Introduction à l'arithmétique

L'arithmétique est l'étude des propriétés des nombres entiers.

1 Divisibilité

1.1 Division euclidienne

Définition : Soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.
Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est déterminer les entiers q et r tels que :

$$a = b \times q + r, \text{ avec } 0 \leqslant r < b$$

a est le **dividende** ;
b est le **diviseur** ;
q est le **quotient** ;
r est le **reste**.

Exercice 1. Effectuer la division de 28 par 5, puis de 28 par 4.

1.2 Multiples et diviseurs

Définition : On dit que l'entier b non nul **divise** l'entier a lorsque le quotient $\dfrac{a}{b}$ est un entier.

Remarque – Cela revient à dire que dans la division euclidienne de a par b, le reste est égal à ....
De plus, si l'entier non nul b divise l'entier a, appelons k l'entier $\dfrac{a}{b}$; il vient alors $a = k \times b$, ce qui se traduit par "a est **multiple** de b.
On retiendra donc les **expressions synonymes** :
– b divise a ;
– b est un diviseur de a ;
– a est un multiple de b ;
– a est divisible par b.

Exercice 2. Donner la liste des diviseurs positifs de 20.

Exercice 3. Donner la liste des multiples positifs de 17 inférieurs à 100.

Propriétés : Quels que soient les entiers a et a',
• 1 divise a et a divise lui-même ;
• Si l'entier b divise a et a', alors b divise la somme $a + a'$ et la différence $a - a'$.

Attention ! Il se peut tout à fait qu'un entier b divise une somme $a + a'$ sans que d ne divise a, ni que d divise a'.
Par exemple, 5 divise $10 = 7 + 3$ et pourtant 5 ne divise ni 3 ni 7.

Exercice 4. Soit n un entier naturel ; prouver que si l'entier naturel d divise à la fois $n + 2$ et $n - 6$, alors d divise 8.
En déduire les valeurs possibles de d.

1.3 Nombres premiers

Définition : Un entier naturel n est **premier** lorsqu'il possède *exactement* deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Remarque – Ainsi, 1 n'est pas premier puisqu'il ne possède qu'un seul diviseur positif : lui-même.
2, 3, 5 sont des nombres premiers : on démontre, mais nous admettrons, qu'il en existe une infinité.

2 Plus grand commun diviseur (PGCD)

2.1 Étude d'un exemple

Exercice 5. Déterminer la liste des nombre positifs qui divisent à la fois 28 et 20.
Quel est le plus grand d'entre eux ?

Définition : Soient a et b deux entiers naturels non nuls : la liste des diviseurs **communs** à a et b possède un plus grand élément qui est appelé **plus grand diviseur commun** à a et b, et qui se note PGCD(a,b).

Exercice 6. Que vaut le PGCD de 28 et 20 ?

2.2 Quelques propriétés du PGCD

Propriétés : Soient a et b deux entiers naturels non nuls, tels que $a > b$.
- PGCD $(a,a) = \dots\dots\dots$ et PGCD$(1,a) = \dots\dots\dots$
- PGCD (a,b) = PGCD $(a,\, a-b)$

Exercice 7. Prouver que PGCD(125,75) = PGCD(75, 50) = PGCD (25, 50) = PGCD(25,25) = 25.

2.3 Algorithme d'Euclide

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels non nuls, tels que $a > b$, et r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors, PGCD(a,b) = PGCD(b,r)

Exercice 8. Supposons que a soit un multiple de l'entier naturel non nul b. Que vaut le PGCD de a et b ?

Exercice 9. Application - **Algorithme d'Euclide**.
On souhaite calculer le PGCD de 108 et 64.

1. Effectuer la division euclidienne de 108 par 64 : donner le reste r_1.
2. Effectuer la division euclidienne de 64 par r_1 : donner le reste r_2.
3. Effectuer la division euclidienne de r_1 par r_2 : donner le reste r_3.
4. Effectuer la division euclidienne de r_2 par r_3 : donner le reste r_4.
   Peut-on diviser r_3 par r_4 ?
5. Que vaut le PGCD de r_2 et r_3 ? Que vaut le PGCD de 108 et 64 ?

Méthode : La suite des divisions euclidiennes ci-dessus porte le nom d'**algorithme d'Euclide**. Le dernier reste non nul obtenu est le PGCD des entiers de départ.

2.4 Nombres "premiers entre eux"

Définition : Deux entiers a et b sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD vaut 1

Remarque – Deux entiers sont premiers entre eux si et seulement si leur seul diviseur positif commun est 1.
Ne pas confondre : " n est un entier premier" et "a et b sont deux entiers premiers entre eux".

Exercice 10. Soit n un entier naturel. Montrer que n et $n+1$ sont premiers entre eux.

Application – Fraction irréductible
Soient a et b deux entiers, $b \neq 0$: la fraction $\dfrac{a}{b}$ est dite **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.
Pour rendre une fraction irréductible, il suffit de diviser numérateur et dénominateur par leur PGCD : on obtient ainsi une fraction qui ne peut plus être simplifiée.

Exercice 11. Simplifier au maximum la fraction $\dfrac{630}{1008}$.