PGCD,PPCM, nombres premiers entre-eux:

I PGCD de deux nombres entiers :
Déf: On appelle PGCD de deux entiers, le plus grand diviseur commun à ces entiers.

Ex: 12 a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6 et 12;
8 a pour diviseurs 1, 2, 4 et 8;
Le PGCD de 8 et 12 est donc 4
Prop: Tous les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD.
Méthodes permettant de déterminer le PGCD de deux entiers:
1) Ce qui a été fait dans l'exemple précédent: on fait la liste des diviseurs des deux nombres.
2) L'algorithme d'Euclide.

Ex: Soit à chercher le PGCD de 210 et 385.

$385=210\times1+175$ On effectue la division euclidienne du plus grand entier par le second

$210=175\times1+35$ On effectue la div euclidienne du plus petit entier par le reste précédent

$175=35\times5+0$ On s'arrête lorsque le reste est nul. Le PGCD est le dernier reste non nul soit 35.

Cet algorithme repose sur la propriété suivante:
Si a=bq+r avec r<b (c'est-à-dire si b et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b) alors PGCD(a,b)=PGCD(b,r)
3) Décomposition des entiers.
$315=3^2\times5\times7$ et $147=3\times7^2$ donc PGCD(315;147)= $3\times7=21$
le PGCD est le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions.

II Nombres entiers entre-eux :
Déf: Deux nombres sont dits premiers entre-eux s'ils ont 1 pour PGCD.

Ex: 10 et 21 sont premiers entre eux.

Rq: Ne pas confondre “premiers entre eux” et “premiers”

Prop: $\frac{a}{PGCD(a;b)}$ et $\frac{b}{PGCD(a;b)}$ sont premiers entre-eux.
Application: Pour rendre une fraction irréductible, on la simplifie par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur.
Ex: $\frac{315}{147}=\frac{15}{7}$

III PPCM de deux nombres entiers :
Déf: On appelle PPCM de deux entiers, le plus petit multiple commun à ces entiers.
Prop: Tous les multiples communs à deux entiers sont les multiples de leur PPCM.
Méthodes permettant de déterminer le PPCM de deux entiers:
1) On fait la liste des multiples des deux nombres.
2) On utilise la propriété: $a\times b=PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)$

Ex12: Le PPCM de 315 et 147 est $\frac{315\times147}{21}=2205$

3) Décomposition des entiers.

$315=3^2\times5\times7$ et $147=3\times7^2$ donc PPCM(315;147)= $3^2\times5\times7^2=2205$

le PPCM est le produit des facteurs premiers affectés des plus grands coefficients.

IV Exercices :

Exo1: Déterminer le PGCD et le PPCM de 84 et 48

Exo2: Déterminer PGCD(300;540;72)

Exo3: Une armée à un nombre de soldats compris entre 450 et 500.

Si on range les soldats en rangées de 14, il en reste 5.

Si on range les soldats en rangées de 6, il en reste 5.

Combien de soldats composent cette armée?

Exo4: a) Trouver deux nombres entiers naturels dont la somme est 2285 et le PGDD est 457. Y-a-t-il plusieurs solutions?

b) Trouver deux nombres entiers naturels dont le produit est 960 et le PGDD est 8. Y-a-t-il plusieurs solutions?

Exo5: a) On veut remplir un cube (dont les arêtes mesurent un nombre entier de cm) en juxtaposant des parallélépipèdes (tous disposés de la même manière) dont les côtés ont pour longueur 24cm, 40cm et 60 cm Quelle est la valeur minimale pour la longueur de l'arête du cube?

b) On veut remplir un parallélépipède dont les arêtes ont pour longueur 24cm, 40cm et 60 cm avec des cubes dont les arêtes mesurent un nombre entier de cm. Quelle est la valeur maximale pour la longueur de l'arête du cube.

Exo6 (difficile) : Sur un vélodrome, deux cyclistes partent en même temps d'un point M et roulent à vitesse constante. Le coureur A boucle le tour de circuit en 35s, le coureur B en 42s. Au bout de combien de temps le coureur A aura-t-il un tour d'avance?