

I) ESPACES AFFINES ET SOUS-ESPACES AFFINES

Donnée : E \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n (≤ 3 en pratique)

En géométrie affine, les éléments de E peuvent être vus comme des points, et alors si $A, B, \vec{u} \in E$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ A + \vec{u} &= B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{u}\end{aligned}$$

On a alors la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Notons qu'alors $\vec{0}$ est un point comme un autre.

DEF : la *translation* de E de vecteur \vec{u} est l'application de E dans E qui à M fait correspondre $M + \vec{u}$: $t_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}$.

PROP : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$; une translation est bijective : $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$; l'ensemble $T(E)$ des translations de E muni de \circ forme un sous-groupe de $(BIJ(E), \circ)$ isomorphe à $(E, +)$.

DEF : les translatés d'un sous-espace vectoriel \vec{F} sont appelés des *sous-espaces affines* de E de *direction* \vec{F} , plus précisément : $F \subset E$ est un sous-espace affine de E de *direction* \vec{F} ss'il existe \vec{u} tel que $F = t_{\vec{u}}(\vec{F})$; la dimension de F est celle de \vec{F} .

Remarque : $t_{\vec{u}}(\vec{F}) = t_{\vec{v}}(\vec{F})$ ssi $\vec{v} - \vec{u} \in \vec{F}$.

PROP :

1. si $F \subset E$ et $A \in F$, F est un sous-espace affine de E ssi l'ensemble des vecteurs \overrightarrow{AM} pour M dans F est un sous-espace vectoriel de E et cet ensemble est la direction de F .

2. Il existe un unique sous-espace affine de direction \vec{F} donnée passant par un point A donné : c'est $A + \vec{F}$.

DEF : deux sous-espaces affines F et G sont dits parallèles au sens fort s'ils ont la même direction, parallèles au sens faible, si la direction de l'un est incluse dans la direction de l'autre.

CNS : F et G sont parallèles au sens fort si et seulement s'ils sont translatés l'un de l'autre, au sens faible si et seulement si l'un contient un translaté de l'autre.

REM : le parallélisme fort est une relation d'équivalence, tandis que le parallélisme faible n'est pas transitif.

PROP : une intersection de sous-espaces affines est soit vide, soit un sous-espace affine dont la direction est l'intersection des directions des s.e.a. de départ.

$$\overrightarrow{\bigcap F_i} = \bigcap \vec{F}_i \text{ si } \bigcap F_i \neq \emptyset$$

PROP : si $\vec{F} + \vec{G} = \vec{E}$, alors $F \cap G$ est non vide (donc si $\vec{F} \oplus \vec{G} = \vec{E}$, $F \cap G$ est non vide et réduit à un point).

II) APPLICATIONS AFFINES.

1) Définition et premières propriétés.

Soit f une application de E dans E ; l'image d'un point M est notée $f(M)$ ou M' .

DEF : f est dite *affine* s'il existe une application linéaire φ de E dans E telle que pour tous points A, B , $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB})$.

L'application φ est appelée la *partie linéaire* de f et est notée \vec{f} .

f est dite directe (ou positive) si sa partie linéaire l'est, indirecte (ou négative) si sa partie linéaire n'est pas.

PROP : si f est affine, on a donc

$$f(M) = A' + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$$

Exemple 1 : les applications affines de partie linéaire id_E sont les translations.

Exemple 2 : les applications affines de partie linéaire $-id_E$ sont les symétries centrales.

PROP 1 : la composée de 2 applications affines f et g de E dans E est affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

PROP 2 : une application affine est bijective si et seulement si sa partie linéaire l'est et $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$, on parle alors de *transformation* affine ; l'ensemble des transformations affines forme un groupe pour la composition, appelé le groupe affine de E , noté $GA(E)$.

PROP 3 : l'image par une application affine f d'un sous-espace affine F est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}(F)$; deux sous-espaces affines parallèles ont des images parallèles (une application affine conserve le parallélisme).

PROP 4 : l'ensemble des points invariants $INV(f)$ d'une application affine est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $INV(\overrightarrow{f}) = \ker(\overrightarrow{f} - id_E)$: de plus si $\text{Im}(\overrightarrow{f} - id_E) = \overrightarrow{E}$, alors il existe au moins un point invariant pour f .

CORO : si $INV(\overrightarrow{f})$ est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, f possède un unique point invariant.

Remarque : une application affine ayant un point invariant est "moralement" une application linéaire ; en effet si ce point invariant est Ω , on a :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega M})$$

CNS : une application affine est une application conservant les barycentres :

$$\begin{cases} f : E \rightarrow E \\ M \mapsto M' \end{cases} \text{ est affine ssi}$$

$$f(\text{bar}((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))) = \text{bar}((A'_1, a_1), \dots, (A'_n, a_n))$$

soit

$$\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{G'A'_i} = \overrightarrow{0}$$

DEF : l'homothétie (affine) de centre Ω et de rapport λ est définie par

$$M' = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$$

CNS : si $\lambda \neq 1$, f est une homothétie de rapport λ ssi f est affine de partie linéaire λid_E .

Par conséquent les applications affines de partie linéaire une homothétie vectorielle sont les homothéties OU LES TRANSLATIONS ; ces applications forment un groupe pour la composition, noté $HT(E)$.

DEF : si F est un s.e.a. de E et $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$, la symétrie (affine) s de base F et de direction \overrightarrow{G} est définie par

1. le milieu de $[MM']$ appartient à F
2. le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à \overrightarrow{G}

PROP : s peut aussi être définie comme l'application affine laissant un point de F invariant et de partie linéaire la symétrie \overrightarrow{s} de base \overrightarrow{F} et de direction \overrightarrow{G} .

PROP : les symétries affines sont les applications affines dont le carré est l'identité.

III) GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

DEF : un *repère cartésien* de E est une liste $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ où O est un point de E et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E ; les *coordonnées* d'un point M de E dans \mathcal{R} sont les coordonnées de \overrightarrow{OM} dans \mathcal{B} .

* *Représentation paramétrique* d'un sous-espace affine F de E dont on connaît un point A de coordonnées (a_1, \dots, a_n) et une famille génératrice $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ de la direction.

$$M(x_1, \dots, x_n) \in F \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{u_p}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \begin{cases} x_1 = * \lambda_1 + \dots + * \lambda_p + a_1 \\ \dots \\ x_n = * \lambda_1 + \dots + * \lambda_p + a_n \end{cases}$$

(remplacer les * par les coordonnées des $\overrightarrow{u_i}$ dans la base \mathcal{B}).

Exemple en dimension 3 : $\begin{cases} x = 2\lambda + \mu + 3 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda + \mu + 4 \end{cases}$ est le plan affine passant par et de direction

* *Système d'équations cartésiennes* d'un sous-espace affine.

PROP : l'ensemble des points $M \begin{vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}$ dont les coordonnées sont solutions d'un système d'équations linéaires (non forcément homogène) $(S) \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1 \dots p \end{cases}$ est soit vide, soit un sous-espace affine F de E dont la dimension est le rang de (S) et la direction l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u} \begin{vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}$ dont les coordonnées sont les solutions du système homogène associé à (S) .

Le système (S) est appelé un système d'équations cartésiennes de F .

Très important en pratique :

- quand on résout le système (S) , on obtient une représentation paramétrique de F .
- inversement, si on résout le système des équations paramétriques par rapport aux paramètres, les conditions de compatibilité fournissent un système d'équations cartésiennes.

Exemple : trouver une équation cartésienne du plan : $\begin{cases} x = 2\lambda + \mu + 3 \\ y = \lambda - \mu + 1 \\ z = \lambda + \mu + 3 \end{cases}$

* Expression analytique d'une application affine :

f application affine de E dans E ; $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ repère affine.

$$A = \text{mat}_{(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})}(\overrightarrow{f})$$

$$M(x_1, \dots, x_n) \text{ dans } \mathcal{R} ; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$M'(x'_1, \dots, x'_n) \text{ dans } \mathcal{R} ; X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OO'}(a_1, \dots, a_n) \text{ dans } (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}) : B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Alors

$$\boxed{X' = AX + B}$$

(comparer avec l'expression d'une application affine de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

REM : f est donc caractérisée par la donnée de A et de la colonne B . On appelle parfois "matrice complète" de f la matrice A bordée de la colonne B à droite.

PROP : f est bijective ssi l'image $(f(O), \vec{f}(\vec{e}_1), \dots, \vec{f}(\vec{e}_n))$ du repère \mathcal{R} par f est un repère de E .

IV) ISOMÉTRIES (AFFINES)

1) Généralités.

DEF : une *isométrie* (affine) d'un espace euclidien E est une application de E dans E conservant la distance euclidienne, autrement dit :

$$\forall A, B \in E \quad A'B' = AB$$

CNS 1 : une application de E dans E est une isométrie ssi c'est une application affine de E dans E dont la partie linéaire est une isométrie vectorielle de E .

CNS 2 : une application affine est une isométrie ssi elle transforme un repère orthonormé en un repère orthonormé.

PROP : l'ensemble des isométries de E forme un sous-groupe de $GA(E)$, noté $IS(E)$

DEF : une isométrie positive est appelée *déplacement*, une isométrie négative, *antidéplacement*.

PROP : l'ensemble des déplacements de E forme un sous-groupe de $IS(E)$, noté $DEP(E)$ (mais la composée de deux antidéplacements est un déplacement).

DEF : une symétrie (affine) est dite *orthogonale* si sa base et sa direction sont orthogonales.

PROP : les symétries orthogonales sont les isométries dont le carré est égal à l'identité. Ce sont des déplacements ssi la direction est de dimension paire.

DEF : les *réflexions* sont les symétries orthogonales dont la base est un hyperplan (i.e. une droite en dimension 2, ou un plan en dimension 3)

REM : les réflexions sont toujours des antidéplacements.

2) Isométries du plan.

DEF : si \vec{r}_θ est la rotation vectorielle d'angle θ du plan, la rotation affine $r_{\Omega, \theta}$ de centre Ω et d'angle θ est l'application affine de point fixe Ω et de partie linéaire \vec{r}_θ ; autrement dit, si $M' = r_{\Omega, \theta}(M)$

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \vec{r}_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$$

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , et $M(x, y)$, $\Omega(a, b)$, ceci s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x' - a \\ y' - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

ou, en passant aux affixes $M(z)$ et $\Omega(\omega)$:

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

DEF : la réflexion glissée de base D et de vecteur $\vec{u} \in \vec{D}$ est la composée (commutative) de la réflexion s_D et de la translation de vecteur \vec{u} .

Si D passe par O et est dirigée par le vecteur normé $\vec{u}(\cos \varphi, \sin \varphi)$, et $\vec{u} = \lambda \vec{n}$, ceci s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

soit, en complexes :

$$z' = e^{2i\varphi}z + \lambda e^{i\varphi}$$

THÉORÈME :

1) les déplacements du plan sont les rotations affines, et les translations ; ce sont les applications dont l'expression complexe est

$$z' = az + b, \text{ avec } |a| = 1$$

2) les antidéplacements du plan sont les réflexions glissées ; ce sont les applications dont l'expression complexe est

$$z' = a\bar{z} + b, \text{ avec } |a| = 1$$

3) Isométries en dimension 3.

DEF : étant donné une droite D , un vecteur \vec{n} non nul de \vec{D} et un réel θ , la *rotation* (affine) $r_{D, \vec{n}, \theta}$ de E_3 d'axe D orienté par \vec{n} et d'angle θ est l'application affine laissant invariant les points de D et de partie linéaire la rotation vectorielle autour de \vec{n} et d'angle θ .

Lorsque l'angle vaut π , la rotation n'est autre que la symétrie orthogonale de base D et est dénommée retournement, ou demi-tour (affine) autour de D .

Si de plus \vec{u} est un vecteur de \vec{D} , le *vissage* $v_{D, \vec{n}, \theta, \vec{u}}$ d'axe D orienté par \vec{n} , d'angle θ et de vecteur \vec{u} est la composée (commutative) de la rotation précédente avec la translation de vecteur \vec{u} .

Si P est un plan orthogonal à D , l'*antirotation* d'axe D orienté par \vec{n} , d'angle θ et de base P est la composée (commutative) de $r_{D, \vec{n}, \theta}$ avec la réflexion s_P .

THÉORÈME 1 :

- 1) Les déplacements de E_3 sont les vissages.
- 2) les antidéplacements de E_3 sont les antirotations et les réflexions glissées.

THÉORÈME 2 :

Toute isométrie de E_3 est produit d'au plus 4 réflexions (pour un déplacement : 2 ou 4 réflexions, pour un antidéplacement, 1 ou 3 réflexions).

V) SIMILITUDES (AFFINES)

1) Généralités.

DEF : une *similitude* (affine) d'un espace euclidien E est une application de E dans E multipliant la distance euclidienne par une constante > 0 (appelée le *rapport de similitude*), autrement dit :

$$\exists k > 0 \quad \forall A, B \in E \quad A'B' = k.AB$$

CNS 1 : une application de E dans E est une similitude ssi c'est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport non nul.

Le rapport de similitude est alors la valeur absolue du rapport de l'homothétie.

CNS 2 : une application de E dans E est une similitude ssi c'est une application affine de E dans E dont la partie linéaire est le produit par un réel non nul d'une isométrie vectorielle de E .

PROP : l'ensemble des similitudes de E forme un sous-groupe de $GA(E)$, noté $SIM(E)$; l'ensemble des similitudes directes de E forme un sous-groupe de $SIM(E)$, noté $SIM^+(E)$ (mais la composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe).

2) Similitudes directes du plan.

DEF : si \vec{r}_θ est la rotation vectorielle d'angle θ du plan, la similitude directe $s_{\Omega, \theta, \lambda}$ de centre Ω , d'angle θ et de rapport λ est l'application affine de point fixe Ω et de partie linéaire $\lambda \vec{r}_\theta$; autrement dit,

$$\overrightarrow{\Omega r_{\Omega, \theta}(M)} = \lambda \vec{r}_\theta \left(\overrightarrow{\Omega M} \right)$$

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , et $M(x, y)$, $\Omega(a, b)$, ceci s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x' - a \\ y' - b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

ou, en passant aux affixes $M(z)$ et $\Omega(\omega)$:

$$z' - \omega = \lambda e^{i\theta} (z - \omega)$$

THÉORÈME :

les similitudes directes du plan sont les applications définies précédemment, et les translations ; ce sont les applications dont l'expression complexe est

$$z' = az + b$$

3) (Hors programme) Similitudes indirectes du plan.

DEF : la réflexion-homothétie de base D de centre $\Omega \in D$ et de rapport λ est la composée (commutative) de la réflexion s_D et de l'homothétie de centre Ω et de rapport λ .

THÉORÈME :

les similitudes indirectes du plan sont les réflexions-homothéties et les réflexions glissées ; ce sont les applications dont l'expression complexe est

$$z' = a\bar{z} + b$$