CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES

ENS Cachan - ENSAIS B - ENSAIT - ENSIETA - ESEM - ESIM - ISEP - ITECH
CONCOURS COMMUN ENSAM - CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MATHEMATIQUES 2

L'usage des calculatrices est interdit pendant cette épreuve.

Avertissement : Dans tout ce problème, n et p sont des entiers naturels non nuls. La fonction cotangente est désignée par cot.

Les parties IV et V sont indépendantes des parties I, II et III, **sauf pour la question IV.6).**

PARTIE I

I. Les formules de Newton.

Soit $P = P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré n.

Soient $z_1, \; z_2, \ldots \;, z_n$, ses racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.

On pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} z_k^p$.

I.1. A l'aide des $P(z_i)$, $1 \leq i \leq n$, établir les relations :

- $$a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + \ldots + a_k S_k + \ldots + a_1 S_1 + n a_0 = 0$$
- $$a_n S_p + a_{n-1} S_{p-1} + \ldots + a_k S_{p-n+k} + \ldots + a_1 S_{p-n+1} + a_0 S_{p-n} = 0 \text{ pour } p > n.$$

I.2. Application : Pour $n = 2$, calculer S_1, S_2, S_3 en fonction de $a = a_2, b = a_1$ et $c = a_0$.

On admettra que pour $p \leq n$, on a la relation similaire :

- $$a_n S_p + a_{n-1} S_{p-1} + \ldots + a_{n-p+k} S_k + \ldots + a_{n-p+1} S_1 + a_{n-p} \cdot p = 0.$$

PARTIE II

II. Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \cot^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}$.

II.1. A partir de $\left(e^{ix}\right)^{2n+1}$ déterminer un polynôme P tel que pour tout réel x tel que $\sin x \neq 0$, on ait : $\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = P\left(\cot^2 x\right)$. Déterminer le degré de $P(X)$ ainsi que la valeur de son coefficient dominant.

II.2. Montrer que P possède n racines distinctes strictement positives.
Écrire la décomposition de $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

II.3. On pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} \cot^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}$ et $S'_p = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}}$.

Montrer que $S_1 = \dfrac{n(2n-1)}{3}$ et calculer S'_1.

II.4. En utilisant la relation admise dans la partie I, établir la relation de récurrence, pour $p \leq n$:

$$C^1_{2n+1} S_p = C^3_{2n+1} S_{p-1} - C^5_{2n+1} S_{p-2} + \ldots + (-1)^p C^{2p-1}_{2n+1} S_1 + (-1)^{p+1} C^{2p+1}_{2n+1} \cdot p.$$

II.5. En déduire (par récurrence sur p) que la suite $\left(\dfrac{S_p}{n^{2p}}\right)_{n\geq 1}$ est convergente, et que sa limite α_p vérifie :

$$\alpha_p = \frac{2^2}{3!}\alpha_{p-1} - \frac{2^4}{5!}\alpha_{p-2} + \ldots + (-1)^p \frac{2^{2p-2}}{(2p-1)!}\alpha_1 + (-1)^{p+1}\frac{2^{2p}}{(2p+1)!}\cdot p.$$

Calculer α_1, α_2 et α_3.

II.6. En remarquant que $\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^p = 1$, montrer que $S'_p = \sum_{k=1}^{p} C_p^k S_k + n$; en déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S'_p}{n^{2p}}$.

PARTIE III

III. **Un premier calcul de** $\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2p}}$

On pose $\zeta_n(2p) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{2p}}$.

III.1. Montrer que pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cot x \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sin x}$ et en déduire que

$$\frac{\pi^{2p}}{2^{2p}} \frac{S_p}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2p}} \leq \zeta_n(2p) \leq \frac{\pi^{2p}}{2^{2p}} \frac{S'_p}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2p}}.$$

III.2. En déduire la valeur de $\zeta(2p) = \lim_{n\to+\infty} \zeta_n(2p)$ en fonction de α_p. Calculer $\zeta(2), \zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

PARTIE IV

IV. **Un deuxième calcul de** $\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2p}}$.

Le réel y vérifiant $0 < |y| < 1$, soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période 2π définie pour $t \in]-\pi, \pi]$ par $f(t) = \cos(ty)$.

IV.1. Déterminer en fonction de y les coefficients de Fourier de f, en examinant bien les différents cas ; justifier le fait que f soit égale à la somme de sa série de Fourier et écrire l'égalité obtenue.

IV.2. En donnant à t la valeur de π, montrer que $\cot(\pi y) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2y}{n^2 - y^2}\right)$.

IV.3. On admettra dans cette question le résultat suivant permettant d'intervertir les signes $\sum$:

Soit $\left(u_{n,p}\right)_{\substack{n\geq 1\\ p\geq 1}}$ une suite double de réels ≥ 0 (en d'autres termes : $(n,p) \mapsto u_{n,p}$ définit une application de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{R}_+$) et supposons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ soit convergente pour tout $p \geq 1$, de somme S_p, et que la série $\sum_{p=1}^{+\infty} S_p$ soit convergente de somme S ; alors pour tout $n \geq 1$

.../...

la série $\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$ est convergente et, posant $T_n = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n$ est convergente de somme S. On peut donc écrire, sous les hypothèses précédentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}\right).$$

Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}}$$

et montrer, à l'aide de **IV.2.)** et du résultat ci-dessus que,

pour tout $x \in \left]0, \pi\right[$: $x \cot x = 1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^{2p}} \zeta(2p) x^{2p}$.

IV.4. On définit la fonction h sur $]-2\pi, 2\pi[$ par $h(0) = 1$ et $h(x) = \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$ pour $x \neq 0$; montrer que h est de classe C^{∞} sur $]-2\pi, 2\pi[$. On pourra utiliser le fait que la fonction somme d'une série entière est de classe C^{∞}.

IV.5. Les nombres de Bernoulli B_p sont définis par $B_0 = h(0)$ et $B_p = -h^{(2p)}(0)$ pour $p \geq 1$. Exprimer $\zeta(2p)$ en fonction des nombres de Bernoulli.

IV.6. Déduire de **II.5.)** la relation : $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_{2p+1}^{2k} 2^{2k} B_k = 2p$.

PARTIE V

V. **Justification de l'interversion des signes $\sum$ utilisée dans la partie IV.**

$(u_{n,p})_{\substack{n\geq 1\\ p\geq 1}}$ étant une suite double de réels ≥ 0, on suppose que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ est convergente pour tout $p \geq 1$, de somme S_p, et l'on suppose que la série $\sum_{p=1}^{+\infty} S_p$ est convergente, de somme S.

V.1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ la série $\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$ est convergente, c'est à dire que la suite (v_p) définie par $v_p = \sum_{k=1}^{p} u_{n,k}$ est convergente.

V.2. Posant $T_n = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n$ est convergente de somme S.