PROBLEME de niveau sup rédigé par R. Ferreol ferreol@mathcurve.com

TOUT SUR LE TRIANGLE

1. DONNÉES ET NOTATIONS

$*$ 3 points A, B, C non alignés d'un plan affine euclidien P orienté de façon à ce que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ soit directe.
$*$ A, B, C, sommets du triangle ABC ; les mêmes lettres désignent les mesures dans $[0,\pi]$ des angles en A, B, C.
$*$ $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ les côtés, de longueurs respectives a, b, c.
$*$ $2p = a+b+c$, périmètre du triangle.
$*$ S, aire du triangle.
$*$ I_A, I_B, I_C, milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$; ce sont les pieds des médianes issues de A, B, C.
$*$ H_A, H_B, H_C projetés orthogonaux de A, B, C sur (BC),(CA) et (AB) ; ce sont les pieds des hauteurs (AH_A), (BH_B) et (CH_C).
$*$ $h_A = AH_A, h_B = BH_B, h_C = CH_C$.

2. RELATIONS FONDAMENTALES

Un astérisque $(*)$ signifie qu'il y a 2 autres relations qui s'obtiennent par permutation des points.
Inégalité triangulaire (qui est une CNS d'existence du triangle) :

$$\boxed{|b-c| < a < b+c \quad (*) \quad \boxed{1}}$$

$$\boxed{A+B+C=\pi \quad \boxed{2}}$$

d'où

$$\boxed{\boxed{3}\quad \left|\begin{array}{l} \cos A+\cos B+\cos C = 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\ \sin A+\sin B+\sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ \tan A+\tan B+\tan C = \tan A\tan B\tan C \\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1 \end{array}\right.}$$

$$\boxed{a = b\cos C + c\cos B \quad (*) \quad \boxed{4}}$$

$$\boxed{\left|\begin{array}{l} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (*) \quad \boxed{5} \text{ (formule d'Al Kashi)} \\ \sin A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (*) \quad \boxed{6} \text{ (formule de Héron)} \end{array}\right.}$$

$$\boxed{S \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}ah_a \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \boxed{7}}$$

La loi des sinus :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{abc}{2S} \quad \boxed{8}}$$

Les formules de la médiane :

$$\boxed{9}\ \left|\ \begin{aligned} b^2+c^2 &= \frac{1}{2}a^2+2AI_A^2 \ (*) \\ b^2-c^2 &= 2\overline{BC}\,.\,\overline{H_AI_A} \qquad (*) \end{aligned}\right.$$

Indications de démonstration :

$\boxed{1}$ Utiliser les conditions d'intersection de 2 cercles.

$\boxed{2}$ Reporter l'angle A en B par exemple.

$\boxed{4}$ Projeter sur (BC).

$\boxed{5}$ Résoudre en $\cos A$ le système obtenu dans $\boxed{4}$ ou calculer $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2$.

$\boxed{6}$ Utiliser $\sin^2 A = 1-\cos^2 A$.

$\boxed{7}$ Le triangle est un demi-rectangle...

Pour la deuxième égalité, utiliser $\sin A = \frac{h_B}{c} = \frac{2S}{bc}$ ou bien $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI_A}\wedge\overrightarrow{BC}$.

$\boxed{8}$ Se déduit de $\boxed{7}$.

$\boxed{9}$ Utiliser $b^2 = \left(\overrightarrow{AI_A}+\overrightarrow{I_AC}\right)^2$ et $c^2 = \left(\overrightarrow{AI_A}+\overrightarrow{I_AB}\right)$.

3. TRIANGLES ISOCÈLES

PROP $A = B \Leftrightarrow a = b$ (utiliser $\boxed{5}$)

DEF Un triangle est dit *isocèle* s'il a 2 cotés (ou 2 angles) égaux, *équilatéral*, s'il a trois côtés égaux (donc 3 angles de mesure $\frac{\pi}{3}$).

4. TRIANGLES RECTANGLES

PROP : $A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2 = b^2+c^2$ (théorème de Pythagore)

DEF Un triangle est dit *rectangle* s'il a un angle droit.

5. CAS D'ÉGALITE DES TRIANGLES

On devrait dire cas d'*isométrie* des triangles.

PROP : pour ABC et $A'B'C'$ 2 triangles, les propositions suivantes sont équivalentes :

a. $\exists f \in Is(P) \ \ / \ f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$

b. $a = a', b = b', c = c'$

c. $A = A', b = b', c = c' \ **$

d. $A = A', B = B', c = c' \ **$
Dans le temps on disait, 2 triangles sont égaux s'ils ont 3 côtés correspondants égaux, ou 2 côtés égaux et un angle égal ou 2 angles égaux et un coté égal.
Indication : démontrer $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.
Les 3 dernières implications utilisent les formules $\boxed{5}$; pour $4. \Rightarrow 1.$ utiliser la rotation r telle que $r(A) = A'$ et $\vec{r}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ et composer éventuellement avec une symétrie.

6. CAS DE SIMILITUDE DES TRIANGLES

PROP : pour ABC et $A'B'C'$ 2 triangles, les propositions suivantes sont équivalentes :

a. $\exists f \in Sim(P) \quad / \ f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$

b. $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

c. $A = A', B = B', C = C'$
Indication : prouver $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$(utiliser les formules $\boxed{5}$) ; pour $(c) \Rightarrow (a)$, utiliser les cas d'égalité.

7. POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE

a. Les médianes sont concourantes au *centre de gravité* G de ABC. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI_A}$; G est aussi le point rendant minimum la fonction scalaire de Leibniz :

$$f(M) = AM^2 + BM^2 + CM^2$$

b. Les trois hauteurs sont concourantes en l'*orthocentre* du triangle ; utiliser par exemple :

$$\forall X \in P \quad \overrightarrow{AX}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BX}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CX}.\overrightarrow{AB} = 0$$

c. Centre du cercle circonscrit.

i. Il existe un unique point O équidistant des trois sommets ; c'est le point de concours des médiatrices des trois côtés, et c'est le centre du cercle circonscrit (C) au triangle ; on appelle A', B', C' les points diamétralement opposés à A, B, C.

ii. Sachant que $\widehat{(B'B, B'C)} = A$ (théorème de l'arc capable) montrer que $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ d'où :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \boxed{10}}$$

$$\boxed{abc = 4RS \quad \boxed{11}}$$

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C} \quad \boxed{12}}$$

$$\boxed{S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad \boxed{13}}$$

iii. O est l'orthocentre du triangle $I_A I_B I_C$.

iv. I_A est le milieu de $[A'H]$ $(*)$

v. Les symétriques orthogonaux de l'orthocentre par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit.
(Indication : si s est la symétrie orthogonale par rapport à (BC) montrer que $Hs(0) = R$ et regarder $\vec{s}\left(\overrightarrow{Hs(O)}\right)$, ou bien montrer que $\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(HC, HB)} = \widehat{(s(H)B, s(H)C)}$).

d. Centre du cercle inscrit.

i. Il existe un unique point I équidistant de $(AB),(BC),(CA)$; ce point est le point de concours des 3 bissectrices intérieures des angles géométriques du triangle ; appelons U,V,W les projetés orthogonaux de I sur les côtés $[BC],[CA],[AB]$; on pose $IU = IV = IW = r$; le cercle (c) de centre I et de rayon r est le *cercle inscrit dans le triangle*.

ii. En ajoutant les aires des triangles BIC,CIA et AIB, montrer que

$$\boxed{S = pr \quad \boxed{14}}$$

iii. Montrer que $AV = AW = p - a\ (*)$ (poser $x = AV, y = BU$ et $z = CW$ et calculer $x + y, y + z, z + x$)

iv. En déduire AI^2 en fonction a,b,c.

v. Soient X,Y,Z les pieds des bissectrices issues de A,B,C sur les côtés opposés ; montrer que

$$\frac{XB}{c} = \frac{XC}{b} = \frac{a}{b+c}$$

(utiliser $\boxed{10}$ dans ABX et ACX).

8. LIENS ENTRE O,G et H. CERCLE DES 9 POINTS

Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{2}$; quel est le transformé du triangle ABC ? En utilisant le c. du VII. 3. montrer que $h(H) = 0$ et en déduire le fait que O, G et H sont alignés : leur droite commune s'appelle la droite d'Euler du triangle. Montrer $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$.

Soit $(C') = h((C))$; montrer que son centre Ω est le milieu de $[OH]$ et son rayon $\frac{R}{2}$; montrer que l'homothétie h' de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme aussi (C) en (C'). En déduire que (C') passe par :

a. les pieds des médianes du triangle ABC

b. les pieds des hauteurs

c. les milieux des segments joignant chaque sommet à l'orthocentre.
(C') s'appelle le *cercle d'Euler* ou *cercle des 9 points* du triangle ABC.

9. COORDONNÉES BARYCENTRIQUES DE CES POINTS REMARQUABLES.

a. Démontrer que

$$\forall M \in P \quad \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM}\right)\overrightarrow{AM} + \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{BM} + \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)\overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

En déduire que les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A,B,C) sont

$$\left|\begin{array}{l}\text{aire}(MBC)\\ \text{aire}(MCA)\\ \text{aire}(MAB)\end{array}\right.$$

(il s'agit des aires "algébriques").

b. G a pour coordonnées barycentriques $\left|\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}\right.$. En déduire 3 triangles ayant la même aire.

c. I a pour coordonnées barycentriques $\left|\begin{array}{l}\sin A\\ \sin B\\ \sin C\end{array}\right.$ ou $\left|\begin{array}{l}a\\ b\\ c\end{array}\right.$ (utiliser 1. et la formule $\boxed{10}$ ou bien utiliser 7. (d).v.

d. O a pour coordonnées barycentriques $\left|\begin{array}{l}\sin 2A\\ \sin 2B\\ \sin 2C\end{array}\right.$ ou $\left|\begin{array}{l}a\cos A\\ b\cos B\\ c\cos C\end{array}\right.$ (utiliser $\overline{\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}} = R^2 \sin 2A$).

e. H a pour coordonnées barycentriques $\left|\begin{array}{l}\tan A\\ \tan B\\ \tan C\end{array}\right.$ ou $\left|\begin{array}{l}a/\cos A\\ b/\cos B\\ c/\cos C\end{array}\right.$ (utiliser $\overrightarrow{HO} = 2\overrightarrow{HG}$)