

Mesure de la masse volumique d'un solide par la méthode de la balance hydrostatique

1.Travail préparatoire.

2.Mesure de la masse volumique du solide.

2.1.Mise en œuvre de la méthode.

2.2.Dépouillement et exploitation des mesures.

2.3.Travaux complémentaires.

2.4.Conclusions

3.Annexes et résultats de mesures.

1.Travail préparatoire :

Calcul de la masse volumique à partir de l'expression générale pour des conditions données

Soit à déterminer la masse volumique de l'air à partir des conditions initiales :

Température : 21,5 °C

Pression : 1015,25 mBar = 101 525 Pa

Humidité relative : 0,55

A partir de l'expression générale

$$r(\text{air}) = 3,48353 \times 10^{-3} \times (P \div (Z \times T)) \times (1 - 0,378 X_v) \quad (1)$$

avec

$$Z = 1 - P \div T \times (1,58897 \times 10^{-5} - 2,5327 \times 10^{-8} \times t + 5,239 \times 10^{-6} \times X_v + 1,508 \times 10^{-4} X_v^2) \quad (2)$$

$$\text{et} \quad X_v = h p' s_v(t) \div P \quad (3)$$

$$\text{tel que} \quad p' s_v(t) = \exp(6,426512 + 7,1518 \times 10^{-2} \times t - 2,39 \times 10^{-4} \times t^2) \quad (4)$$

où $r(\text{air})$: Masse volumique de l'air.

P : pression atmosphérique en Pascal

T : Température ambiante en °K (on note également que $T=t+273,15$)

Z : Facteur de compressibilité.

Application numérique:

$$(4) \Rightarrow p' s_v(t) = \exp(6,426512 + 7,1518 \times 10^{-2} \times 21,5 - 2,39 \times 10^{-4} \times 21,5^2)$$

$$\Rightarrow p' s_v(t) = 2575,1711$$

$$\text{et (3)} \Rightarrow X_v = 0,55 \times 2575,11 \div 101525$$

$$\Rightarrow X_v = 13,95069 \times 10^{-3}$$

$$\text{d'où (2)} \Rightarrow$$

$$Z = 1 - 101525 \div (273,15 + 21,5) \times (1,58897 \times 10^{-5} - 2,5327 \times 10^{-8} \times 21,5 + 5,239 \times 10^{-6} \times 13,95069 \times 10^{-3} + 1,508 \times 10^{-4} \times (13,95069 \times 10^{-3})^2)$$

$$\text{soit} \quad Z = 0,994677$$

et

$$r(\text{air}) = 3,48353 \times 10^{-3} \times (101525 \div (0,994677 \times (273,15 + 21,5))) \times (1 - 0,378 \times 13,95069 \times 10^{-3})$$

$r(\text{air}) = 1,20035 \text{ kg.m}^{-3}$

Expression de $r(\text{eau})$ sous la forme d'un produit de quatre termes de la forme (1-e)

Expression de la masse volumique par la formule empirique de Tilton et Taylor

$$r(\text{eau}) = [1 - (t(\text{eau}) - 3,9863)^2 \div 508929,2 \times (te + 288,9414) \div (te + 68,12963)] \quad (1)$$

$$\times (0,999973) \quad (2)$$

$$\times [1 \div (1 - C(B \div 760 + I \div 1033 - 1))] \quad (3)$$

$$\times [1 - 10^{-6} \times (2,11 - 0,53t(\text{eau})) \times (1 - 1 \div (1 + t))] \quad (4)$$

on nommera respectivement P1, P2, P3, P4 les 4 polynômes tels que $r(\text{eau}) = P1 * P2 * P3 * P4$

Pour pouvoir donner une représentation sous la forme d'expression (1-e), on donne les conditions normales de pression et de température (CNTP) soit

$$t(\text{eau}) = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}, \quad B = 760 \text{ mm (de Hg)}$$

$$C = 4,77 \times 10^{-6} \text{ atm}^{-1}$$

On établit la profondeur d'immersion du solide dans notre expérimentation à $I = 7 \text{ cm}$ (valeur moyenne)

La durée t d'exposition de l'eau à l'air est fixée à 50 jours

Calcul des polynômes :

$$(1) \Rightarrow P1 = [1 - (20 - 3,9863)^2 \div 508929,2 \times (20 + 288,9414) \div (20 + 68,12963)]$$

$$P1 = 1 - 1,76637 \times 10^{-3}$$

$$(2) \Rightarrow P2 = 1 - 2,7 \times 10^{-5}$$

$$(3) \Rightarrow P3 = [1 \div 4,77 \times 10^{-6} \times (1 - (760 \div 760 + 7 \div 1033 - 1))]$$

$$P3 = 1 \div (1 - 3,233 \times 10^{-8})$$

$$(4) \Rightarrow P4 = \times [1 - 10^{-6} \times (2,11 - 20) \times (1 - 1 \div (1 + 50))]$$

$$P4 = 1 + 8,3235 \times 10^{-6}$$

En résumé : $e_1 = 1,76637 \times 10^{-3}$, $e_2 = 2,7 \times 10^{-5}$, $e_3 = 3,233 \times 10^{-8}$, $e_4 = 8,3235 \times 10^{-6}$

On constate que $e^1 \gg e^2 > e^4 \gg e^5$

On peut donc négliger e^4, e^5 et conserver e^3 sous forme de la constante.

Calcul de l'incertitude de r_e exprimée sous forme d'écart type S_{re} .

Suite à l'étude précédente nous pouvons donc considérer l'expression de r_e sous la forme

$$r(eau) = [1 - (t(eau) - 3,9863)^2 \div 508929,2 \times (te + 288,9414) \div (te + 68,12963)] \times (0,999973)$$

Nous pouvons exprimer l'ensemble sous forme de constantes c, d, e, f

$$r(eau) = [1 - [(te - c)^2 \div d \times (te + e) \div (te + f)]] \times (0,999973)$$

$$r(eau) \text{ est une fonction de } te \text{ soit } r(eau) = K \cdot f(te)$$

Si l'on applique la loi de propagation des incertitudes, on peut écrire

$$S^2 r(eau) = k^2 [\partial f(te) / \partial te]^2 \times S^2(te) \quad (8)$$

avec $[\partial f(te) / \partial te] = u'vw + uv'w + uvw'$

tels que	$u = (te - c)^2$	soit	$u' = 2(te - c)$
	$v = te + e$	soit	$v' = 1$
	$w = [d(te + f)]^{-1}$	soit	$w' = -[d(te + f)^2]^{-1}$

d'où

$$[\partial f(te) / \partial te] = [2(te - c) \times (te + e) / (d(te + f))] + [(te - c)^2 / (d(te + f))] - [(te - c)^2 (te + e) / (d(te + f))^2]$$

$$[\partial f(te) / \partial te] = [(te - c) / (d(te + f))^2] [2(te + f) \times (te + e) + (te - c) \times (te + f) - (te - c)(te + e)]$$

$$[\partial f(te) / \partial te] = [(te - c) / (d(te + f))^2] [2(te + f) \times (te + e) + (te - c) \times (f - c)]$$

On exprime alors l'équation (8) sous la forme

$Sr(eau) = k[(te - c) / (d(te + f))^2] [2(te + f) \times (te + e) + (te - c) \times (f - c)] \times S(te)$
--

Application numérique :

Pour $Ste = 0,03^\circ C$, voici l'écart type que l'on obtient sur la détermination de la masse volumique

$Sp(eau / 5^\circ C) = 4,8 \times 10^{-7} g.cm^{-3}$	ou	$Sp(eau / 5^\circ C) = 4,8 \times 10^{-4} kg.m^{-3}$
$Sp(eau / 10^\circ C) = 2,6 \times 10^{-6} g.cm^{-3}$	ou	$Sp(eau / 10^\circ C) = 2,6 \times 10^{-3} kg.m^{-3}$
$Sp(eau / 15^\circ C) = 4,5 \times 10^{-6} g.cm^{-3}$	ou	$Sp(eau / 15^\circ C) = 4,5 \times 10^{-3} kg.m^{-3}$
$Sp(eau / 20^\circ C) = 6,2 \times 10^{-6} g.cm^{-3}$	ou	$Sp(eau / 20^\circ C) = 6,2 \times 10^{-3} kg.m^{-3}$

Que peut-on dire de e_1, e_2, e_3, e_4 ,

Si on compare l'ordre de grandeur des incertitudes issues des termes correctifs lorsque ceux-ci sont représentés sous la forme $(1 - e)$ on constate que l'écart type sur la valeur de la masse volumique est de l'ordre de grandeur de e_4 .

On pourra donc écrire re sous la forme

$re = (1 - e_1)(1 - e_2)(1 + e_4)$

2.Mesure de la masse volumique du solide.

Principe à étudier :

La méthode de détermination de la masse volumique par balance hydrostatique consiste à réaliser une double pesée d'un solide dont la masse volumique est l'objet de la mesure. L'une des deux pesées s'effectue alors que le solide est plongé dans l'eau alors que l'autre s'effectue dans l'air.

Pour la mise en œuvre de cette méthode, on réalisera 4 cycles de mesures. Le premier et le dernier cycle comprendront une série de mesures dans l'air. Le second et troisième cycle s'effectueront quant à eux dans l'eau. Chaque cycle comprend 10 séries de mesures, décomposée chacune d'elle en deux pesées : Une pesée du portique, « support du solide » et une pesée de l'ensemble « solide sur son support ».

2.1.Mise en œuvre de la méthode

La mesure étant soumise à des grandeurs d'influence, il conviendra de quantifier les variations de grandeurs d'influence afin d'apporter les corrections nécessaires pour obtenir une mesure de la masse volumique du solide la plus proche de la valeur vraie.

Les principales grandeurs d'influence sont :

La température ambiante (laboratoire) :

- Elle sera mesurée à l'aide d'un thermomètre à mercure (précision de la lecture à ¼ de graduation).

- La température du bûcher sera également mesurée à l'aide d'une sonde de platine PT 100.

La pression atmosphérique : Elle est mesurée à l'aide d'un manomètre.

L'humidité relative : Un psychromètre permet de déduire au moyen d'une règle graduée (abaque) l'humidité relative.

Pesées dans l'air

Conditions des mesures :

Pour les séries de pesées dans l'air on utilisera dans les 2 cycles un fil de suspension (assurant la liaison du portique et du support de masse) de 0.14 mm de diamètre.

Pour l'exploitation des données on réalisera une moyenne entre deux mesures successives du berceau. Chaque mesure du solide est alternée avec une mesure du berceau.

Le résultat d'une mesure s'exprimera sous la forme :

$O_n(\text{air}) = O_{n(b+s)}(\text{air}) - 0.5 [O_n(b)(\text{air}) + O_{n+1}(b)(\text{air})]$
--

Pesées dans l'eau:

Conditions de mesure :

Dans le cas de mesure dans l'eau, on procédera à deux cycles utilisant pour l'un d'eux un fil de suspension de 0.14 mm de diamètre et pour l'autre un fil de 0.09 mm de diamètre.

Le traitement des données est réalisé de manière identique à l'opération précédente (mesures dans l'air).

$$O_n(\text{eau}) = O_n(b+s)(\text{eau}) - 0.5 [O_n(b)(\text{eau}) + O_{n+1}(b)(\text{eau})]$$

2.2. Dépouillement et exploitation des mesures.

Outils de dépouillement des mesures brutes :

Pour la température à l'aide de la sonde platine PT 100 : Certificat avec les valeurs d'étalonnage de la sonde.

Mesure de la balance : Vérification des valeurs (homogénéité des valeurs). Les valeurs aberrantes ne seront pas prises en compte.

Résultats de mesure :

Etat des documents annexes fournis :

Annexe 1 : Série de mesure 1 : Mesures dans l'air

Annexe 2 : Série de mesure 2 : Mesures dans l'eau : fil de 0,14 mm

Annexe 3 : Série de mesure 3 : Mesures dans l'eau : fil de 0.09 mm

Annexe 4 : Série de mesure 4 : Mesures dans l'air

Traitement et exploitation des résultats :

Calcul de la valeur de la masse volumique à partir des formules générales.

A partir des mesures, on détermine les différentes composantes intervenant dans le calcul de la masse volumique de l'eau d'après la formule générale. (formules issue du document présentant la mise en œuvre de la méthode) (c.f travail préparatoire).

Calcul des valeurs

Annexe 5 : Calcul de la masse volumique du solide (dans le cas où le fil de suspension est un fil de diamètre 0.14 mm)

Annexe 6 : Calcul de la masse volumique du solide (dans le cas où le fil de suspension est un fil de diamètre 0.09 mm)

On trouvera sur la feuille de résultat une aide (avec les légendes appropriées) permettant au lecteur de retrouver les paramètres utilisés pour chacun des calculs

On détermine la valeur de la masse volumique du solide dans deux cas en différenciant les deux montages avec des fils de suspension différents. On constate une différence au niveau de l'écart type. La variation de l'écart type n'est pas due au seul fait du changement du fil de suspension. Les premiers résultats sont sujets à une dispersion des valeurs plus importante en raison du manque d'aisance des opérateurs vis à vis de la manipulation de la balance hydrostatique (balance mécanique). Un recoupement de l'ensemble des résultats nous permettra de conclure.(c.f conclusion)

2.3.Travaux complémentaires.

Détermination d'un intervalle de confiance sur la masse volumique du solide

On souhaite pouvoir assurer que 95% des résultats obtenus sont compris dans l'intervalle de confiance à déterminer. Nous utiliserons pour cela la loi de Student avec 9 degrés de libertés (soit 10-1)

Nous avons $S(9)(0.95)=2.2622$ et $S(9)(0.98)=2.8214$
On déduit $S(9)(0.975)=2.4282$

(d'après la table de distribution des valeurs de la loi de Student à 9 degrés de liberté)

Donc l'intervalle s'établit

$$\overline{r(20)} - S(9)(0.975) * S_{20} / \sqrt{n} < r < \overline{r(20)} + S(9)(0.975) * S_{20} / \sqrt{n}$$

Avec

$\overline{r(20)}$: Valeur moyenne de $\rho(T_{20})$

S_{20} : Ecart type à 20 °C

n : Nombre d'échantillons de la mesure

On obtient :

Pour un fil de 0.09 mm $\overline{r(20)} = 7911,42 \pm 2,4282 * 0,36 / \sqrt{10}$

$$7911,14 < \rho_{20} < 7911,70 \quad \text{kg.m}^{-3}$$

Pour un fil de 0.14 mm $\overline{r(20)} = 7911,12 \pm 2,4282 * 0,53 / \sqrt{10}$

$$7910,71 < \rho_{20} < 7911,53 \quad \text{kg.m}^{-3}$$

Détermination de l'incertitude $m(r\ 20)$

Pour chacun des deux cas évoqués, l'incertitude peut s'exprimer sous la forme

$$\text{Pour un fil de 0.09 mm} \quad m(r\ 20) = \pm 0,28 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\text{Pour un fil de 0.14 mm} \quad m(r\ 20) = \pm 0,41 \text{ kg.m}^{-3}$$

2.4. Conclusions

A la lecture des résultats de mesure, nous pouvons conclure que :

Entre la première mesure et la dernière mesure réalisées dans l'air et dans des conditions identiques, nous observons une dispersion (écart type) des résultats plus importante dans le premier cas. Cette différence vient probablement de l'opérateur qui au cours des mesures s'est formé à la réalisation de la mesure.

Toutefois, dans le cas du changement de fil, l'écart type a augmenté de façon significative et cette variation ne peut être attribuée totalement à l'opérateur. Il existe donc un effet du au fil. Le fil de 0,09mm donne de meilleurs résultats (écart type 3 à 4 fois inférieur).

Ceci peut s'expliquer par l'adhérence des gouttes d'eau sur le fil.

Pour les mesures dans l'air (1 et 3), à titre de contrôle, en appliquant les valeurs limites de l'écart type à $2s$ sur les moyennes calculées, on constate que les deux moyennes sont identiques. Ceci permet d'une part de valider nos mesures et d'autre part de garantir la reproductibilité de la mesure.

La méthode permet de réaliser des mesures de masse volumique avec une très grande précision. Cependant pour garantir cette précision, l'opérateur devra prendre soin de vérifier que le dispositif mécanique mobile (ou portique) ne frotte pas sur le châssis de la balance

Pour s'assurer de la qualité de la mesure, une opération préalable de mesure de masse étalon nous aurait permis de quantifier l'erreur systématique lié au défaut d'étalonnage de la balance. Car pour réaliser cette série de mesure, nous avons considéré la balance comme référence, cependant nous ne savons pas si elle rattachée au étalons de référence (BNM) au travers d'une chaîne d'étalonnage ininterrompue.