TOURNOI DE BELOTE

Robert FERREOL ; r. ferreol@noos.fr

Aux matheux, les gens demandent très souvent de couper les tartes, mais pas seulement... Un parent de ma femme m'a demandé un jour si je pouvais lui fournir un planning de rencontres pour un tournoi de belote, de façon à ce que chacun puisse faire équipe au moins une fois avec chacun des autres joueurs.

Sachant que la belote (comme le bridge) se joue à deux équipes de deux joueurs, la première idée qui m'est venu à l'esprit est d'organiser le championnat de sorte que chaque paire de joueurs joue une partie et une seule. S'il y a n joueurs, il y a $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ paires de joueurs, et le championnat comportera donc $\dfrac{n(n-1)}{4}$ rencontres entre deux paires de joueurs : n doit donc être de la forme $4k$ ou $4k+1$. Le problème se visualise alors bien en considérant le graphe dont les sommets sont les paires de joueurs, deux sommets étant reliés par une arête si les paires de joueurs correspondantes sont disjointes. Par exemple pour $n = 4$ ou 5, les joueurs étant numérotés de 1 à n, les graphes correspondants sont ceux de la figure 1, le deuxième étant l'élégant graphe de Petersen de la figure 2 :

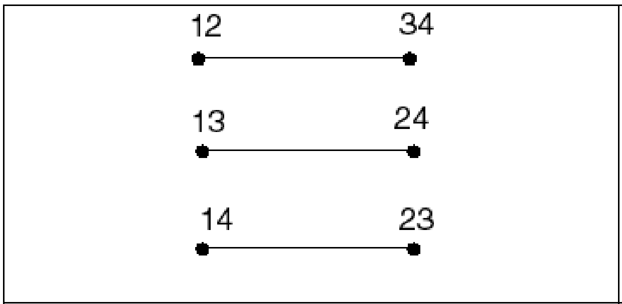

fig 1

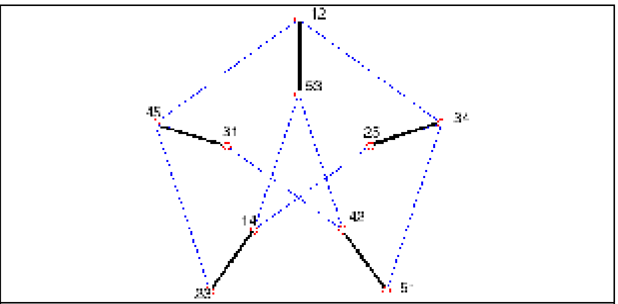
fig 2

Un championnat sera possible s'il existe dans le graphe ce que l'on appelle un « couplage parfait », c'est-à-dire un ensemble d'arêtes non adjacentes dont les extrémités recouvrent tous les sommets du graphe. A chaque arête de ce couplage correspondra une partie de belote ; par exemple dans le graphe du cas $n = 5$, nous avons épaissi les arêtes d'un couplage parfait possible, ce qui donne les 5 parties :

1 2 – 3 5 (équipe formée des joueurs 1 et 2 contre équipe formée des joueurs 3 et 5)
1 3 – 4 5 ;
1 4 – 2 3 ;
1 5 – 2 4 ;
2 5 – 3 4.

Pour le cas $n = 8$, une série de 14 parties possibles, obtenue informatiquement, est
1 2 – 4 6 ; 3 8 – 5 7
1 3 – 2 7 ;
1 4 – 2 3 ; 5 6 – 7 8
1 5 – 2 6 ; 4 7 – 5 8
1 6 – 2 4 ;
1 7 – 2 8 ; 2 5 – 3 4
1 8 – 3 5 ;
3 6 – 4 5 ;
3 7 – 6 8 ;
4 8 – 6 7 ;

On trouvera dans l'encadré 1 une démonstration due à **Wojciech Bienia** utilisant un théorème de théorie de graphes montrant que le problème posé possède toujours des solutions.

Encadré 1 : Un théorème d'Erdös et Gallaï (1959) (cf. [2] p. 203) dit que si dans un graphe simple, le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à la moitié du nombre de sommets, le graphe possède un circuit hamiltonien, c'est-à-dire un parcours fermé sur les arêtes du graphe passant par tous les sommets ; il possède alors forcément un couplage parfait, en prenant une arête sur deux du circuit hamiltonien. Or ici, le degré des sommets est C_{n-2}^2, et

$2C_{n-2}^2 \geq C_n^2 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 12 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{9+\sqrt{33}}{2} \Leftrightarrow n \geq 8$. Le problème posé possède donc toujours des solutions pour $n \geq 8$, et comme on a vu qu'il en possède pour $n = 4$ et 5, il en possède toujours (remarquons que le graphe de Petersen ne possède pas de circuit hamiltonien, bien qu'ayant un couplage parfait).
fin encadré 1

Cependant malgré la beauté des mathématiques utilisées ici, ce championnat n'est guère satisfaisant en pratique : en effet dans l'exemple donné précédemment, lorsque la partie 1 3 – 2 7 a lieu, les quatre autres joueurs doivent attendre car aucune partie n'est prévue pour eux. Je me suis donc demandé si on pouvait rajouter la contrainte qu'aucun joueur ne reste inactif. Cela implique que le nombre de joueurs soit un multiple de 4 ($n = 4k$), et que les $k(n-1)$ parties soient regroupées en $n - 1$ sessions ou « rondes » de k parties simultanées.
Ceci ressemble beaucoup à l'organisation d'un championnat de football, et je me suis souvenu d'un article du hors-série de Tangente sur le sport ([3] p. 29) qui donne la méthode suivante : placer les n équipes (pour nous ce sera les n joueurs) dans un tableau à deux lignes :

-->

1	$n = 4k$	$4k - 1$		$2k + 3$	$2k + 2$
2	3	4	....	$2k$	$2k + 1$

<---

qui représentera la première ronde (les rencontres se lisant verticalement). Les $n - 2$ autres rondes sont obtenues par des rotations dans le sens des flèches indiqué, *le numéro 1 restant fixe dans sa case*. C'est grâce à cette astuce que chaque joueur rencontrera chaque autre exactement une fois (si le 1 tournait avec les autres, les joueurs ne rencontreraient que la moitié des autres, deux fois). On peut imaginer que ce tableau est un jeu de taquin, le trou étant à la place du 1.
Pour les parties de belote, il suffit de regrouper deux rencontres successives. Par exemple, pour $n = 8$, le tableau de départ est

-->

1	8	7	6
2	3	4	5

<---

ce qui donne les parties (bien remarquer les permutations qui se lisent verticalement) :
1 2 – 3 8 ; 4 7 – 5 6
1 3 – 4 2 ; 5 8 – 6 7
1 4 – 5 3 ; 6 2 – 7 8
1 5 – 6 4 ; 7 3 – 8 2
1 6 – 7 5 ; 8 4 – 2 3
1 7 – 8 6 ; 2 5 – 3 4
1 8 – 2 7 ; 3 6 – 4 5

Ce qui est remarquable, c'est que cette méthode, totalement élémentaire une fois qu'on la connaît, donne en même temps une réponse affirmative au premier problème, que nous avions résolu à l'aide d'un théorème de théorie des graphes assez pointu ! Comme parfois en maths, il est plus facile d'en avoir plus que moins ; par exemple, il est parfois plus facile de démontrer l'existence d'une infinité d'éléments, que l'existence d'au moins un.

Cette méthode a été trouvée par Edouard Lucas, qui a présenté en 1883 dans son livre de mathématiques récréatives ([4] p. 176) le problème sous l'habillage suivant : les n = $2p$ demoiselles d'un pensionnat se promènent tous les jours en rang par deux. Comment les disposer pour qu'en $n - 1$ jours elles n'aient pas deux fois la même voisine ?

Il présente sa solution sous une forme un peu différente de celle que nous avons vue : la première demoiselle est au centre d'un cercle sur lequel sont réparties les $n - 1$ autres en formant un polygone régulier. Le premier jour, la demoiselle 1 sera avec la 2, et on peut représenter les $p - 1$ paires de demoiselles restantes par des cordes du cercle ; les paires de demoiselles des jours suivants seront obtenues par rotations d'un $n - 1$ ième de tour vers la droite. La condition que les demoiselles n'aient jamais la même voisine équivaut alors à ce que les $n - 1$ cordes aient toutes des longueurs différentes. Et effectivement, les cordes qui correspondent à la méthode vue plus haut avec le tableau à deux lignes sont bien toutes de longueurs distinctes (voir figure 3 dans le cas n = 8).

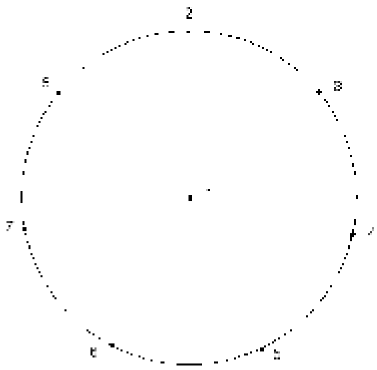

fig 3

Il reste cependant encore une imperfection dans le tournoi de belote obtenu : dans l'exemple donné avec 8 joueurs, on peut remarquer que « 3 » a 4 fois « 2 » comme adversaire, mais qu'il n'affronte jamais « 6 ». Serait-il possible d'organiser un tournoi où chaque concurrent ait exactement deux fois chaque autre comme adversaire (tournoi que nous désignerons dans la suite comme tournoi « parfait ») ?

Avec la présentation géométrique que nous avons vue, cela revient à ce que parmi les cordes reliant chaque joueur à ses deux adversaires, il y en ait exactement deux qui soient de la même longueur.

W. W. Rouse Ball a publié en 1922 dans son livre de récréations mathématiques ([5] page 222) des solutions pour les cas n = 8, 12, 16 trouvées par un joueur de Whist (ancêtre du bridge) du nom de Safford en 1890, mais il indique qu'il ne connaît pas à cette date de méthode générale.

Ces solutions sont :

- pour n = 8 :

1 2 – 3 5 ; 4 8 – 6 7 ;
1 3 – 4 6 ; 5 2 – 7 8 ;
1 4 – 5 7 ; 6 3 – 8 2 ;
1 5 – 6 8 ; 7 4 – 2 3 ;
1 6 – 7 2 ; 8 5 – 3 4 ;
1 7 – 8 3 ; 2 6 – 4 5 ;
1 8 – 2 4 ; 3 7 – 5 6 ;

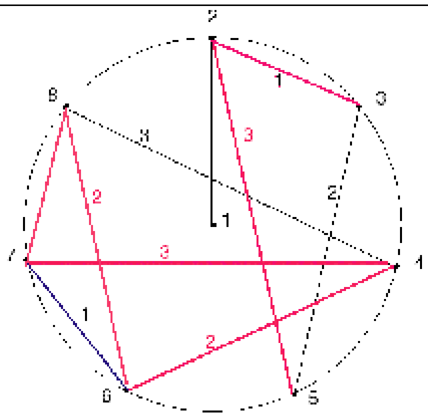

fig 4

Les longueurs des cordes noires sont toutes distinctes, et celles des cordes rouges apparaissent deux fois exactement : la solution de Safford est bien une solution du problème posé

.

- pour n = 12 (nous n'indiquons que la première ronde, les autres se déduisant par permutation) :

1 2 – 6 7 ; 3 12 – 4 10 ; 5 9 – 8 11 ;

- pour n = 16 :

1 2 – 12 7 ; 3 4 – 6 10 ; 5 13 – 16 14 ; 8 11 – 15 9 ;

Admirons la prouesse de déterminer ces solutions sans moyen informatique !
Beaucoup plus récemment, mon collègue Alain Esculier a fait un programme qui a permis de trouver toutes les solutions qui s'obtiennent par permutation comme les solutions précédentes (appelées solutions cycliques) jusqu'à n = 12 et certaines solutions jusqu'à n = 24 .

Pour n = 8, il y en a 6 ; qui se classent en deux groupes, stables par permutations d'équipes (nous n'indiquons que la première ronde) :

1 2 – 3 5 ; 4 8 – 6 7 et 1 2 – 4 8 ; 3 5 – 6 7 et 1 2 – 6 7 ; 4 8 – 3 5 ;

et :

1 2 – 3 7 ; 4 5 – 6 8 et 1 2 – 4 5 ; 6 8 – 3 7 et 1 2 – 6 8 ; 3 7 – 4 5 ;

Pour n = 12, il y en a 20 ; en voici une, différente de celle ci-dessus :

1 2 – 4 5 ; 3 10 – 7 9 ; 6 12 – 8 11 ;

On trouvera sur le site http://www.durangobill.com/BridgeCyclicSolutions.html de nombreuses autres solutions, jusqu'à 76 joueurs.

Ce n'est qu'en 1970 qu'a été démontré par R. M. Wilson et R. D. Baker l'existence d'un tournoi parfait (non nécessairement cyclique comme ceux que nous avons vu) pour toute valeur de n multiple de 4. La démonstration se trouve dans [1], livre dans lequel on trouvera nombre d'autres types de tournoi.
Bizarrement, cette démonstration utilise les tournois à $4k + 1$ concurrents, avec les mêmes contraintes, sauf qu'à chaque ronde l'un des joueurs est hors jeu, tournois peut-être moins naturels, mais en fait plus simples. En effet pour obtenir un tournoi cyclique à $4k + 1$ joueurs, il n'est plus besoin de différencier l'un des joueurs : par exemple pour n = 5, on a le tournoi, présenté ci-dessous à la manière de Lucas, qui n'est autre que celui que nous avions obtenu à partir du graphe de Petersen en début d'article :

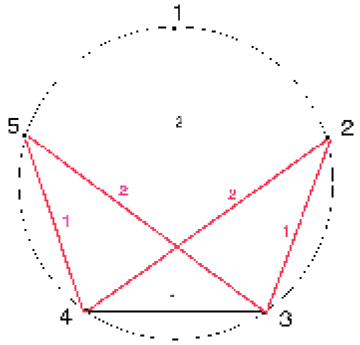

fig 5

Nous vous présentons dans l'encadré 2 une toute petite partie de la démonstration en donnant un exemple de tournoi parfait cyclique à n joueurs valable si $n = 4k + 1$ est premier.
Puisqu'on sait qu'il existe une infinité de premiers congrus à 1 modulo 4, cela donne une famille infinie de tournois.

Encadré 2 : on sait que si n est premier, le groupe multiplicatif du corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique ; soit a l'un de ses générateurs ; alors on montre que le tournoi cyclique dont la ronde de départ est formées des parties : $a^i\ a^{2k+i} - a^{k+i}\ a^{3k+i}$ pour i allant de 0 à $k-1$ (les numéros des joueurs étant définis modulo n) est bien parfait. Par exemple, pour n = 13 (9 n'est malheureusement pas premier), on peut prendre a = 2, et la première ronde est donc formée des parties :

$1\ 2^6 - 2^3\ 2^9 ; 2\ 2^7 - 2^4\ 2^{10} ; 2^2\ 2^8 - 2^5\ 2^{11}$, ce qui, en prenant les restes modulo 13, donne :

1 12 – 8 5 ; 2 11 – 3 10 ; 4 9 – 6 7
fin encadré 2.

Une petite adaptation de la démonstration précédente permet même de démontrer qu'il existe des tournois parfaits (non cycliques) quand $n = 4\,k + 1$ est *puissance* d'un nombre premier ; dans le cas n = 9 = 3², on obtient alors le tournoi :

9 3 – 5 7 ; 2 4 – 6 8
4 8 – 1 6 ; 3 7 – 4 2
1 2 – 9 4 ; 8 6 – 7 3
3 4 – 8 5 ; 6 9 – 1 7
8 7 – 2 1 ; 4 5 – 9 6
2 6 – 3 9 ; 7 1 – 5 4
4 9 – 7 8 ; 1 3 – 2 5
7 5 – 6 2 ; 9 8 – 3 1
6 1 – 4 3 ; 5 2 – 8 9

Une recherche informatique montre que de toutes façons, il n'existe pas de tournoi parfait à 9 joueurs...

Le type de championnat vu ici peut aussi servir dans l'élaboration d'un tournoi de tennis en doubles ; Ian Stewart a aussi présenté le problème dans [6], page 120, sous forme d'un concours de tambours. Si un lecteur a connaissance d'utilisation pratique de ces tournois ou a envie d'utiliser lui-même cette méthode, qu'il me le fasse savoir !

[1] ANDERSON, Ian, *Combinatorial designs and tournaments*, Clarendon Press, Oxford, 1997

[2] BERGE, Claude, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1973

[3] COHEN, Gilles, *Comment organiser un championnat*, Tangente HS n° 19, Paris, 2004

[4] LUCAS, Édouard , *Récréations mathématiques.* (vol 2), Gauthier-Villars, Paris, 1883 (Rééd.: Blanchard, Paris, 1979, ouvrage numérisé : http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-3944)

[5] ROUSE BALL, W. W. , *Mathematical recreations and essays*, tenth edition, Macmillian, London, 1922, (Rééd : Kessinger Publishing, 2005)

[6] STEWART, Ian*, Les douze jeux de Noël*, Pour la Science n° 134, décembre 1988

Liens Internet :

http://perso.wanadoo.fr/jean-paul.davalan/divers/mz/#ASc

http://www.jdawiseman.com/papers/tournaments/individual-pairs/individual-pairs.html