

CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES

ENS Cachan - ENSAIS B - ENSAIT - ENSIETA - ESEM - ESIM - ISEP - ITECH
 CONCOURS COMMUN ENSAM - CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MATHEMATIQUES 2

L'usage des calculatrices est interdit pendant cette épreuve.

Avertissement : Dans tout ce problème, n et p sont des entiers naturels non nuls. La fonction cotangente est désignée par \cot .

Les parties IV et V sont indépendantes des parties I, II et III, sauf pour la question IV.6).

PARTIE I

I Les formules de Newton.

Soit $P = P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré n .

Soient z_1, z_2, \dots, z_n , ses racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.

On pose $S_p = \sum_{k=1}^n z_k^p$.

I.1. A l'aide des $P(z_i), 1 \leq i \leq n$, établir les relations :

- $a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + \dots + a_k S_k + \dots + a_1 S_1 + n a_0 = 0$
- $a_n S_p + a_{n-1} S_{p-1} + \dots + a_k S_{p-n+k} + \dots + a_1 S_{p-n+1} + a_0 S_{p-n} = 0$ pour $p > n$.

I.2. Application : Pour $n = 2$, calculer S_1, S_2, S_3 en fonction de $a = a_2, b = a_1$ et $c = a_0$.

On admettra que pour $p \leq n$, on a la relation similaire :

- $a_n S_p + a_{n-1} S_{p-1} + \dots + a_{n-p+k} S_k + \dots + a_{n-p+1} S_1 + a_{n-p} \cdot p = 0$.

PARTIE II

II Calcul de $\sum_{k=1}^n \cot^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}$.

II.1. A partir de $(e^{ix})^{2n+1}$ déterminer un polynôme P tel que pour tout réel x tel que $\sin x \neq 0$, on ait :

$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = P(\cot^2 x)$. Déterminer le degré de $P(X)$ ainsi que la valeur de son coefficient dominant.

II.2. Montrer que P possède n racines distinctes strictement positives.

Écrire la décomposition de $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

II.3. On pose $S_p = \sum_{k=1}^n \cot^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}$ et $S'_p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}}$.

Montrer que $S_1 = \frac{n(2n-1)}{3}$ et calculer S'_1 .

II.4. En utilisant la relation admise dans la partie I, établir la relation de récurrence, pour $p \leq n$:

$$C_{2n+1}^1 S_p = C_{2n+1}^3 S_{p-1} - C_{2n+1}^5 S_{p-2} + \dots + (-1)^p C_{2n+1}^{2p-1} S_1 + (-1)^{p+1} C_{2n+1}^{2p+1} \cdot p.$$

- II.5. En déduire (par récurrence sur p) que la suite $\left(\frac{S_p}{n^{2p}}\right)_{n \geq 1}$ est convergente, et que sa limite α_p vérifie :

$$\alpha_p = \frac{2^2}{3!} \alpha_{p-1} - \frac{2^4}{5!} \alpha_{p-2} + \dots + (-1)^p \frac{2^{2p-2}}{(2p-1)!} \alpha_1 + (-1)^{p+1} \frac{2^{2p}}{(2p+1)!} \cdot p.$$

Calculer α_1, α_2 et α_3 .

- II.6. En remarquant que $(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^p = 1$, montrer que $S'_p = \sum_{k=1}^p C_p^k S_k + n$; en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S'_p}{n^{2p}}$.

PARTIE III

- III. Un premier calcul de $\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$

On pose $\zeta_n(2p) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2p}}$.

- III.1. Montrer que pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cot x \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$ et en déduire que

$$\frac{\pi^{2p}}{2^{2p}} \frac{S_p}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2p}} \leq \zeta_n(2p) \leq \frac{\pi^{2p}}{2^{2p}} \frac{S'_p}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2p}}.$$

- III.2. En déduire la valeur de $\zeta(2p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta_n(2p)$ en fonction de α_p . Calculer $\zeta(2), \zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

PARTIE IV

- IV. Un deuxième calcul de $\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$.

Le réel y vérifiant $0 < |y| < 1$, soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de période 2π définie pour $t \in]-\pi, \pi]$ par $f(t) = \cos(ty)$.

- IV.1. Déterminer en fonction de y les coefficients de Fourier de f , en examinant bien les différents cas; justifier le fait que f soit égale à la somme de sa série de Fourier et écrire l'égalité obtenue.

- IV.2. En donnant à t la valeur de πy , montrer que $\cot(\pi y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2y}{n^2 - y^2} \right)$.

- IV.3. On admettra dans cette question le résultat suivant permettant d'intervertir les signes \sum :

Soit $(u_{n,p})_{\substack{n \geq 1 \\ p \geq 1}}$ une suite double de réels ≥ 0 (en d'autres termes : $(n, p) \mapsto u_{n,p}$ définit une

application de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vers \mathbb{R}_+) et supposons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ soit convergente pour tout

$p \geq 1$, de somme S_p , et que la série $\sum_{p=1}^{+\infty} S_p$ soit convergente de somme S ; alors pour tout $n \geq 1$

la série $\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$ est convergente et, posant $T_n = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n$ est convergente de somme S . On peut donc écrire, sous les hypothèses précédentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} \right).$$

Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}}$$

et montrer, à l'aide de IV.2.) et du résultat ci-dessus que,

pour tout $x \in]0, \pi[$: $x \cot x = 1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^{2p}} \zeta(2p) x^{2p}$.

- IV.4. On définit la fonction h sur $]-2\pi, 2\pi[$ par $h(0) = 1$ et $h(x) = \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2}$ pour $x \neq 0$; montrer que h est de classe C^∞ sur $]-2\pi, 2\pi[$. On pourra utiliser le fait que la fonction somme d'une série entière est de classe C^∞ .
- IV.5. Les nombres de Bernoulli B_p sont définis par $B_0 = h(0)$ et $B_p = -h^{(2p)}(0)$ pour $p \geq 1$. Exprimer $\zeta(2p)$ en fonction des nombres de Bernoulli.
- IV.6. Dédurre de II.5.) la relation : $\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} C_{2p+1}^{2k} 2^{2k} B_k = 2p$.

PARTIE V

V. Justification de l'interversion des signes \sum utilisée dans la partie IV.

$(u_{n,p})_{\substack{n \geq 1 \\ p \geq 1}}$ étant une suite double de réels ≥ 0 , on suppose que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ est convergente

pour tout $p \geq 1$, de somme S_p , et l'on suppose que la série $\sum_{p=1}^{+\infty} S_p$ est convergente, de somme S .

V.1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ la série $\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$ est convergente, c'est à dire que la suite (v_p)

définie par $v_p = \sum_{k=1}^p u_{n,k}$ est convergente.

V.2. Posant $T_n = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n$ est convergente de somme S .