On veut ranger des objets de taille d_1, d_2, etc., dans des boîtes de taille t, en utilisant le minimum de boîtes.

Notations

Un remplissage $r = ((1, 24, 3), (10, 11, 3), (30), (5, 5, 7, 6))$ utilise 4 boîtes. La première boîte contient 3 objets de taille 1, 24 et 3. La deuxième boîte contient 3 objets de taille 10, 11 et 3. Etc.. On notera $|r|$ le nombre de boîtes utilisées, r_i le contenu de la boîte i, $r_{i,j}$ la taille du $j$ième objet de la $i$ème boîte, $|r_i|$ le nombre d'objets contenus dans la boîte i et $w(r_i)$ la somme des tailles des objets mis dans la $i$ème boîte. Par exemple $|r| = 4$, $r_2 = (10, 11, 3)$, $r_{2,1} = 10$, $|r_2| = 3$ et $w(r_2) = 10 + 11 + 3 = 24$. En général on a $w(r_i) = \sum_{j=1}^{|r_i|} r_{i,j}$. On notera aussi $w(r)$ la somme des tailles de tous les objets rangés. Par exemple $w(r) = w(r_1) + w(r_2) + w(r_3) + w(r_4) = 28 + 24 + 30 + 23 = 105$.

Stratégie 1 : "next fit"

On n'a qu'une boîte ouverte à un moment donné. On prend les objets un par un dans l'ordre. Si l'objet qu'on a pris tient dans la boîte ouverte, on le met dedans. Sinon on ferme la boîte définitivement, on ouvre une nouvelle boîte vide et on met l'objet dedans. Puis on passe à l'objet suivant. Par exemple $t = 20$ et $d = (10, 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1)$ donnent le remplissage $r = ((10, 1), (10, 1), (10, 1), (10, 1), (10, 1))$ qui utilise $|r| = 5$ boîtes alors que le remplissage optimal $\tilde{r} = ((10, 10), (10, 10), (10, 1, 1, 1, 1, 1))$ en utilise $|\tilde{r}| = 3$.

Stratégie 2 : "next fit decreasing"

On applique la stratégie 1 après avoir trié les objets dans l'ordre des tailles décroissantes. Par exemple, pour $t = 21$ et
$d = (10, 1, 11, 1, 10, 1, 11, 1, 10, 1, 11, 10, 1, 11, 1, 10, 1, 11, 1, 10, 1, 11, 1)$ la solution
$\tilde{r} = ((11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$ est optimale, alors que la stratégie 1 donne $r =$
$((10, 1), (11, 1), (10, 1), (11, 1), (10, 1), (11, 1), (10, 1), (11, 1), (10, 1), (11, 1), (10, 1), (11, 1))$
et que la stratégie 2 donne
$\vec{r} = ((11), (11), (11), (11), (11), (11), (10, 10), (10, 10), (10, 10, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$

Stratégie 3 : "first fit"

On a une série de boîtes ouvertes, initialement toutes vides. On prend les objets un par un dans l'ordre où on nous les a donnés. Après avoir pris un objet on le met dans la boîte 1 s'il reste assez de place dedans, sinon on le met dans la boîte 2 s'il reste assez de place, sinon on essaye de le mettre dans la boîte 3, etc.. On le met donc dans la boîte de plus petit numéro dans laquelle il reste suffisamment de place. Puis on passe à l'objet suivant.

Stratégie 4 : "first fit decreasing"

On applique la stratégie 3 après avoir trié les objets dans l'ordre des tailles décroissantes. Par exemple, pour $t = 21$ et
$d = (10, 1, 11, 1, 10, 1, 11, 1, 10, 1, 11, 10, 1, 11, 1, 10, 1, 11, 1, 10, 1, 11, 1)$ la stratégie 3 donne
$r' = ((10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 1))$ alors que la stratégie 4 donne
$\vec{r}' = ((11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (11, 10), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$. Ce sont deux solutions optimales.

Question 1 : Chercher une solution optimale $\tilde{r}$ ainsi que les solutions r, $\vec{r}$, r' et $\vec{r}'$ données par les quatre stratégies précédentes, pour chacun des jeux de données suivants :
$t = 31$, $d = (11, 11, 10, 10, 10, 10)$ $t = 89$, $d = (10 \times 2, 10 \times 12, 10 \times 30, 10 \times 45)$
$t = 31$, $d = (1, 10, 10, 11, 1, 10, 10, 11, 1, 10, 10, 11, 1, 10, 10, 11, 1, 10, 10, 11, 1, 10, 10, 11)$
$t = 31$, $d = (10, 10, 11, 10, 10, 11, 10, 10, 11, 10, 10, 11, 10, 10, 11, 10, 10, 11)$ $t = 44$,
d=(23,12, 9, 23, 12, 9, 23, 12, 9, 23, 12, 9, 23, 12, 9, 23, 12, 9, 13, 13, 9, 9, 13, 13, 9, 9, 13, 13, 9, 9)
$t = 41/42$, $d = (\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$t = 20$, $d = (1, 20, 2, 19, 3, 18, 4, 17, 5, 16, 6, 15, 7, 14, 8, 13, 9, 12, 10, 11)$

Question 2 : Soit r la solution donnée par la stratégie 1 à partir d'un jeu de données (t, d). Montrer que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, |r| - 1\},\ w(r_i) + w(r_{i+1}) > t$
En déduire que $|r| = 1 \iff |\tilde{r}| = 1$ et $|r| = 2 \implies |\tilde{r}| = 2$
et plus généralement que $|\tilde{r}|t \geq w(r) > \left\lfloor \frac{|r|}{2} \right\rfloor t$ et donc que $|\tilde{r}| \leq |r| < 2|\tilde{r}|$.

La stratégie 1 donne donc des solutions 2-approchées.

Question 3 : montrer que les résultats de la question précédentes s'appliquent aussi aux stratégies 2, 3 et 4.

Question 4 : En généralisant le dernier exemple de la question 1, montrer que la stratégie 1 n'est pas 1+ϵ-approchée si $\epsilon < 1$.

Question 5 : En regardant le premier exemple de la question 1, montrer que les stratégies 2, 3 et 4 ne sont pas 1+ϵ-approchées si $\epsilon < 1/2$.

Question 6 : En regardant l'avant dernier (resp. le deuxième) exemple de la question 1, montrer que les stratégies 2 et 3 ne sont pas 1+ϵ-approchées si $\epsilon < 2/3$ (resp. si $\epsilon < 7/10$).

Question 7 : Montrer par récurrence sur la longueur de d que

$$|r| \geq |r'| \wedge \left(|r| = |r'| \implies w(r_{|r|}) \geq w(r'_{|r'|})\right)$$

Autrement dit, on n'utilise pas plus de boîtes dans la stratégie 3 que dans la stratégie 1, et si on utilise le même nombre de boîtes, alors la dernière n'est pas plus remplie.

Question 8 : Montrer que $|\vec{r}| \geq |\vec{r}'|$.

Question 9 : Donner un exemple pour lequel $|\vec{r}'| > |r|$.

Question 10 : Montrer que la stratégie 4 est optimale si tous les objets à empaqueter ont une taille supérieure à $t/3$.

Montrer que $|\vec{r}'| = |\tilde{r}|$ si $\vec{r}'_{|\vec{r}'|,1} > t/3$.

En déduire que la stratégie 4 est 3/2-approchée.

Question 11 : En généralisant l'exemple où $t = 44$, montrer que la stratégie 4 n'est pas asymptotiquement 1+ϵ-approchée pour ϵ<2/9, c'est-à-dire que $\limsup_{|r|\to\infty} |\vec{r}'|/|\tilde{r}| \geq 11/9$.

Question 12 : Soit $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i} \approx 1.691030$ avec $u_1 = 1$ et $u_{i+1} = u_i(u_i + 1)$. En généralisant l'avant dernier exemple de la question 1, avec $t = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{u_i+1}$ montrer que les stratégies 2 et 3 ne sont pas asymptotiquement β-approchées si $\beta < \alpha$.

Question 13 : Montrer qu'il y a une bijection entre les façons de satisfaire la clause $(a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee d) \wedge (b \vee c \vee \bar{d}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d})$ et les façons de remplir deux boîtes de même capacité avec les objets $d = (B + B^4 + C, B^2 + C, B + B^3 + C^2, B^2 + B^4 + C^2, B^3 + C^3, B + B^4 + C^3, B^2 + C^4, B^3 + B^4 + C^4, B + B^2 + B^3 + B^4, B, B, B^2, B^2, B^3, B^3, B^4, B^4, B^4)$

Montrer que le problème reste NPcomplet si on se limite aux cas où $w(d) = 2t$. En déduire qu'on ne connaît pas d'heuristique polynomiale ϵ-approchée pour $\epsilon < 1/2$.

On veut démontrer que le rapport asymptotique pour “first fit” est 17/10.

Soit $p(x) = \begin{cases} 6x/5 & \text{si } x \in [0, t/6] \\ 9x/5 - t/10 & \text{si } x \in [t/6, t/3] \\ 6x/5 + t/10 & \text{si } x \in [t/3, t/2] \\ 6x/5 + 2t/5 & \text{si } x \in]t/2, t] \end{cases}$ le poids d'un objet de taille x.

Question 14 **:** Montrer que $p(\tilde{r}_i) \leq p(\frac{t}{2}+)+p(\frac{t}{2}) = p(\frac{t}{2}+)+p(\frac{t}{3})+p(\frac{t}{6}) = t+\frac{t}{2}+\frac{t}{5} = \frac{17}{10}t$.

Question 15 **:** Montrer que le poids total des objets vérifie $p(r) \leq 17t|\tilde{r}|/10$.

Question 16 **:** Montrer que le poids de toute boîte pleine contenant un plus petit objet de taille $x \in]0, t/2[$ est supérieur à $t + p(x)$.

Si $t = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $0 < x = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ et $n \geq 2$. Soit $P = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$.

$p(x_i) \geq 6x_i/5$ donc $P \geq 6t/5$.

Si $x \leq t/6$ alors $P - t \geq t/5 = p(t/6) \geq p(x)$.

Si $x_n > t/2$ alors $P \geq p(x) + p(x_n) > p(x) + t$.

Il reste le cas $t/6 < x \leq x_n \leq t/2$ et $n \geq 3$.

Si $x_n \leq t/3$ alors $P = 9t/5 - nt/10$ et $p(x) \leq p(t/n) = 9t/5n - t/10$ donc $P - t - p(x) \geq 9t/10 - nt/10 - 9t/5n = (9 - n - 18/n)t/10 \geq 0$ car n vaut 3, 4 ou 5.

Si $t/3 < x_n \leq t/2$ alors $n \geq 3$ et $x \leq t/3$ et $P - p(x) \geq p(x) + p(t-2x) = 9x/5 + 6(t-2x)/5 = t + (t-3x)/5 > t$

Question 17 **:** Soit $g_i = p(t - w(r'_i))$. Montrer que $p(r'_i) + g_i \geq t + \min(g_i, g_{i-1})$.

Question 18 **:** Montrer que $p(r'_i) + g_i \geq 6t/5$. On l'utilisera pour $i = 1$.

Question 19 **:** Montrer que $p(r'_i) \geq g_{i-1}$. On l'utilisera pour $i = |r'|$.

Question 20 **:** On veut minorer $p(r') - t|r'|$. Montrer que, quitte à supprimer toute boîte pesant au moins t, ce qui n'augmente pas $p(r') - t|r'|$, on peut supposer que $\forall i,\ p(r'_i) < t$.

Montrer que $g_{i-1} < g_i$ et $p(r'_i) + g_i \geq t + g_{i-1}$. On l'utilisera pour $1 < i < |r'|$.

Question 21 **:** S'il reste au moins 2 boîtes la somme des inégalités précédentes (à utiliser) donne $p(r') > |\vec{r}'|t - 4t/5$. (S'il n'en reste qu'une, on reprend une des boîtes éliminées.)

Question 22 **:** Montrer que $|r'| < 17|\tilde{r}|/10 + 4/5$ et donc que $|r'| \leq 1.7|\tilde{r}| + 0.7$.

Question 23 **:** Montrer que $|r'| = 1.7|\tilde{r}| + 0.7$ quand $t = 600009$ et $r' = (2\times(110000, 4\times98002),\ 8\times(101000, 4\times99802),\ 32\times(100100, 4\times99982),\ 2\times(220002, 180004),\ 8\times(202002, 198004),\ 32\times(200202, 199804),\ 64\times(2\times200022),\ 210\times(300005))$.

Question 24 **:** On veut démontrer que le rapport asymptotique pour “next fit decreasing” est α. Soit $p(x) = t/\lfloor t/x \rfloor$ le poids d'un objet de taille x. Montrer que $p(\frac{t}{n}) = \frac{t}{n}$ mais $p(\frac{t}{n}+) = \frac{t}{n-1}$. Soit $P(x)$ le sup des poids des remplissages d'une boîte de taille $x \in [0, t]$.

Question 25 **:** Montrer que $P(\frac{t}{n}) > p(\frac{t}{n+1}+) + p(\frac{t}{n^2+n+1}+) = \frac{t}{n} + \frac{t}{n^2+n} = \frac{t}{n}\frac{n+2}{n+1}$.

Question 26 **:** Montrer que $P(\frac{t}{n}) = p(\frac{t}{n+1}+) + P(\frac{t}{n^2+n}) = \frac{t}{n} + P(\frac{t}{n^2+n})$ et $P(t) = \alpha t$.

Question 27 **:** Montrer que le poids total des objets vérifie $p(r) \leq P(t)|\tilde{r}| = \alpha t|\tilde{r}|$.

Question 28 **:** Montrer que si $i < |\vec{r}|$ alors $p(\vec{r}_i) \geq w(\vec{r}_i) > t - \vec{r}_{i+1,1} \geq t - p(\vec{r}_{i+1,1})$ mais que si de plus $p(\vec{r}_{i,1}) = p(\vec{r}_{i+1,1})$ alors $p(\vec{r}_i) = t$.

Question 29 **:** Montrer que $\sum_{i=2}^{|\vec{r}|}(t - t/i) < p(r)$.

Question 30 **:** Montrer que le rapport asymptotique de cette méthode est au plus α.

Question 31 : Pour démontrer que $|\vec{r'}| \leq 11|\tilde{r}|/9 + C$, il suffit de le démontrer dans le cas où la dernière boîte ne contient qu'un seul objet qui est le plus petit de tous.

En effet si les objets sont ordonnés par taille décroissante, quand on tronque cette liste juste après le premier objet mis dans la dernière boîte, cela ne change pas $|\vec{r'}|$ mais cela peut diminuer $|\tilde{r}|$. Donc la quantité $9|\vec{r'}|-11|\tilde{r}|$ ne peut qu'augmenter. Si on démontre qu'après cela elle est inférieure à $9C$, c'est qu'elle l'était déjà avant.

On supposera donc désormais que le dernier objet mis, ouvre la dernière boîte. Soit $m = \vec{r'}_{|\vec{r'}|,1}$ la taille de l'unique objet de la dernière boîte, qui est aussi le plus petit objet. On a vu que si $m > t/3$ alors $|\vec{r'}| = |\tilde{r}|$.

On supposera aussi que $w(r) > t$: Il faut plusieurs boîtes.

Question 32 : $t|\tilde{r}| \geq w(r) > m + (t-m)(|\vec{r'}| - 1)$. Donc $|\vec{r'}| < \frac{t|\tilde{r}|+t-2m}{t-m}$. Si $m \leq t/6$ alors $|\vec{r'}| < \frac{6|\tilde{r}|+4}{5}$. Si $m \leq t/5$ alors $|\vec{r'}| < \frac{5|\tilde{r}|+3}{4}$. Si $m \leq t/4$ alors $|\vec{r'}| < \frac{4|\tilde{r}|+2}{3}$.

Question 33 : Montrer que si une boîte de $\tilde{r}$ ne contient qu'un seul objet, alors en supprimant la boîte de $\vec{r'}$ qui le contient, ainsi que tous les objets qu'elle contient, on diminue $|\vec{r'}|$ d'un et $|\tilde{r}|$ d'au moins un. Donc $9|\vec{r'}|-11|\tilde{r}|$ augmente. On peut donc supposer qu'aucune boîte de $\tilde{r}$ ne contient un seul objet.

Question 34 : Montrer que si $\tilde{r}_i = (a, b)$, alors une boîte de $\vec{r'}$ contient a et $B \geq b$ (ou b et $A \geq a$). Donc quitte à échanger b et B (ou a et A) dans $\tilde{r}$, on peut supposer que la boîte $\tilde{r}_i$ est une partie d'une boite $\vec{r'}_j$. En supprimant cette boîte, on diminue $|\vec{r'}|$ d'un et $|\tilde{r}|$ d'au moins un, ce qui augmente $9|\vec{r'}|-11|\tilde{r}|$. On peut donc supposer qu'aucune boîte de $\tilde{r}$ ne contient exactement deux objets.

On peut noter, que si une suite de tansformations comme dans cette question ou les trois précédentes, élimine tous les objets, c'est qu'initialement on avait $|\vec{r'}| = |\tilde{r}|$. Cela montre donc que si $m > t/3$ alors $\vec{r'}$ est optimal car aucune boîte ne contient jamais plus de deux objets.

On supposera donc dans ce qui suit que toute boîte de $\tilde{r}$ contient au moins 3 objets.

Question 35 : On supposera dans cette question que $m \in]t/4, t/3]$. Donc aucune boîte ne contient plus de trois objets. Et toute boîte de $\tilde{r}$ contient exactement trois objets.

Un objet est dit "petit" ou "gros" selon que sa taille est dans $[m, (t-m)/2]$ ou $](t-m)/2, t-2m]$. Soient a et b les nombres de gros et de petits objets.

Montrer que $a + b = 3|\tilde{r}|$ et $a \leq |\tilde{r}|$.

Soit n_i le nombre de boîtes de $\vec{r'}$ contenant exactement i objets. Montrer que $n_1 = 1$, $\lfloor a/2 \rfloor \leq n_2 \leq \lceil a/2 \rceil$, $n_2 \leq (|\tilde{r}| + 1)/2$. $|\vec{r'}| = 1 + n_2 + n_3 = |\tilde{r}| + (n_2 + 2)/3 \leq 7|\tilde{r}|/6 + 5/6$.

Question 36 : On supposera dans cette question et les suivantes que $m \in]t/6, t/4]$. Soit N le nombre d'objets de tailles $> t/2$. Ce sont les objets $\vec{r'}_{i,1}$ pour $i \leq N$. Quitte à renuméroter les boîtes et les objets de $\tilde{r}$, on peut supposer aussi que $\vec{r'}_{i,1} = \tilde{r}_{i,1}$ pour tout $i = 1 \leq N$. Montrer que $|\tilde{r}_i| = 3$ et $|\vec{r'}_i| \in \{2, 3\}$ si $i \leq N$.

Question 37 : On suppose dans cet question qu'il existe $i \leq N$ tel que $|\vec{r'}_i|=2$ et $\vec{r'}_{i,2} \leq 2m$. Soit I la plus grand valeur possible de i. Posons $M = \vec{r'}_{I,2}$. Montrer que quitte à réduire la taille des objets des $I-1$ premières boîtes, on peut supposer que les I premières boîtes ont le même contenu, car cette modification ne change pas la répartition des objets dans $\vec{r'}$ et elle n'augmente pas $|\tilde{r}|$. Donc $9|\vec{r'}|-11|\tilde{r}|$ ne diminue pas.

Montrer que $\left|\vec{r'}_j\right| = 2$ et $\vec{r'}_{j,1} > t/2$ et $\vec{r'}_{j,2} \leq 2m$ entrainent que $j \leq I$ et $\vec{r}_{j,2} = M$.

Montrer que le poids d'aucun objet n'est dans $]M, 2m]$.

Question 38 **:** On supposera dans cette question et les suivantes que $m \in]t/5, t/4]$. On définit le poids $p(x)$ d'un objet de taille $x \leq t/2$, comme la fraction de boîte utilisée en général par un objet de cette taille, quand plusieurs objets consécutifs de cette taille sont mis dans une nouvelle boîte de $\vec{r'}$. Donc $p(x) = 1/n$ si $x \in](t-m)/n, t/n]$ et $p(x) = (1-p(m))/n$ si $x \in]t/(n+1), (t-m)/n]$. Pour éviter les fractions 1/4 et 1/3 on multipliera ces nombres par 12, qui est donc le poids minimal d'une boîte ordinaire de $\vec{r'}$. Montrer que $p(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in [m, (t-m)/3] \\ 4 & \text{si } x \in](t-m)/3, t/3] \\ 4.5 & \text{si } x \in]t/3, (t-m)/2] \\ 6 & \text{si } x \in](t-m)/2, t/2] \end{cases}$ Enfin pour tout $i \leq N$ on ajuste le poids de $\vec{r'}_{i,1}$ de telle sorte que la somme des poids des objets de la boîte soit 12.

Question 39 **:** Montrer que $p(2m) = 6$.

Question 40 **:** Montrer que $p(\vec{r'_i}) \geq 12$ pour presque toutes les boîtes.

Toutes les boîtes avec un plus gros objet de poids $9/n$ sont consécutives et contiennent toutes, sauf peut-être la dernière, n objets de poids $9/n$ plus au moins un autre objet, donc le poids de ces boîtes est au moins $n(9/n) + 3 = 12$.

Toutes les boîtes avec un premier objet de poids $12/n$ sont consécutives et contiennent toutes, sauf peut-être la dernière, exactement n objets de poids $12/n$, donc elles pèsent 12.

Une boîte avec un objet de taille supérieure à $t/2$ pèse toujours exactement 12.

Question 41 **:** Montrer que $p(\tilde{r}_i) \leq 14.5$ pour tout $i > N$, car les boîtes bien remplies ont pour poids : 4+4+4, 4+4+3+3, 4.5+4.5+4, 4.5+3+3+3, 6+6 et 6+4.5+4.

Question 42 **:** Montrer qu'une boîte de taille $t/2$ avec deux objets pèse 3+3 ou 3+4.

Question 43 **:** Montrer que si $i \leq N$ et $|\vec{r'_i}| = 3$ alors $|p(\tilde{r}_i) - p(\vec{r'_i})| \leq 1$ et $p(\tilde{r}_i) \leq 13$.

Question 44 **:** Montrer que si $i \leq N$ et $|\vec{r'_i}| = 2$ alors $\vec{r'}_{i,2} > \tilde{r}_{i,2} \geq \tilde{r}_{i,3}$ donc $p(\vec{r'}_{i,2}) \geq p(\tilde{r}_{i,2}) \geq p(\tilde{r}_{i,3}) = 3$ donc $p(\tilde{r}_i) - p(\vec{r'_i}) \leq 3$ et $p(\tilde{r}_i) \leq 15$. Mais $p(\tilde{r}_i) = 15$ seulement si $p(\vec{r'}_{i,2}) = p(\tilde{r}_{i,2}) \in \{3, 4\}$.

On va maintenant "ajuster" le poids de certains objets. Si la boîte $\tilde{r}_i$ pèse 15, alors dans la boîte $\vec{r'_i}$ on alourdit le petit objet d'1/3, ce qui allège d'autant le gros. A priori $p(\tilde{r}_i)$ passe à 44/3. Mais les objets alourdis augmentent le poids de certaines boîtes de $\tilde{r}$. Il faut vérifier qu'il ne dépasse pas 44/3 :

Question 45 **:** Montrer qu'un objet de taille x qui s'alourdit, pèse 3 ou 4 et donc $x \leq 2m$. Donc $x = M$ et le poids d'aucun objet n'est dans $]p(M) + 1/3, 6[$.

Question 46 **:** Montrer qu'une boîte de $\tilde{r}$ de poids 15 avant ajustement, voit son poids passer à $15-1/3$, car elle ne contient pas d'objet de taille M.

Question 47 **:** Montrer qu'aucune boîte de $\tilde{r}$ n'a un poids ajusté qui dépasse 44/3 : Une boîte de $\tilde{r}$ dont le poids augmente contient au moins un objet de taille M qui s'alourdit. Il n'existe donc pas d'objet de poids 4.5. Son poids initial était au plus 14. Son poids ajusté ne dépassera 14+2/3 que si elle contient au moins trois M. Mais alors son poids aurait été au plus 3+3+3+3 ou 4+4+4. Après augmentation il ne dépassera pas 12+4/3.

Question 48 **:** Montrer que le rapport asymptotique est au plus 11/9, quand $m > t/5$.

Question 49 **:** Dans l'exemple de la question 1, avec t=44, le poids ajusté de tout objet est le tiers de sa taille. On a $|\vec{r'}| = 11|\tilde{r}|/9$. Montrer qu'en appliquant à cet exemple la règle de la question 31 (dernière boîte de $\vec{r}$) puis trois fois la règle de la question 34 (boîte de $\tilde{r}$ à 2 objets) on peut obtenir un exemple vérifiant $|\vec{r'}| = 11|\tilde{r}|/9 + 2/3$.

Question 50 **:** On supposera dans cette question et les suivantes que $m \in]t/6, t/5]$. On prend maintenant 60 comme poids minimal d'une boîte ordinaire de $\vec{r'}$ et on définit le poids d'un objet de taille $x \leq t/2$ comme $p(x) = (60 - p(m))/n$ si $x \in]t/(n+1), (t-m)/n]$ et $p(x) = 60/n$ si $x \in](t-m)/n, t/n]$. Le poids d'un plus gros objet est défini de telle sorte que $p(\vec{r_i}) = 60$ pour tout $i \leq N$. Montrer que $p(x) = \begin{cases} 12 \text{ si } x \in [m, (t-m)/4] \\ 15 \text{ si } x \in](t-m)/4, t/4] \\ 16 \text{ si } x \in]t/4, (t-m)/3] \\ 20 \text{ si } x \in](t-m)/3, t/3] \\ 24 \text{ si } x \in]t/3, (t-m)/2] \\ 30 \text{ si } x \in](t-m)/2, t/2] \end{cases}$

Question 51 **:** Montrer que $p(2m) = 24$.

Question 52 **:** Montrer que $p(\vec{r'_i}) \geq 60$ pour presque toutes les boîtes.

Question 53 **:** Montrer qu'une boîte ne contenant que des objets de taille $\leq t/2$ pèse au plus 71, car une boîte bien remplie pèse 70=30+24+16=30+20+20=24+16+15+15, 71=24+20+15+12=20+20+16+15=20+15+12+12+12, 68=24+24+20, 60=30+30 ou 69=30+15+12+12=15+15+15+12+12.

Question 54 **:** Montrer qu'une boîte de capacité $t/2$ contenant deux objets pèse 12+12, 12+15, 12+16, 12+20, 15+15, 15+16 ou 15+20.

Question 55 **:** Montrer que si $i \leq N$ et $|\vec{r'_i}| = 3$ alors $|p(\tilde{r}_i) - p(\vec{r'_i})| \leq 11$ et $p(\tilde{r}_i) \leq 71$.

Question 56 **:** Montrer que si $i \leq N$ et $|\vec{r'_i}| = 2$ alors $\vec{r'}_{i,2} > \tilde{r}_{i,2} \geq \tilde{r}_{i,3}$ et donc $p(\tilde{r}_i) - p(\vec{r'_i}) \leq p(\tilde{r}_{i,3}) \leq p(t/4) = 15$ et $p(\tilde{r}_i) \leq 75$.

Question 57 **:** Si la boîte $\tilde{r}_i$ pèse 74 ou 75, alors on ajuste le poids des 2 objets de la boîte $\vec{r'_i}$ en alourdissant de 5/3 le petit, ce qui allége d'autant le gros. Cela ne change pas le poids des boîtes de $\vec{r'}$. Montrer que si $p(\vec{r'}_{i,1})$ diminue alors $p(\tilde{r}_{i,2}) + p(\tilde{r}_{i,3}) - p(\vec{r}_{i,2})$ vaut nécessairement 20+15−20, 16+15−16, 15+15−15 ou 15+15−16, et que les objets dont le poids augmente, sont tous de taille M et de même poids 15, 16 ou 20.

Question 58 **:** Soit $|\tilde{r}_i|_j$ le nombre d'objets de poids j dans la boîte $\tilde{r}_i$. Montrer qu'on a toujours $p(\tilde{r}_i) + \max(|\tilde{r}_i|_{15}, |\tilde{r}_i|_{16}, |\tilde{r}_i|_{20})5/3 \leq 73 + 1/3$ sauf pour les boîtes de type 15+15+15+12+12, 20+20+16+15 et 24+15+15+15.

Question 59 **:** Montrer que pour $i \leq N$ après ajustement $p(\tilde{r}_i)$ ne dépassera pas 73+1/3. (Si $|\vec{r'_i}| = 2$ alors 75-5/3 sinon 60+(20-12)+(15-12)+5/3 ou 60+2(15-12+5/3))

Question 60 **:** Si $p(\tilde{r}_i) - p(\vec{r'_i}) = 15$ et $p(M) = 15$ avec $i \leq N$ alors $p(\tilde{r}_i) - p(\vec{r'_i}) = p(\tilde{r}_{i,2}) + p(\tilde{r}_{i,3}) - p(M) = 15 + 15 - 15$ et $M > \tilde{r}_{i,2} + \tilde{r}_{i,3} - m > 2(t-m)/4 - m = (t-3m)/2$.

Une boîte de poids 15+15+15+12+12 ne peut contenir 3 objets de taille M, car $3M + 2m > 3(t-3m)/2 + 2m = t + (t-5m)/2 > t$.

De même, une boîte de poids 15+15+15+24 ne peut contenir 3 objets de taille M, car aucun objet n'a de taille dans $]M, 2m]$ et $3M + 2m > t$.

Question 61 **:** Si $p(\tilde{r}_i) - p(\vec{r'_i}) = 15$ et $p(M) = 20$ avec $i \leq N$ alors $p(\tilde{r}_i) - p(\vec{r'_i}) = p(\tilde{r}_{i,2}) + p(\tilde{r}_{i,3}) - p(M) = 20 + 15 - 20$ et $M > \tilde{r}_{i,2} + \tilde{r}_{i,3} - m > (t-m)/3 + (t-m)/4 - m = (7t - 19m)/12$.

Une boîte de poids 20+20+16+15 ne peut contenir 2 objets de taille M, car $2M + t/4 + (t-m)/4 > (7t - 19m)/6 + (2t - m)/4 = t + (8t - 39m)/12 > t$.

Question 62 **:** Montrer que toute boîte de $\tilde{r}$ a un poids ajusté ne dépassant pas 73+1/3.

Question 63 **:** Montrer que le rapport asymptotique est au plus 11/9, quand $m > t/6$.

Dans les démonstrations précédentes, on peut prendre pour C le nombre maximal de boîtes de $\vec{r}'$ de poids inférieur à $p(t)$, ou le nombre de poids différents pour les petits objets : $C = \#\{12, 15, 16, 20, 24, 30\} = 6$. Mais en affinant beaucoup ces démonstrations on arriverait à la majoration optimale avec $C = 2/3$:
$|\vec{r}'| \leq 11|\tilde{r}|/9 + 2/3$.

Par exemple, on peut facilement obtenir $C < 1$ quand $|\tilde{r}|$ est grand et $m \in]t/4, t/5]$. Dans ce cas, pour approcher la borne, il faut que la plupart des boîtes de $\tilde{r}$ pèsent $44/3 = 2(4+1/3)+3+3 = (8-1/3)+4+3$. Comme certains objets de poids 4 ont augmenté leur poids, il n'y a aucun objet de poids 4.5. De plus, une boîte de poids 2(4+1/3)+3+3 nous donne $2M + 2m \leq t$ ou $M + m \leq t/2$. Donc la taille d'un objet de poids 4+1/3 ou moins, ne dépasse pas $t/2 - m$. Et donc une boîte de poids 6+4 peut encore contenir un objet de taille m. Donc une boîte contenant un seul objet de poids 6, contient toujours deux autres objets, et pèse au moins 12. Il y a donc au plus 2 boîtes de $\vec{r}'$ de poids inférieur à 12 : la dernière qui est de poids 3, dans laquelle il manque 9, et éventuellement la dernière boîte contenant un objet de poids 4, qui pèse au moins 4+3+3, dans laquelle il manque au plus 2. On a donc $12|\vec{r}'| - 9 - 2 \leq (44/3)|\tilde{r}|$ qui donne $C = 11/12$.

Mais ce majorant ne peut être atteint. Supposons par exemple, que toutes les boîtes de $\tilde{r}$ pèsent 44/3, ce qui est a priori nécessaire pour atteindre le majorant. Alors il y a N boîtes de type $23/3 + 13/3$ dans $\vec{r}'$ et donc N boîtes de type $23/3 + 4 + 3$ et $N/2$ boîtes de type $2(13/3) + 3 + 3$ dans $\tilde{r}$. Donc N est pair et il y a $2N$ objets de poids 3, qui, puisque $2N$ est divisible par 4, se répartissent dans la dernière boîte, de poids 3, et $N/2 - 1$ boîtes de poids $3 + 3 + 3 + 3$ et une boîte de poids $4 + 3 + 3 + 3$, (et non pas $4 + 3 + 3$). Cet exemple correspond à $C = 2/3$.