I) ESPACES AFFINES ET SOUS-ESPACES AFFINES

Donnée : E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n (≤ 3 en pratique)

En géométrie affine, les éléments de E peuvent être vus comme des points, et alors si $A, B, \overrightarrow{u} \in E$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A \\ A + \overrightarrow{u} &= B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

On a alors la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Notons qu'alors $\overrightarrow{0}$ est un point comme un autre.
DEF : la *translation* de E de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application de E dans E qui à M fait correspondre $M+\overrightarrow{u}$: $t_{\overrightarrow{u}}(M) = M+\overrightarrow{u}$.

PROP : $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$; une translation est bijective : $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$; l'ensemble $T(E)$ des translations de E muni de $\circ$ forme un sous-groupe de $(BIJ(E), \circ)$ isomorphe à $(E, +)$.

DEF : les translatés d'un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ sont appelés des *sous-espaces affines* de E de *direction* $\overrightarrow{F}$, plus précisément : $F \subset E$ est un sous-espace affine de E de *direction* $\overrightarrow{F}$ ss'il existe $\overrightarrow{u}$ tel que $F = t_{\overrightarrow{u}}\left(\overrightarrow{F}\right)$; la dimension de F est celle de $\overrightarrow{F}$.

Remarque : $t_{\overrightarrow{u}}\left(\overrightarrow{F}\right) = t_{\overrightarrow{v}}\left(\overrightarrow{F}\right)$ ssi $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$.

PROP :
1. si $F \subset E$ et $A \in F$, F est un sous-espace affine de E ssi l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ pour M dans F est un sous-espace vectoriel de E et cet ensemble est la direction de F.
2. Il existe un unique sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F}$ donnée passant par un point A donné : c'est $A + \overrightarrow{F}$.

DEF : deux sous-espaces affines F et G sont dits parallèles au sens fort s'ils ont la même direction, parallèles au sens faible, si la direction de l'un est incluse dans la direction de l'autre.
CNS : F et G sont parallèles au sens fort si et seulement s'ils sont translatés l'un de l'autre, au sens faible si et seulement si l'un contient un translaté de l'autre.

REM : le parallélisme fort est une relation d'équivalence, tandis que le parallélisme faible n'est pas transitif.
PROP : une intersection de sous-espaces affines est soit vide, soit un sous-espace affine dont la direction est l'intersection des directions des s.e.a. de départ.

$$\overrightarrow{\bigcap F_i} = \bigcap \overrightarrow{F}_i \text{ si } \bigcap F_i \neq \emptyset$$

PROP : si $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, alors $F \cap G$ est non vide (donc si $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, $F \cap G$ est non vide et réduit à un point).

II) APPLICATIONS AFFINES.

1) Définition et premières propriétés.

Soit f une application de E dans E ; l'image d'un point M est notée $f(M)$ ou M'.

DEF : f est dite *affine* s'il existe une application linéaire φ de E dans E telle que pour tous points A, B, $\overrightarrow{A'B'} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$.
L'application φ est appelée la *partie linéaire* de f et est notée $\overrightarrow{f}$.
f est dite directe (ou positive) si sa partie linéaire l'est, indirecte (ou négative) si sa sa partie linéaire l'est.

PROP : si f est affine, on a donc

$$f(M) = A' + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$$

Exemple 1 : les applications affines de partie linéaire id_E sont les translations.

Exemple 2 : les applications affines de partie linéaire -id_E sont les symétries centrales.

PROP 1 : la composée de 2 applications affines f et g de E dans E est affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

PROP 2 : une application affine est bijective si et seulement si sa partie linéaire l'est et $\overrightarrow{f^{-1}} = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}$, on parle alors de *transformation* affine ; l'ensemble des transformations affines forme un groupe pour la composition, appelé le groupe affine de E, noté $GA(E)$.

PROP 3 : l'image par une application affine f d'un sous-espace affine F est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{F}\right)$; deux sous-espaces affines parallèles ont des images parallèles (une application affine conserve le parallélisme).

PROP 4 : l'ensemble des points invariants $INV(f)$ d'une application affine est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $INV(\overrightarrow{f}) = \ker\left(\overrightarrow{f} - id_E\right)$: de plus si $\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - id_E\right) = \overrightarrow{E}$, alors il existe au moins un point invariant pour f.

CORO : si $INV(\overrightarrow{f})$ est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, f possède un unique point invariant.

Remarque : une application affine ayant un point invariant est "moralement" une application linéaire ; en effet si ce point invariant est Ω, on a :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$$

CNS : une application affine est une application conservant les barycentres :
$\left\{\begin{array}{l} f : E \to E \\ M \mapsto M' \end{array}\right.$ est affine ssi

$$f\left(bar\left((A_1, a_1), ..., (A_n, a_n)\right)\right) = bar\left((A'_1, a_1), ..., (A'_n, a_n)\right)$$

soit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{G'A'_i} = \overrightarrow{0}$$

DEF : l'homothétie (affine) de centre Ω et de rapport λ est définie par

$$M' = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$$

CNS : si $\lambda \neq 1$, f est une homothétie de rapport λ ssi f est affine de partie linéaire λid_E.

Par conséquent les applications affines de partie linéaire une homothétie vectorielle sont les homothéties OU LES TRANSLATIONS ; ces applications forment un groupe pour la composition, noté $HT(E)$.

DEF : si F est un s.e.a. de E et $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$, la symétrie (affine) s de base F et de direction $\overrightarrow{G}$ est définie par

1. le milieu de $[MM']$ appartient à F
2. le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à $\overrightarrow{G}$

PROP : s peut aussi être définie comme l'application affine laissant un point de F invariant et de partie linéaire la symétrie $\overrightarrow{s}$ de base $\overrightarrow{F}$ et de direction $\overrightarrow{G}$.

PROP : les symétries affines sont les applications affines dont le carré est l'identité.

III) GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

DEF : un *repère cartésien* de E est une liste $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, .., \overrightarrow{e_n})$ où O est un point de E et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, .., \overrightarrow{e_n})$ une base de E ; les *coordonnées* d'un point M de E dans $\mathcal{R}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{B}$.

* *Représentation paramétrique* d'un sous-espace affine F de E dont on connaît un point A de coordonnées $(a_1, ..., a_n)$ et une famille génératrice $(\overrightarrow{u_1}, .., \overrightarrow{u_p})$ de la direction.

$$\begin{aligned} M(x_1,...,x_n) &\in F \Leftrightarrow \exists \lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + .. + \lambda_p \overrightarrow{u_p} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{c} x_1 = *\lambda_1 + ... + *\lambda_p + a_1 \\ ... \\ x_n = *\lambda_1 + ... + *\lambda_p + a_n \end{array} \right. \end{aligned}$$

(remplacer les $*$ par les coordonnées des $\overrightarrow{u_i}$ dans la base $\mathcal{B}$).

Exemple en dimension 3 : $\left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda + \mu + 3 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda + \mu + 4 \end{array} \right.$ est le plan affine passant par .... et de direction ....

* *Système d'équations cartésiennes* d'un sous-espace affine.

PROP : l'ensemble des points $M \left| \begin{array}{c} x_1 \\ ... \\ x_n \end{array} \right.$ dont les coordonnées sont solutions d'un système d'équations linéaires (non forcément homogène) $(S) \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1...p \right.$ est soit vide, soit un sous-espace affine F de E dont la dimension est le rang de (S) et la direction l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} x_1 \\ ... \\ x_n \end{array} \right.$ dont les coordonnées sont les solutions du système homogène associé à (S).

Le système (S) est appelé un système d'équations cartésiennes de F.

Très important en pratique :
- quand on résout le système (S), on obtient une représentation paramétrique de F.
- inversement, si on résout le système des équations paramétriques par rapport aux paramètres, les conditions de compatibilité fournissent un système d'équations cartésiennes.

Exemple : trouver une équation cartésienne du plan : $\left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda + \mu + 3 \\ y = \lambda - \mu + 1 \\ z = \lambda + \mu + 3 \end{array} \right.$

* Expression analytique d'une application affine :

f application affine de E dans E ; $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, .., \overrightarrow{e_n})$ repère affine.

$A = mat_{(\overrightarrow{e_1},..,\overrightarrow{e_n})}\left(\overrightarrow{f}\right)$

$M(x_1,...,x_n)$ dans $\mathcal{R}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$

$M'(x'_1,...,x'_n)$ dans $\mathcal{R}$; $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{OO'}(a_1,...,a_n)$ dans $(\overrightarrow{e_1},..,\overrightarrow{e_n})$: $B = \begin{bmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix}$

Alors

$$\boxed{X' = AX + B}$$

(comparer avec l'expression d'une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

REM : f est donc caractérisée par la donnée de A et de la colonne B. On appelle parfois "matrice complète" de f la matrice A bordée de la colonne B à droite.

PROP : f est bijective ssi l'image $\left(f(O), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_1}), .., \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_n})\right)$ du repère $\mathcal{R}$ par f est un repère de E.

IV) ISOMÉTRIES (AFFINES)

1) Généralités.

DEF : une *isométrie* (affine) d'un espace euclidien E est une application de E dans E conservant la distance euclidienne, autrement dit :

$$\forall A, B \in E \;\; A'B' = AB$$

CNS 1 : une application de E dans E est une isométrie ssi c'est une application affine de E dans E dont la partie linéaire est une isométrie vectorielle de E.

CNS 2 : une application affine est une isométrie ssi elle transforme un repère orthonormé en un repère orthonormé.

PROP : l'ensemble des isométrie de E forme un sous-groupe de $GA(E)$, noté $IS(E)$

DEF : une isométrie positive est appelée *déplacement*, une isométrie négative, *antidéplacement.*

PROP : l'ensemble des déplacements de E forme un sous-groupe de $IS(E)$, noté $DEP(E)$ (mais la composée de deux antidéplacements est un déplacement).

DEF : une symétrie (affine) est dite *orthogonale* si sa base et sa direction sont orthogonales.

PROP : les symétries orthogonales sont les isométries dont le carré est égal à l'identité. Ce sont des déplacements ssi la direction est de dimension paire.

DEF : les *réflexions* sont les symétries orthogonales dont la base est un hyperplan (i.e. une droite en dimension 2, ou un plan en dimension 3)

REM : les réflexions sont toujours des antidéplacements.

2) Isométries du plan.

DEF : si $\overrightarrow{r_\theta}$ est la rotation vectorielle d'angle θ du plan, la rotation affine $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ est l'application affine de point fixe Ω et de partie linéaire $\overrightarrow{r_\theta}$; autrement dit, si $M' = r_{\Omega,\theta}(M)$

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{r_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$$

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et $M(x,y)$, $\Omega(a,b)$, ceci s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x'-a \\ y'-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

ou, en passant aux affixes $M(z)$ et $\Omega(\omega)$:

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$

DEF : la réflexion glissée de base D et de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ est la composée (commutative) de la réflexion s_D et de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Si D passe par O et est dirigée par le vecteur normé $\overrightarrow{u}(\cos\varphi, \sin\varphi)$, et $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{n}$, ceci s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

soit, en complexes :

$$z' = e^{2i\varphi}\overline{z} + \lambda e^{i\varphi}$$

THÉORÈME :

1) les déplacements du plan sont les rotations affines, et les translations ; ce sont les applications dont l'expression complexe est

$$z' = az + b, \text{ avec } |a| = 1$$

2) les antidéplacements du plan sont les réflexions glissées ; ce sont les applications dont l'expression complexe est

$$z' = a\overline{z} + b, \text{ avec } |a| = 1$$

3) Isométries en dimension 3.

DEF : étant donné une droite D, un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul de $\overrightarrow{D}$ et un réel θ, la *rotation* (affine) $r_{D,\overrightarrow{n},\theta}$ de E_3 d'axe D orienté par $\overrightarrow{n}$ et d'angle θ est l'application affine laissant invariant les points de D et de partie linéaire la rotation vectorielle autour de $\overrightarrow{n}$ et d'angle θ.

Lorsque l'angle vaut π, la rotation n'est autre que la symétrie orthogonale de base D et est dénommée retournement, ou demi-tour (affine) autour de D.

Si de plus $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de $\overrightarrow{D}$, le *vissage* $v_{D,\overrightarrow{n},\theta,\overrightarrow{u}}$ d'axe D orienté par $\overrightarrow{n}$, d'angle θ et de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la composée (commutative) de la rotation précédente avec la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Si P est un plan orthogonal à D, l'*antirotation* d'axe D orienté par $\overrightarrow{n}$, d'angle θ et de base P est la composée (commutative) de $r_{D,\overrightarrow{n},\theta}$ avec la réflexion s_P.

THÉORÈME 1 :
1) Les déplacements de E_3 sont les vissages.
2) les antidéplacements de E_3 sont les antirotations et les réflexions glissées.

THÉORÈME 2 :

Toute isométrie de E_3 est produit d'au plus 4 réflexions (pour un déplacement : 2 ou 4 réflexions, pour un antidéplacement, 1 ou 3 réflexions).

V) SIMILITUDES (AFFINES)
1) Généralités.
DEF : une *similitude* (affine) d'un espace euclidien E est une application de E dans E multipliant la distance euclidienne par une constante > 0 (appelée le *rapport de similitude*), autrement dit :

$$\exists k > 0 \quad \forall A, B \in E \ \ A'B' = k.AB$$

CNS 1 : une application de E dans E est une similitude ssi c'est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport non nul.

Le rapport de similitude est alors la valeur absolue du rapport de l'homothétie.

CNS 2 : une application de E dans E est une similitude ssi c'est une application affine de E dans E dont la partie linéaire est le produit par un réel non nul d'une isométrie vectorielle de E.

PROP : l'ensemble des similitudes de E forme un sous-groupe de $GA(E)$, noté $SIM(E)$; l'ensemble des similitudes directes de E forme un sous-groupe de $SIM(E)$, noté $SIM^+(E)$ (mais la composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe).

2) Similitudes directes du plan.

DEF : si $\overrightarrow{r_\theta}$ est la rotation vectorielle d'angle θ du plan, la similitude directe $s_{\Omega,\theta;\lambda}$ de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ est l'application affine de point fixe Ω et de partie linéaire $\lambda\overrightarrow{r_\theta}$; autrement dit,

$$\overrightarrow{\Omega r_{\Omega,\theta}(M)} = \lambda\overrightarrow{r_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$$

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et $M(x, y)$, $\Omega(a, b)$, ceci s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x' - a \\ y' - b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

ou, en passant aux affixes $M(z)$ et $\Omega(\omega)$:

$$z' - \omega = \lambda e^{i\theta} (z - \omega)$$

THÉORÈME :

les similitudes directes du plan sont les applications définies précédemment, et les translations ; ce sont les applications dont l'expression complexe est

$$z' = az + b$$

3) (Hors programme) Similitudes indirectes du plan.

DEF : la réflexion-homothétie de base D de centre $\Omega \in D$ et de rapport λ est la composée (commutative) de la réflexion s_D et de l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

THÉORÈME :

les similitudes indirectes du plan sont les réflexions-homothéties et les réflexions glissées ; ce sont les applications dont l'expression complexe est

$$z' = a\overline{z} + b$$