TEST N°4 – DURÉE : 60'

Corrigé

EXERCICE 1. [6 pts]

1. **Question de cours :** soit un caractère statistique dont la proportion est p dans une population. On prélève aléatoirement un échantillon de taille n dans cette population sur lequel on observe une fréquence f du caractère étudié.

   (a) Si $n \geqslant 30$ et si $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$, alors, au seuil de 0,95, l'intervalle de fluctuation de f est $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   Remarque – Si $n < 30$ ou si p ne se situe pas entre $0,2$ et $0,8$, alors la formule donnant l'intervalle ci-dessus n'est plus valable.

   (b) L'amplitude de cet intervalle de fluctuation est $\frac{2}{\sqrt{n}}$: une fois divisée par 2, cette amplitude devient $\frac{2}{2 \times \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{4n}}$. Ainsi, si l'on multiplie n par 4, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation est divisée par 2.

2. Le taux d'audience d'une chaîne de télévision, un soir à 20h, a été mesuré à partir de 1000 foyers : on a trouvé 31%.
   Un intervalle de confiance au seuil de 0,95 de l'audience de cette chaîne est :

$$\left[0,31 - \frac{1}{\sqrt{1000}} ; 0,31 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$$

   On peut prendre comme valeurs approchées des bornes de l'intervalle : 0,278 et 0,342.

3. Dans un forêt tropicale, 24% des serpents sont venimeux.

   (a) Lorsqu'on prélève un échantillon de 200 serpents, l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95, de la fréquence f de serpents venimeux dans cet échantillon est :

$$\left[0,24 - \frac{1}{\sqrt{200}} ; 0,24 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right]$$

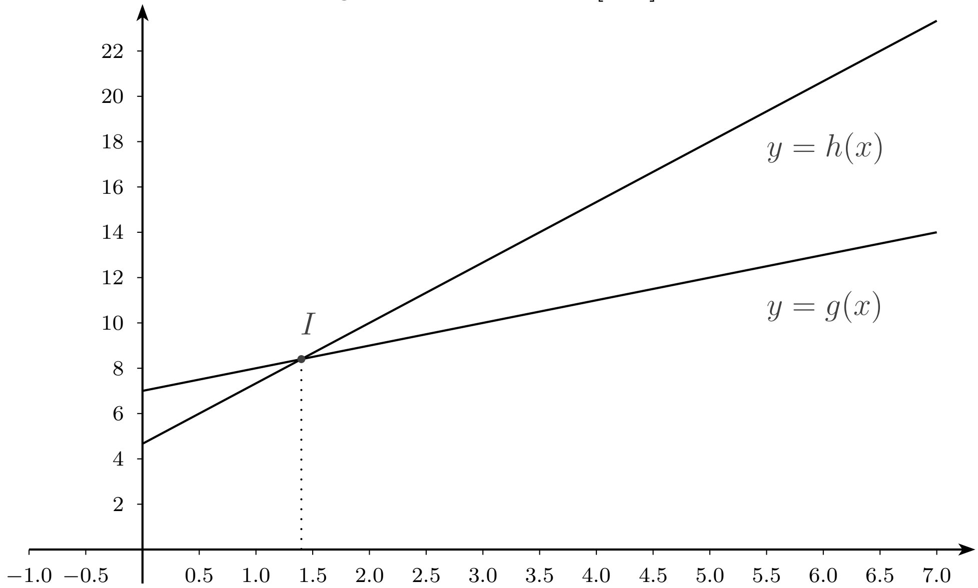
   (On peut appliquer cette formule puisque $200 > 30$ et que $0,2 \leqslant 0,24 \leqslant 0,8$. On peut prendre comme valeurs approchées des bornes de cet intervalle 0,169 et 0,311.

   (b) On constate sur un échantillon de 200 serpents la présence de 116 serpents venimeux, ce qui correspond à une fréquence de 0,58. $0,58 > 0,311$ donc on peut considérer que l'échantillon est anormalement dangereux.

EXERCICE 2. **[8 pts]**

On considère un triangle ABC tel que $AB = 5$. Sur le segment $[AB]$ on place le point D tel que $AD = 3$; sur le segment $[AC]$, on place le point E tel que $AE = 4$. Les droites (DE) et (BC) sont alors parallèles.
On note x la distance DE.
Soit f la fonction qui à x associe la longueur BC ; g la fonction qui à x associe le périmètre de AED et h la fonction qui à x associe le périmètre de $BDEC$.

1. (a) Dans le triangle ABC, $D \in [AB]$, $E \in [AC]$ et $(DE)//(BC)$.
D'après le théorème de Thalès,
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$
ce qui donne :
$$\frac{3}{5} = \frac{4}{AC} = \frac{x}{BC}$$
(b) On en déduit que $AC = \dfrac{20}{3}$ et $EC = AC - AE = \dfrac{8}{3}$.
2. (a) Il s'ensuit que : $f(x) = \dfrac{5x}{3}$, $g(x) = AE + ED + DA = 7 + x$.
$h(x) = BD + DE + EC + CB = 2 + x + \dfrac{8}{3} + \dfrac{5x}{3} = \dfrac{14 + 8x}{3}$.
(b) f est linéaires ; g et h sont affines et non linéaires.
3. (a) Représentation des courbes de g et h lorsque $x \in [0; 7]$:



(b) La valeur de x pour laquelle AED et $BDEC$ ont le même périmètre est l'abscisse du point I.
(c) On résout :
$$\frac{8}{3}x + \frac{14}{3} = 7 + x$$
ce qui équivaut successivement à :
$$8x + 14 = 21 + 3x$$
$$5x = 7$$
$$x = 1,4$$
Ainsi, la valeur de DE pour laquelle AED et $BDEC$ ont le même périmètre est 1,4.

Exercice 3. **[6 pts]**

Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. $\mathscr{P}$ est la représentation graphique de $f : x \mapsto x^2$.
2. On considère la courbe $\mathscr{P}_1$ d'équation $y = x^2 - 1$. Pour tout réel x, $x^2 - 1 = f(x) + (-1)$: on passe de $\mathscr{P}$ à $\mathscr{P}_1$ par la translation de vecteur $-\overrightarrow{j}$.
3. On considère la courbe $\mathscr{P}_2$ d'équation $y = 1 - x^2$. Pour tout réel x, $1 - x^2 = -(f(x) + (-1))$. On applique à $\mathscr{P}$ la translation de vecteur $-\overrightarrow{j}$ et on obtient $\mathscr{P}_1$; on applique à cette dernière courbe la symétrie d'axe (xx').
4. Soit Γ la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto x^2 - 2x$.
   Γ subit la symétrie d'axe (yy') et est tranformée en une courbe Γ'. Γ' est la représentation graphique de $h : x \mapsto g(-x) = x^2 + 2x$.