de figures que de points fixes).

22. Les lampions.

On considère un rectangle de longueur 2π et de largeur 1 quadrillé par mn rectangles identiques, avec m rectangles en largeur et n en longueur. Ce rectangle est courbé en un cylindre de hauteur 1 et de rayon 1 ; chaque petit rectangle curviligne possède 4 sommets et un centre (appartenant au cylindre) et définit donc 4 triangles plans. Le lampion $L_{m,n}$ est le polyèdre formé de ces $4mn$ triangles.

a. Montrer que l'aire totale du lampion est égale à
$A_{m,n} = 2n \sin \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^4} \left(2n \sin \frac{\pi}{2n}\right)^4} \right)$.

b. Vérifier que lorsque n tend vers l'infini, $A_{n,n}$ tend bien vers l'aire du cylindre, mais que l'on peut trouver f de sorte que $A_{f(n),n}$ tende vers l'infini !

c. Montrer que pour tout réel $\alpha \geqslant 2\pi$ il existe une suite de lampions dont l'aire tend vers α.

SUITES ET INFORMATIQUE

23. Jeu de la dichotomie

Le jeu consiste à retrouver un nombre entre 1 et N avec un nombre minimum de coups, en appliquant une méthode de dichotomie (approchée : si l'on tombe sur 58,5 en appliquant la méthode exacte, on choisira 58).

a. Faire un programme python déterminant le nombre de coups nécessaires pour retrouver un entier n donné entre 1 et N ; puis un programme donnant la moyenne du nombre de coups nécessaires pour retrouver un entier entre 1 et N (application numérique pour $N =$ 100).

b. Déterminer mathématiquement la moyenne du nombre de coups nécessaires dans le cas où N est une puissance de deux ; comparer le résultat trouvé pour 100 dans a) avec les résultats trouvés ici pour 64 et 128 ; déterminer un équivalent du nombre moyen de coups quand N tend vers l'infini.

c. Lors de l'ultime épreuve de l'émission "le juste prix", le candidat doit estimer le montant d'une vitrine remplie de cadeaux. Pour cela, on la lui présente en détails et on lui indique que son juste prix est compris entre 10 000 € et 50 000 €. Il dispose ensuite de 30 secondes pour faire autant de propositions qu'il souhaite, à haute voix, en étant à chaque fois guidé par l'animateur qui lui indique si le montant qu'il a donné est plus cher ou moins cher que le prix réel. Si le juste prix est retrouvé dans ce délai, le candidat remporte la vitrine. A quel rythme doit il faire ses propositions pour être sûr de gagner en moyenne ?

24. (deux personnes) La décomposition égyptienne gloutonne.

Une fraction égyptienne est une fraction de numérateur 1 et de dénominateur entier > 0 (leur nom vient de ce que c'était les seules que les Egyptiens connaissaient).

Étant donné un réel $x_0 \in]0,1[$, on lui retranche la plus grande fraction égyptienne qui lui soit inférieure ou égale, pour obtenir un nombre x_1 ; si x_1 est nul, on s'arrête, sinon, on recommence.

a. Définir rigoureusement x_{n+1} à partir de x_n.

b. Montrer que si x_0 est irrationnel, $\lim x_n = 0$ et si x_0 est rationnel, alors la suite (x_n) est finie (ce qui démontre que tout rationnel est somme d'un nombre fini de fractions égyptiennes de dénominateurs distincts).

c. Ecrire un programme python implémentant cet algorithme ; on écrira une fonction *glouton* de deux paramètres entiers a et b ($x_0 = a/b$) renvoyant la liste des couples (numérateur, dénominateur) des fractions constituant la décomposition de a/b.

On devra trouver par exemple que $5/142 = 1/29 + 1/1373 + 1/5654014$.

PROBAS

25. Trouver le nombre de probabilités sur un univers à n événements élémentaires dont toutes les valeurs s'expriment en un nombre entier de pourcents.

26. Temps d'attente de l'ascenseur.

On considère un immeuble de n étages dont l'ascenseur sert uniquement pour des trajets directs entre un étage et le rez-de-chaussée ou l'inverse (les personnes du rez-de chaussée ne prennent pas l'ascenseur) ; l'ascenseur est suffisamment peu fréquenté pour qu'on considère que lorsqu'une personne arrive, l'ascenseur est toujours en attente à un niveau donné. On considère aussi que l'ascenseur met toujours 5 secondes pour parcourir un étage, à la montée ou à la descente.

a. Considérant qu'il y a le même nombre d'habitants à chaque étage, que la fréquence de leurs sorties est identique, et qu'ils prennent toujours l'ascenseur, quelle est la probabilité pour l'ascenseur au repos de se trouver à un niveau donné ?

b. J'habite à l'étage k ; quel est le temps d'attente $T(k)$ moyen en secondes de mon ascenseur après avoir appuyé sur le bouton d'appel ? Quel est mon temps moyen $T'(k)$ de descente au rez-de-chaussée (attente + descente) ?

Application numérique $n = 6$ (ou le nombre d'étage de votre immeuble) : Tracer les courbes de T et T'.

c. M. Boulododo travaille au 20-ème étage d'un gratte-ciel dont il n'a même pas remarqué combien il avait d'étages. Par contre, il a remarqué que le soir, il doit attendre en moyenne une minute et 15 secondes son ascenseur. Combien d'étages possède son gratte-ciel ?

27. Montrer que si A et B sont deux évènements et P une probabilité, alors $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant 1/4$ et donner, si c'est possible, des exemples où $P(A \cap B) - P(A)P(B) = 1/4$, $P(A \cap B) - P(A)P(B) = -1/4$.

28. Paradoxe des anniversaires.

a. Quelle est la probabilité qu'une application de E_n dans E_p choisie au hasard soit injective ?

b. Quelle est la probabilité que dans votre classe, il y ait au moins deux élèves qui ont la même date anniversaire (compter 365 jours par an) ?

c. Quelle est la probabilité que pour une application de E_n dans E_p choisie au hasard il y ait q paires d'éléments qui ont la même image (les q paires ayant q images distintes), les $n - 2q$ autres éléments ayant des images distinctes?

d. Quelle est la probabilité que dans votre classe, il y ait 5 paires d'élèves exactement qui ont la même date anniversaire, comme cela arrive cette année ?

e. Quelle est la probabilité que pour une application de E_n dans E_p choisie au hasard il y ait au moins 3 éléments qui ont la même image ?

f. Quelle est la probabilité que dans votre classe, il y ait au moins 3 élèves qui ont la même date anniversaire ?

29. $2n$ chaussettes formant n paires se trouvent mélangées dans un sac ; je tire n chaussettes au hasard.

a. Quelle est la probabilité que les n chaussettes appartiennent chacune à une paire différente ?

b. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance du nombre de paires tirées.

POLYNÔMES

30. : Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré.

On considère l'équation (E) : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $x = \alpha y + \beta$ est solution de (E) ssi y est solution de (E') : $y^3 + \varepsilon \frac{3}{4} y = \gamma$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Réponse :

$\beta = -\dfrac{b}{3a}, \alpha = \dfrac{2}{3a}\sqrt{|3ac - b^2|}, \varepsilon = \text{signe}(3ac - b^2), \gamma = -\dfrac{a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d}{a\alpha^3}$.

i. Montrer que pour $\varepsilon = -1$, les 3 solutions (éventuellement confondues) de (E') sont réelles ssi $\gamma \in \left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, et qu'elles sont alors comprises entre -1 et 1.

ii. En déduire que si l'on pose $\theta = \frac{1}{3}\arccos 4\gamma$, ces trois solutions sont

$$\cos\theta, \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

iii. Appliquer cette méthode pour résoudre $9x^3 - 9x^2 + 1 = 0$.

b. Montrer que dans le cas $\varepsilon = 1$, les 3 solutions de (E') ne sont jamais toutes 3 réelles.

31. :

a. Montrer que les relations : $\begin{cases} P_0 = 1, P_1 = X \\ \forall n \geqslant 1 \quad P_n^2 + X^2 = 1 + P_{n-1}P_{n+1} \end{cases}$ définissent une unique suite de fractions rationnelles.

b. Montrer qu'en fait les P_n sont des polynômes.

c. Reconnaître enfin ces polynômes (avec preuve).

32. : Les séries formelles.

$K^{\mathbb{N}}$ muni des opérations $(a_k) + (b_k) = (a_k + b_k)$ et $(a_k)(b_k) = (c_k)$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ est noté $K[[X]]$ et ses éléments sont appelés des séries formelles, ou polynômes illimités.

a. Montrer que $K[[X]]$ est un anneau commutatif intègre dont $K[X]$ est un sous-anneau et justifier l'écriture $S = (a_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$.

b. Montrer que $S = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ est inversible dans $K[[X]]$ ssi $a_0 \neq 0$; donner par exemple les inverses de $1 - X$, de $1 - X - X^2$ et $1 + X + X^2$.

c. Montrer que tout fraction rationnelle F non nulle de degré $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme $F = X^n S$ où S est une série formelle inversible.

d. Si S est une série formelle non inversible, montrer qu'on peut poser $e^S = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{S^k}{k!}$; montrer la relation $e^{S+T} = e^S s^T$.

33. Polynômes de Lagrange.

a. On se donne deux suites de réels $(x_i)_{i \geqslant 1}$ et $(y_i)_{i \geqslant 1}$ la première étant formée de réels distincts.

En utilisant l'application f : $\begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{cases}$ montrer que pour tout $n \geqslant 1$ il existe un unique polynôme P de degré $\leqslant n - 1$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i de 1 à n. Ce polynôme est noté $L_{1,2,..,n}$.

b. Montrer que $L_{1,2,3} = \dfrac{X - x_3}{x_1 - x_3} L_{1,2} + \dfrac{X - x_1}{x_3 - x_1} L_{2,3}$.

c. Trouver de même une relation permettant de calculer $L_{1,2,..,n}$ connaissant $L_{1,2,..,n-1}$ et $L_{2,..,n}$.

d. Programmer le calcul de $L_{1,2,.,n}$.

34. * La multiplication des triplets est impossible !

Pendant de nombreuses années, le mathématicien Hamilton essaya de multiplier des triplets de réels, de sorte à en faire un corps similaire à celui des complexes et contenant celui-ci, mais de dimension 3. Il raconte que son fils lui demandait régulièrement "Well, Papa, can you multiply triplets?" et qu'il répondait : "No, I can only add and substract them", jusqu'à ce qu'il réalise qu'il fallait multiplier des quadruplets, obtenant ainsi le corps maintenant appelé "corps des quaternions" et noté H en l'honneur de Hamilton. Nous allons démontrer cette impossibilité de "multiplier" des triplets.

On suppose donc que R^3, muni de son addition habituelle, est aussi muni d'une multiplication prolongeant la multiplication de R^2 donnant le corps des complexes (on suppose donc que $(x,y,0)(x',y',0) = (xx' - yy', xy' + yx', 0)$) et conférant à $(\mathsf{R}^3,+,\times)$ une structure de corps d'élément unité $e = (1,0,0)$ (on peut même supposer seulement que $(\mathsf{R}^3,+,\times)$ est un anneau).

On pose $i = (0,1,0)$, $j = (0,0,1)$, $ij = (a,b,c) = ae + bi + cj$. Montrer par des calculs (simples, mais bien justifiés) que $c^2 = -1$ et conclure.

NOMBRES RÉELS

35. : Densité de la suite $(\sin n)$.

Soit ω un irrationnel > 0 ; pour n entier naturel on pose $u_n = n - \left[\frac{n}{\omega}\right]\omega = \omega\,\mathrm{frac}\left(\frac{n}{\omega}\right)$

a. Montrer que $u_n \in [0,\omega[$.

b. Montrer que $n \neq m \Rightarrow u_n \neq u_m$

c. Montrer que $u_n \leq u_m \Rightarrow u_{m-n} = u_m - u_n$

d. Soit p un entier > 0 ; On partage l'intervalle $[0,\omega[$ en p sous intervalles de longueur ω/p ; montrer que l'un de ces intervalles contient au moins deux éléments distincts de la suite (u_n).

e. En déduire qu'il existe un entier $q > 0$ tel que $u_q \in [0, \frac{\omega}{p}[$.

f. En déduire que la suite (u_n) est dense dans $[0,\omega]$ (c'est-à dire que l'ensemble des u_n est dense dans $[0,\omega]$).

g. En déduire que $\mathsf{N} - \omega\mathsf{N}$ est dense dans R.

h. En déduire que la suite $(\sin n)$ est dense dans$[-1,1]$.

FONCTIONS NUMÉRIQUES

36. Contre exemples concernant les limites

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur R à valeurs réelles ; $x_0 \in \overline{\mathsf{R}}$; pour chaque énoncé, dire et prouver s'il est vrai ou faux.

a. Si f admet une limite en x_0 alors $|f|$ aussi.

b. Réciproque de l'énoncé précédent.

c. Si f admet une limite en x_0, et que g n'en admet pas, alors $f + g$ n'en admet pas.

d. Si f admet une limite finie en x_0, et que g n'en admet pas, alors $f + g$ n'en admet pas.

e. Si f est définie et monotone sur $]a,b[$, alors f admet une limite à gauche stricte en tout point de $]a,b]$, et une limite à droite (stricte) en tout point de $[a,b[$.

f. Si f admet une limite finie stricte à gauche et une limite finie stricte à droite en tout point de $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$.

g. Réciproque de l'énoncé précédent.

h. f admet une limite en au moins un point de $\mathbb{R}$.

i. Si f est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que f soit continue sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

j. Il existe au moins un intervalle $]a, b[$ sur lequel f est bornée.

37. :

a. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

b. Déterminer tous les couples $(f, g) \in (\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$
$$g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y)$$

38. :

a. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

b. Déterminer tous les couples $(f, g) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$
$$g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y)$$

39. : On définit f sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
si $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, on pose $f(x) = 0$,
et si $x \in \mathbb{Q}$, avec $\left(x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \mathrm{pgcd}(p, q) = 1\right)$ $f(x) = \frac{1}{q}$

a. Vérifier que f est paire et 1 –périodique.

b. Démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de réels de $[0, 1]$ ayant une image supérieure à un réel $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

c. En déduire que $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} f(x) = 0$ pour tout $x_0 \in [0, 1]$ puis pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

d. En déduire l'ensemble des points de continuité de f.

e. Dessiner à l'aide de l'ordinateur une idée de la courbe de f.

f. On pose $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ si $x \in \mathbb{Q}$. Quelle propriété pathologique la fonction g possède-t-elle ?

40. : D'après l'exercice 44 sur la continuité, on sait que sur tout grand cercle de la sphère terrestre, il existe deux points antipodaux où la température est égale ; admettant que lorsque le grand cercle se déplace continûment sur la sphère, on peut trouver deux points antipodaux de même température se déplaçant continûment sur ce grand cercle, montrer qu'il existe à chaque instant sur la terre deux points antipodaux où la température *et la pression* sont égales.

41. : Le problème des deux crêpes :

a. Démontrer qu'on peut découper une crêpe d'un coup de couteau rectiligne en deux parties de même aire, suivant une direction fixée à l'avance.

b. Montrer que si deux crêpes sont posées sur un plan, on peut d'un unique coup de couteau rectiligne couper chacune en deux parties de même aire.

42. : Problèmes d'extrémum.

a. Dans un rectangle $R = (ABCD)$, on pose $L = AD + DC + CB$; déterminer la forme "dite R_1" du rectangle R qui, pour L donné, a la plus grande aire , puis la forme "dite R_2 " du rectangle R qui pour L donné engendre, par rotation autour de (AB) le cylindre ayant le plus grand volume. Calculer l'aire S_1 et le volume V_1 en fonction de L dans le cas R_1, puis l'aire S_2 et le volume V_2 dans le cas R_2.

b. Même problème avec cette fois un triangle $T = (ABC)$ isocèle en C et $L = AC + CB$.

On obtiendra des aires S_3 et S_4 et des volumes V_3 et V_4; on comparera les S_i entre eux, et les V_i entre eux.

43. : Dérivabilité et taux d'accroissement non centrés.

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et continue en 0.

a. Le fait que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$ possède une limite finie quand x tend vers 0 implique-t-il que f est dérivable en 0 ?

b. Pour quelles valeurs de k le fait que $\dfrac{f(x) - f(kx)}{x - kx}$ possède une limite finie quand x tend vers 0 implique-t-il que f est dérivable en 0 ?

44. : Une généralisation de la factorielle aux réels.

On définit une fonction f sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ pour $x \in [n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on pose $f(x) = 1$ pour $x \in [0,1[)$

a. Donner la valeur de $f(n)$ et justifier que f est infiniment dérivable sur $[1,+\infty[\setminus \mathbb{N}$.

b. Tracer la courbe de f sur $[0,3]$.

c. Ecrire une fonction python *récursive* calculant $f(x)$:

```
def f(x) :
  assert(x < 0)
   if x < 1 :
      ......
   else :
      ......
```

d. Montrer que f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

e. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f'_g(n) = n!(h_n - 1)$ et $f'_d(n) = n!h_n$ (où $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$).

f. Comment définirait-on f sur $]-1,0[$?

45. : Une généralisation plus précise.

a. Soit f une fonction définie sur $]-1,+\infty[$, de classe C^p ($p \geqslant 1$) sur $]0,1[$, vérifiant $f(0) = 1$ et $f(x) = xf(x-1)$ pour $x > 0$;

- **i.** Montrer que $f(n) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **ii.** Montrer que si f est continue en 0, $f(-1+u) \underset{u \overset{>}{\to} 0}{\sim} \frac{1}{u}$.
- **iii.** Montrer que f est de classe C^p sur $]-1,+\infty[\setminus \mathbb{N}$.
- **iv.** Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$ ssi f est continue à gauche en 1 et à droite en 0 et $f(0) = f(1)$.
- **v.** Montrer que f est de classe C^p sur $]-1,+\infty[$ $\Leftrightarrow$ f est de classe C^p à gauche en 1 et à droite en 0 et pour tout $k \in [1,p]$ $f_g^{(k)}(1) = f_d^{(k)}(0) + kf_d^{(k-1)}(0)$.

b. Soit réciproquement f une fonction de classe C^p sur $[0,1]$ telle que pour tout $k \in [1,p]$ $f_g^{(k)}(1) = f_d^{(k)}(0) + kf_d^{(k-1)}(0)$, avec $f(0) = f(1) = 1$; pour $x > 1$, on pose $f(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1)f(x-n)$, où n est la partie entière de x ;
pour $x \in]-1,0[$, on pose $f(x) = \dfrac{f(x+1)}{x+1}$; montrer que $f(x) = xf(x-1)$ pour $x > 0$ et que f est de classe C^p sur $]-1,+\infty[$.

c. Déterminer une fonction f polynomiale sur $[0,1]$ vérifiant les conditions de (b) pour $p = 1$, et la tracer sur $[-0,8 ; 2,5]$.

46. : Les polynômes de LEGENDRE : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le $n^{ième}$ polynôme de Legendre par :

$$L_n = \frac{1}{2^n n!} D^n((X^2-1)^n)$$

a. Calculer L_i pour $i = 0,1,2,3$.

b. Calculer L'_{n+1} de deux façons différentes, et en déduire la relation différentielle : $(1-X^2)L''_n - 2XL'_n + n(n+1)L_n = 0$.

c. Montrer la formule de récurrence : $L_n = \frac{1}{n}((2n-1)XL_{n-1} - (n-1)L_{n-2})$; calculer L_4 par cette méthode.

d. Résoudre l'équation différentielle : $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$.

47. : Les polynômes de LAGUERRE

a. On pose

$$\forall n \in \mathsf{N} \ \ \forall x \in \mathsf{R} \quad l_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

b. Calculer $l_0(x), l_1(x), l_2(x), l_3(x)$.

c. Montrer que l_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficients rationnels. Soit L_n le polynôme formel associé à l_n (appelé $n^{ième}$ polynôme de LAGUERRE).

d. Montrer la relation de récurrence double: $L_n = -\frac{1}{n}((X-2n+1)L_{n-1} + (n-1)L_{n-2})$.

e. Montrer la relation différentielle : $XL''_n + (1-X)L'_n + nL_n = 0$.

f. Résoudre l'équation différentielle : $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$.

48. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution polynomiale à l'équation différentielle $y' - 2xy = x^n$? Résoudre l'équation dans ce cas.

49. : (deux personnes) Ordre d'une racine pour une fonction C^∞.

On utilisera dans cet exercice le théorème de prolongement des dérivées : si f est continue en x_0 et de classe C^∞ au voisinage pointé de x_0, et si $f^{(k)}$ possède une limite stricte $l_k \in \mathsf{R}$ en x_0 pour tout k alors f est de classe C^∞ en x_0, et $f^{(k)}(x_0) = l_k$.

a. Soit $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$; on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$; montrer que g est C^∞ au voisinage de 0, et que $g^{(k)}(0) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$.

b. On dit que x_0 est une racine d'ordre p de f, fonction C^∞ au voisinage de x_0 s'il existe une fonction g C^∞ au voisinage de x_0 , non nulle en x_0, telle que au voisinage de x_0 : $f(x) = (x-x_0)^p g(x)$.

Montrer que

$$0 \text{ est racine d'ordre } p \text{ de } f \Leftrightarrow f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p)}(0) = 0 \text{ et } f^{(p+1)}(0) \neq 0$$

Énoncer et prouver le théorème similaire en x_0.

c. Exemples : montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞:

- $\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \frac{\sin x}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} x \neq 0 \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}} \\ 0 \mapsto e \end{cases}$.

d. Application : soient f et g deux fonctions C^∞ au voisinage de x_0, nulles en x_0, g non nulle au voisinage pointé de x_0 et telles que $\frac{f}{g}$ possède un prolongement par continuité

h en x_0.

i. Montrer que si l'une des dérivées successives de g en x_0 est non nulle, alors h est C^∞ au voisinage de x_0.

ii. Considérant $|x|e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $e^{-\frac{1}{x^2}}$, montrer que ce résultat peut être faux si toutes les dérivées de g en x_0 sont nulles.

50. * : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue au voisinage de x_0, dérivable au voisinage épointé de x_0. D'après le théorème des accroissements finis, on a donc au voisinage de x_0, $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c_x)$ avec $c_x \in]x_0, x[$.
On pose $x - x_0 = u$ et $c_x = x_0 + \theta_u u$ avec $\theta_u \in]0,1[$.
On souhaite déterminer $\lim\limits_{u\to 0} \theta_u$.

a. Calculer c_x et la limite de θ_u lorsque $f(x) = x^2$, puis $\sqrt{x}$, puis x^3, puis $\frac{1}{x}$.
Réponses : pour x^2 : $c_x = \frac{x + x_0}{2}$, $\theta_u = \frac{1}{2}$.
pour $\sqrt{x}$: $c_x = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{2}\right)^2$; $\theta_u \to \frac{1}{2}$ si $x_0 > 0$, $\theta_u \to \frac{1}{4}$ si $x_0 = 0$.
pour $\frac{1}{x}$: $c_x = \sqrt{x_0 x}$, $\theta_u \to \frac{1}{2}$.

b. On se propose de montrer que si f est deux fois dérivable en x_0 avec $f''(x_0) \neq 0$, et C^1 au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{u\to 0} \theta_u = \frac{1}{2}$.

i. A l'aide de la formule de Taylor-Young en x_0, montrer que
$$f'(c_x) = f'(x_0) + \frac{u}{2} f''(x_0) + o(u)$$

ii. Evaluer $f'(c_x) - f'(x_0)$ en fonction de $f''(x_0)$ et conclure.

c. Quelle est l'interprétation géométrique du résultat ?

51. * : Soit $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$.

a. Justifier le fait que f admet un DLP à tout ordre en 0 ; soit C_n le coefficient de x^n dans ce développement. Calculer C_0, C_1, C_2, C_3.

b. Montrer que $f(x) = 1 + x f^2(x)$.

c. En déduire que $C_{n+1} = \sum\limits_{i+j=n} C_i C_j$ et que C_n est entier pour tout n.

d. Montrer que $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ (nombre de Catalan).

52. : La courbe du funambule à la poulie.
Un funambule marche sur une corde attachée à l'une de ses extrémités, passant par une poulie située à même hauteur que l'extrémité attachée, et tendue par un contre-poids attaché à l'autre extrémité.

a. Si k est le rapport de la masse du contre-poids à celle de l'homme , l'extrémité attachée en O et la poulie en $A(1,0)$, l'axe Oy vers le bas, montrer que les pieds $M(x,y)$ du funambule décrivent la courbe d'équation
$$y = \frac{x(1-x)}{\sqrt{k^2 - x^2}}$$
Indication : utiliser la loi des sinus dans le triangle OAM.

b. Etudier la fonction $f_k : x \mapsto \frac{x(1-x)}{\sqrt{k^2 - x^2}}$ en discutant suivant les valeurs de $k > 0$ et faire une figure avec diverses courbes pour $0 \leqslant x \leqslant 1$; interpréter physiquement.

53. Un point matériel de masse m soumis à une force de gravitation constante d'accélération g et à une force de frottement dirigée en sens contraire d'intensité de la forme $k_1 f(v)$, où v est la vitesse, est en chute verticale.

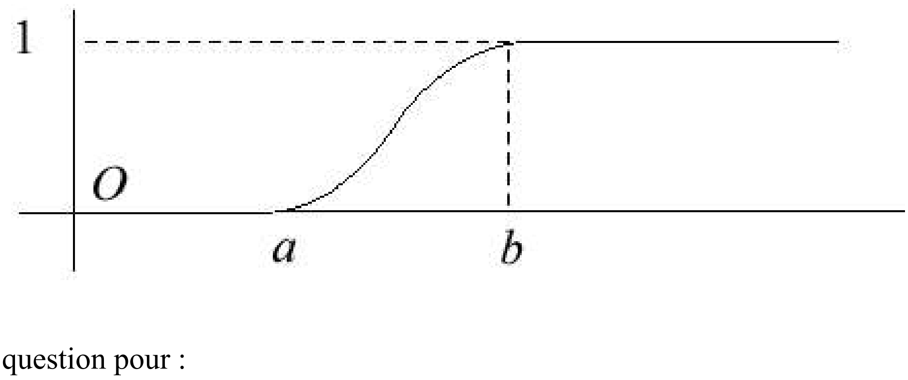
- **a.** Justifier l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + kf(\dot{x}) = g$ où $k = k_1/m$.
  Dans la suite, on suppose que pour $t = 0$, x et $\dot{x}$ sont nuls.
- **b.** Déterminer x en fonction de t dans le cas d'un frottement nul.
- **c.** Déterminer x en fonction de t dans le cas d'un frottement proportionnel à la vitesse ($f(v) = v$). Montrer que la courbe de x en fonction de t possède une asymptote.
- **d.** Déterminer x en fonction de t dans le cas d'un frottement proportionnel au carré de la vitesse ($f(v) = v^2$). Montrer que la courbe de x en fonction de t possède une asymptote.
  Indication : montrer qu'on peut mettre l'équation différentielle sous la forme :
  $$\frac{d\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\ \dot{x}\right)}{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\ \dot{x}\right)^2} = \sqrt{kg}\, dt$$
- **e.** Tracer les 3 courbes pour $k = g = 1$.

54. : Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$; f une fonction numérique continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$; F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

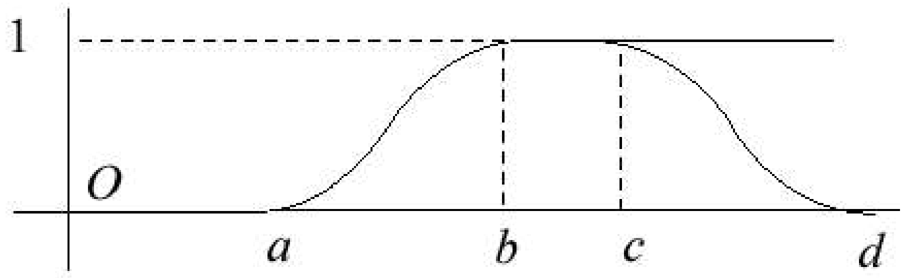
- **a.** Encadrer le nombre $I(f) = f^{-1}\left(\frac{F(b) - F(a)}{b - a}\right)$.
- **b.** On pose $f(x) = x^t$; $t \in \mathbb{R}^*$ et $m(t) = I(f)$.
  Calculer $m(t)$ pour $t \neq 0, -1$. Reconnaître $m(1)$. Calculer $m(-1)$ (l'expression obtenue est appelée *moyenne logarithmique* de a et b).
- **c.** Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} m(t)$. On peut ainsi prolonger m par continuité.
- **d.** Démontrer que m est croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire dans quel ordre sont les moyennes arithmétique, géométrique et logarithmique de deux réels.

55. : On donne $f : \left| \begin{array}{l} x \leqslant 0 \mapsto 0 \\ x > 0 \mapsto e^{-\frac{1}{x}} \end{array} \right.$.

- **a.** Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et tracer C_f.
- **b.** Soit $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{f(x) + f(1 - x)}$; montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Tracer C_g.
- **c.** Trouver une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, dont la courbe soit :



- **d.** Même question pour :



56. : Soit E l'ensemble des applications f de $[a,c]$ vers R qui sont polynomiales de degré 2 au plus sur $]a,b[$ et sur $]b,c[$ (on a $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $b \in]a,c[$). On n'impose aucune condition sur $f(a), f(b), f(c)$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

b. Quelle est la dimension du sous-espace E_1 des fonctions de E qui sont continues sur $[a,c]$?

c. Quelle est la dimension du sous-espace E_2 des fonctions de E qui sont dérivables sur $[a,c]$?

57. : Intégrale d'une suite de fonctions

a. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^n)dx$ (visualiser ce qui se passe sur une figure).

b. Dans l'exemple précédent, on pouvait déterminer une primitive de l'intégrande, ce qui facilitait la recherche de la limite ; cependant ce n'est pas toujours possible, par exemple pour $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,dx$;

Posons donc $I_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,dx$.

i. Calculer I_1 et I_2, et faire une figure.

ii. Soit $u_n \in]0,1[$; vérifier que $\int_0^{u_n} \sqrt{1-x^n}\,dx \geqslant u_n\sqrt{1-u_n^n}$; en déduire que si l'on trouve une telle suite (u_n) vérifiant : $\lim u_n = 1$ et $\lim u_n^n = 0$, alors $\lim I_n = 1$.

iii. Déterminer une telle suite (u_n) et conclure.

c. autre méthode : on fixe $\varepsilon > 0$, démontrer :

$$\exists \alpha \in]0,1[\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N \quad \left|\ \begin{array}{l} \int_0^\alpha 1-\sqrt{1-x^n}\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ \int_\alpha^1 1-\sqrt{1-x^n}\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right.$$

en déduire $\lim I_n = 1$.

d. Démontrer de même que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 0$, sans chercher à exprimer $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ en fonction de n.

e. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n sur $[0,1]$ par :

$$\left|\ \begin{array}{l} \text{si } x < 1-\frac{1}{n} \text{ ou } x = 1,\ f(x) = 0 \\ \text{sinon, } f(x) = -n \end{array}\right.$$

Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pour x fixé $\in [0,1]$? Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$?

58. : Une expression intégrale de la moyenne arithmético-géométrique (cf. exercice 26 sur les suites).

a. Soient $a \leqslant b$ deux réels > 0 ; on pose $I(a,b) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$; montrer, à l'aide du changement de variable défini par $b\tan t = u$, que $I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$.

b. Montrer à l'aide du changment $u = \frac{1}{2}\left(v - \frac{ab}{v}\right)$ que $I\left(\sqrt{ab}\,, \frac{a+b}{2}\right) = I(a,b)$.

c. On pose $m = \frac{\pi}{I(a,b)}$; montrer que $a \leqslant m(a,b) \leqslant b$.

d. Démontrer que m est la moyenne arithmético-géométrique de a et b, c'est-à dire la limite μ des suites adjacentes (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

On admettra que la fonction $(a,b) \mapsto I(a,b)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^{*}$, ce qui résultera simplement d'un théorème vu en spé.

59. : Quel est le signe de $I = \int_0^{1/\pi} \sin\frac{1}{x}dx$? Déterminer numériquement un réel A tel que $0 < A < |I|$.

60. : Pour $r \notin \{-1,1\}$, on définit l'intégrale de Poisson par $I_n(r) = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{r^2 - 2r\cos x + 1}dx$

a. Justifier l'existence de $I_n(r)$; montrer que $I_0(r) = \frac{\pi}{|1-r^2|}$

b. Déterminer pour $r \neq 0$ une relation entre $I_n(r)$ et $I_n\left(\frac{1}{r}\right)$.

c. Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $r \neq 0$:

$$I_{n-1}(r) + I_{n+1}(r) = \left(r + \frac{1}{r}\right)I_n(r)$$

d. En déduire que pour $r \neq 0, I_n(r) = A(r)r^n + \frac{B(r)}{r^n}$.

e. Montrer que pour $|r| < 1$ $\quad I_1(r) = \frac{\pi r}{1-r^2}$; déterminer $I_n(r)$ pour $|r| < 1$.

f. Calculer $I_n(r)$ pour $|r| > 1$.

g. Autre méthode pour déterminer $I_n(r)$ pour $|r| < 1$; en utilisant $\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k + \frac{u^n}{1-u}$, montrer que

$$\frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos x + 1} = -1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-re^{ix}}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} r^k\cos kx + 2r^n\frac{\cos nx - r\cos((n-1)x)}{r^2 - 2r\cos x + 1}$$

et en déduire en intégrant entre 0 et π que $I_n(r) = rI_{n-1}(r)$, d'où l'expression de $I_n(r)$.

61. : L'opérateur de Hardy-Littlewood

Soit f une fonction numérique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction g par

$$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \\ 0 \mapsto f(0) \end{cases}$$

a. Prouver : f continue en 0 $\Rightarrow$ g continue en 0.

b. Si f est paire, que dire de g ?

c. Prouver : f croissante sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ g croissante sur $\mathbb{R}$.

d. On suppose $f \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

i. Montrer que g est dérivable en 0.

ii. Montrer que g est deux fois dérivable en 0

iii. Admettant que $g \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{R},\mathrm{R})$ (ce qui résulte de 5) a)), déterminer la valeur de $g^{(n)}(0)$?

e. Prouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

f. Prouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

g. Prouver f T –périodique $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt$.

h. Vérifier que $f \mapsto g$ définit un endomorphisme HL de $\mathrm{C}^0(\mathrm{R},\mathrm{R})$. Montrer que HL est injectif mais non surjectif.

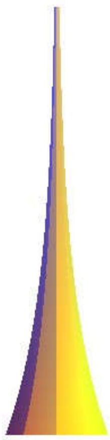
62. Existe-t-il deux polynômes P et Q tels que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}e^x$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$?

63. On pose, pour n entier naturel, $f_n(x) = x^n e^{x^2}$; montrer que si n est impair, il existe un unique polynôme P tel que $g : x \mapsto P(x)e^{x^2}$ soit une primitive de f_n, tandis que si n est pair il n'existe aucun polynôme P tel que $g : x \mapsto P(x)e^{x^2}$ soit une primitive de f_n.

64. : La tour à pression constante.

a. La tour ci-dessous a été construite en faisant tourner autour de Ox la courbe de la fonction $x \mapsto e^{-x}$; on demande de montrer que la pression exercée sur toute section horizontale de la tour (considérée comme pleine d'une matière homogène) par la partie supérieure reste constante.

b. Montrer que, à similitude près, ce profil exponentiel est le seul possible pour une tour à pression constante (et que donc, mathématiquement, on ne peut trouver une telle tour de hauteur finie).



65. Loi de Benford logarithmique.

a. Soient $a \leqslant b$ deux entiers naturels >0 ; montrer que

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \sum_{k=a}^{b-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{b-a}{ab}.$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n(a,b) = \displaystyle\sum_{k=a10^n}^{b10^n-1} \frac{1}{k}$ puis pour tout entier naturel N

$s_N(a,b) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(a,b)$; montrer que $s_N(a,b) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

c. Pour tout chiffre q entre 1 et 9 et tout entier naturel N on considère l'ensemble $E_N(q)$ formé des entiers naturels compris entre 1 et $10^{N+1} - 1$ dont le premier chiffre décimal est égal à q et on pose $P_N(q) = \dfrac{\sum\limits_{k\in E_N(q)} \frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{10^{N+1}-1} \frac{1}{k}}$; exprimer $P_N(q)$ à l'aide de suites définies dans b) et en déduire que $\lim\limits_{N\to+\infty} P_N(q) = \log_{10}\left(1+\frac{1}{q}\right)$; donner des valeurs approchées des nombres $P(q) = \log_{10}\left(1+\frac{1}{q}\right)$ pour q allant de 1 à 9.

ALGEBRE LINÉAIRE

66. : Démontrer que l'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre n ($n \geqslant 3$) est de dimension supérieure ou égale à $n^2 - 2n - 1$, et que sa dimension exacte est $n^2 - 2n$.

67. : On considère l'ensemble des grilles carrées à 9 cases dont 2 cases situées à des coins opposés sont noires, grilles remplies de nombres réels (cet ensemble peut donc être assimilé à R^7). Une grille est dite magique si les alignements de deux cases horizontaux ou verticaux ont une somme égale à s_2, les alignements de trois cases horizontaux ou verticaux ont une somme égale à s_3, avec $\frac{s_2}{2} = \frac{s_3}{3}$. On considère le sous-espace vectoriel M formés des grilles magiques.

a. Déterminer la dimension de M.

b. En donner une base dont les grilles ne comportent que des 0, des 1, ou des -1.

c. Trouver une grille magique comportant les nombres de 1 à 6 éventuellement répétés deux fois au maximum.

Donner les coordonnées de cette grille dans la base précédente.

a. Démontrer que l'ensemble des étoiles magiques à 5 branches est un sous espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 6 de K^{10}. Déterminer la forme générale de ces étoiles, et en déduire que la dimension est 6 exactement. Donner une base de ce sous-espace.

b. Idem pour les étoiles magiques à 6 branches.

c. Montrer qu'il n'existe pas d'étoile magique à 5 branche utilisant les nomnbres de 1 à 10.

68. : Soit A la matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\left(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n}\right)$. Si σ est une permutation de $[|\ 1;n\ \ |]$, on note A_σ la matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}},\ldots,\overrightarrow{e_{\sigma(n)}}\right)$.

a. Calculer A_σ dans les cas suivants :

i. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $\sigma = \langle 1,2\rangle$

ii. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ et $\sigma = \langle 1,2,3\rangle$ $(\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3..)$

iii. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ et $\sigma = \langle 1,3\rangle$

iv. $A = I_n$ et σ quelconque.

b. Démontrer que $A_\sigma(i,j) = A(\sigma(i),\sigma(j))$.

c. On rappelle que deux matrices A et A' sont semblables lorsqu'elles représentent le même endomorphisme f. Déterminer, en vous aidant de ce qui précède, quelles sont, parmi les matrices suivantes, celles qui sont semblables ; on regroupera les matrices par classes de similitudes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

69. : E est rapporté à la base $\left(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n}\right)$ et $\sigma \in S_n$. Soit u_σ l'endomorphisme de E défini par $u_\sigma\left(\overrightarrow{e_i}\right) = \overrightarrow{e_{\sigma(i)}}$.

a. Reconnaître u_σ dans les cas

i. $n = 2$ et $\sigma = \langle 1,2 \rangle$

ii. $n = 3$ et $\sigma = \langle 1,2,3 \rangle$

iii. $n = 3$ et $\sigma = \langle 1,3 \rangle$

b. Calculer $u_\sigma \circ u_{\sigma'}$; en déduire que u_σ est un automorphisme et que $GL(\mathsf{E})$ possède un sous-groupe isomorphe à S_n.

c. Montrer que u_σ possède un vecteur invariant non nul.

d. Soit P_σ la matrice de u_σ dans B. Calculer le terme général P_σ à l'aide du symbole de Kronecker. Traduire les résultats de la deuxième question en termes de matrices.

e. Soit $1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant n$ et $\sigma = \langle i_0, j_0 \rangle$. On appelle P la matrice P_σ. Montrer que l'opération $A \in \mathsf{M}_n(\mathsf{K}) \mapsto P \times A$ correspond à l'échange des lignes L_{i_0} et L_{j_0} de A. A quoi correspond l'opération $A \in \mathsf{M}_n(\mathsf{K}) \mapsto A \times P$?

f. En déduire ou démontrer directement que la matrice A_σ de l'exercice précédent est égale à $P_\sigma A P_\sigma^{-1}$.

g. De quelles bases P_σ est-elle la matrice de passage ? Retrouver alors le résultat de la question précédente.

70. : Soit $A \in \mathsf{M}_n(\mathsf{K})$ telle que $A^2 = I_n$ et soit $G = \left\{X \in \mathsf{M}_n(\mathsf{K}) \ / \ {}^tXAX = A\right\}$.

a. Montrer que : $G \subset GL_n(\mathsf{K})$ et que si $X \in G$ alors $\det X = \pm 1$.

b. Montrer que : $X \in G \Leftrightarrow \begin{cases} X \in GL_n(\mathsf{K}) \\ X^{-1} = A\,{}^tXA \end{cases} \Leftrightarrow XA\,{}^tX = A.$

c. Montrer que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathsf{K})$.

d. Pour cette question $\mathsf{K} = \mathsf{R}$, $A = I_n$ et $n = 2$. Montrer que :

$$X \in G \Leftrightarrow X \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{bmatrix} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1$$

e. Pour cette question $\mathsf{K} = \mathsf{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Montrer que :

$$X \in G \Leftrightarrow X \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} \varepsilon\,\mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t \\ \varepsilon'\,\mathrm{sh}\,t & \varepsilon\varepsilon'\,\mathrm{ch}\,t \end{bmatrix} \text{ avec } \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$$

ALGEBRE LINÉAIRE ET INFO (deux personnes).

71.

L'intervalle $[a,b]$ est subdivisé en n sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$,

$a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$. On considère l'espace vectoriel E des applications continues de $[a,b]$ dans R, affines sur chacun des I_k.

a. Montrer que E est de dimension $n+1$.

b. Montrer que si $f_k \in E$ est définie par $f_k(x) = |x - x_k|$, $B = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E.

c. Ecrire un programme python qui pour toute fonction f définie sur $[a,b]$ détermine la liste des coordonnées dans la base B de la fonction g de E telle que $f(x_k) = g(x_k)$ pour tout k.

d. Etudier un exemple de votre choix et tracer les courbes de f et g correspondantes.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

72. : Trouver tous les couples (f,g) de fonctions réelles dérivables sur R vérifiant $(fg)' = f'g'$. Etudier par exemple le cas où $f(x) = e^{ax}$.

73. : La courbe du jet d'eau.

a. On considère le système différentiel $\begin{cases} \ddot{x} = -k\,\dot{x} \\ \ddot{y} = -k\,\dot{y} - g \end{cases}$ (avec $k = \frac{h}{m}$ et $g > 0$) ; l'interpréter physiquement.

b. Montrer que les solutions du système différentiel vérifiant la condition initiale $x(0) = y(0) = 0$ sont données par : $\begin{cases} x = a(1 - e^{-kt}) \\ y = b(1 - e^{-kt}) - ckt \end{cases}$; exprimer a, b, c en fonction des données et de la vitesse initiale v_0 et de l'angle φ_0 que fait $\overrightarrow{v_0}$ avec $\vec{i}$.

c. Montrer que la trajectoire est donnée par $y = \frac{b}{a}x + c\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right)$; étudier cette courbe.

d. Déterminer sous forme paramétrique ($\begin{cases} x = f(\varphi_0) \\ y = g(\varphi_0) \end{cases}$ le lieu des points d'altitude maximale quand φ_0 varie. Si c'est possible, tracer à l'aide de mathematica des courbes du c) et la courbe du d) dans une même figure.

74. : La courbe du nageur emporté par le courant, et celle du chien suivant son maître.

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a. Une personne $M(x,y)$ nage dans une rivière dont le courant est uniforme de vitesse $\vec{v} = v\vec{j}$. Elle tente de rallier le point O en nageant toujours dans la direction de O à une vitesse constante v' par rapport au courant ; on supposera dans ce sujet que $v' = v (= 1)$, car c'est le cas le plus simple mathématiquement (mais il n'est pas interdit de tenter de résoudre le cas v' quelconque).

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le nageur est en $A(1,0)$, on demande sa trajectoire, en quel point il atteindra l'axe Oy, et au bout de combien de temps.

Indications (à justifier bien sur) : $\vec{V}(M) = \vec{j} - \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$;

$xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = \frac{1 - x^2}{2}$; $t = -\ln\sqrt{x} + \frac{1 - x^2}{4}$.

b. Quelle est la trajectoire du nageur dans le plan mobile de la rivière, c'est-à-dire dans le plan rapporté au repère $\left(\Omega(0,t), \vec{i}, \vec{j}\right)$? La tracer.

Réponse : $Y = y - t = \frac{1 - x^2}{4} + \ln\sqrt{x}$.

c. Montrer que cela revient à chercher la trajectoire d'un chien $M(x,y)$ trottant à vitesse constante dans la direction de son maître $M_0(0,-t)$ qui suit la droite Oy vers le bas, à vitesse constante.

ESPACES EUCLIDIENS

75. :

a. Montrer que dans R^n on peut trouver n points qui sont deux à deux à la même distance (non nulle !)

b. Montrer que dans R^n on peut trouver $n+1$ points qui sont deux à deux à la même distance.

c. Montrer que dans R^3 on ne peut pas trouver 5 points qui sont deux à deux à la même distance.

d. Facultatif : montrer que dans R^n on ne peut pas trouver $n+2$ points qui sont deux à deux à la même distance.

76. Projection 3D d'un hypertétraèdre régulier 4D.

On donne dans R^5 les 5 points $A_i, i = 1..5$ dont les coordonnées sont nulles sauf la ième égale à 1.

a. A quelle distance ces points sont-ils les uns des autres ?

b. Effectuer une translation sur ces points de sorte que leur centre de gravité soit en O ; on obtient ainsi 5 points B_i.

c. Soit D la droite passant par le milieu de $[B_1B_2]$ et par le centre de gravité de $B_3B_4B_5$ et P l'hyperplan passant par O et orthogonal à D ; déterminer les projetés orthogonaux C_i des B_i sur P.

d. Vérifier que $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ est une base orthonormée de P

e. Déterminer les vecteurs coordonnées X_i des C_i dans cette base et représenter la figure formée par X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 en dimension 3.