Le théorème de Morley

Où l'on verra qu'un même énoncé peut avoir de très diverses démonstrations.

Dans le plan euclidien, on considère un triangle (ABC) de sens direct.
On désigne par 3 α, 3 β et 3 γ les mesures principales en ***degrés*** ($\in [0,180]$) de ses angles A, B, C. Les 2 trisectrices intérieures de chacun des angles déterminent un triangle (P Q R) tel que

BAR = RAQ = QAC = α
CBP = PBR = RBA = β
ACQ = QCP = PCB = γ

Le théorème de Morley, qui n'a été énoncé et démontré qu'en 1904, affirme que le triangle (PQR) est équilatéral.

<u>I Première démonstration (géométrique), due à Raoul Bricard (1922).</u>

1° Donner la valeur de $\alpha + \beta + \gamma$.
2 ° Soit P' le point d'intersection des droites (BR) et (CQ) . Que peut-on dire de la droite (P'P) pour l'angle BP'C ?
3 ° Définir de même les points Q' et R' et donner les propriétés correspondantes à celles de 1° .
4 ° On suppose dans un premier temps que le théorème est démontré, c'est à dire que (PQR) est équilatéral, et que de plus les droites (PP'), (QQ') et (RR') sont les trois bissectrices du triangle (PQR).
<u>4. a</u> Déterminer successivement les valeurs des angles BP'C, BPP' et BPR. En déduire sans nouveau calcul les valeurs de BRP, AQR, ARQ, CPQ, CQP.
<u>4. b</u> Reporter sur une grande figure soignée les mesures en degrés, en fonction de α, β ou γ (ou *exclusif*), de tous les angles des triangles (ABR), (BCP), (CAQ), (ARQ), (BPR), et (CQP) .

5° L'analyse angulaire de la figure étant faite, nous allons maintenant partir d'un triangle équilatéral ($P_1Q_1R_1$) tels que les angles des triangles ($A_1R_1Q_1$) , ($B_1P_1R_1$) et ($C_1P_1Q_1$) aient les mêmes mesures que celles que nous avons trouvées pour (ARQ), (BPR) et (CPQ) ci-dessus.
<u>5.a</u> Dans cette question, nous allons montrer un lemme. Les notations seront donc indépendantes du reste du problème.
Soit (ABC) un triangle d'angles A, B, et C, et soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures. Montrer que, en degrés, BIC = $\frac{A}{2}$ + 90°.
Réciproquement, on en déduit que si un point I' intérieur au triangle et situé sur la bissectrice intérieure issue de A vérifie BIC = $\frac{A}{2}$ + 90° alors I' = I.
<u>5.b</u> Soit P'_1 le point d'intersection de (B_1R_1) et (C_1Q_1). Montrer que le triangle ($P'_1R_1Q_1$) est isocèle et que la droite ($P_1P'_1$) est bissectrice intérieure de $B_1P'_1C_1$. Évaluer les mesures des angles $B_1P'_1C_1$ et $B_1P_1C_1$ en fonction de α et en déduire par le lemme 5.a que P_1 est situé sur les 3 bissectrices du triangle ($B_1P'_1C_1$).
<u>5.c</u> Mener jusqu'à son terme cette première démonstration du théorème de Morley.

<u>II Deuxième démonstration (trigonométrique), due à J. Bouteloup.</u>

Attention, les angles sont évalués en degrés !
On rappelle que si r est le rayon du cercle circonscrit au triangle (ABC),
$\frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{b}{\sin 3\beta} = \frac{c}{\sin 3\gamma} = 2r$ où $a = \text{BC},\ b = \text{AC},\ c = \text{AB}$.
(-> 2 points supplémentaires pour ceux qui démontreront ce résultat) .

1° En considérant le triangle (ABR) et en évaluant $\frac{\text{BR}}{c}$, montrer que BR = 2 r sin 3 γ $\frac{\sin\alpha}{\sin(60°-\gamma)}$.
2 ° Linéariser sin γ sin (60° - γ) sin (60° + γ), et en déduire une nouvelle expression de BR ; donner l'expression similaire de BP.

3° En déduire que $\dfrac{BR}{\sin(60°+\gamma)} = \dfrac{BP}{\sin(60°+\alpha)}$ = 8 r sin α sin γ.

4° En déduire que BRP = 60° + α et RPB = 60° + γ.

5° En déduire que PR = 8r sin α sin β sin γ.

6 Terminer cette deuxième démonstration du théorème de Morley.

III Troisième démonstration (de nouveau géométrique)

Il est conseillé de faire une grande figure. Désignons par (Bx) et (Bx') les 2 trisectrices intérieures de l'angle B (telles que (BC,Bx) = (Bx,Bx') = (Bx',BA) = β) et par (Cy) et (Cy') celles de l'angle C ((CA,Cy') = (Cy',Cy) = (Cy,CB)=γ).

P est le point d'intersection de (Bx) et (Cy) , P' celui de (Bx') et (Cy'). On a déjà démontré en I 1° que (P'P) est la bissectrice intérieure de BP'C. Soient Q_1 le point de [CP'] tel que Q_1PP' = 30° et R_1 le point de [BP'] tel que PP' R_1 = 30°.

1° Montrer que (PQ_1R_1) est équilatéral.

2° Soit S le point d'intersection de (PR_1) avec (Cy'). Montrer que R_1SP' = α . En déduire que A, S, R_1 et Q_1 sont cocycliques. Désignons par (Γ) le cercle qui joint ces points.

3° Soit T le symétrique de P par rapport à (Bx'). Montrer que T est à la fois sur (AB) et sur (Γ). En déduire que BAR_1 = α .

4° Mener jusqu'à son terme cette troisième démonstration du théorème de Morley (sans refaire intégralement des démonstrations similaires à celles que nous venons de faire).

IV Quatrième démonstration (complexe), due à J. Hoffmann.

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormal $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Soit E et F les points d'affixes respectives λ et μ distinctes et de module 1.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le point M d'affixe *z* appartienne à la droite (EF) est:

$$z+\bar{z}\lambda\mu=\lambda+\mu.$$

2. Soit (Γ) le cercle trigonométrique, α et β des nombres complexes de module 1 vérifiant:

$0 < \arg\ \alpha\ < 2/3$, $0 < \arg\beta\ < 2\pi/3 - \arg\alpha$,

et sur (Γ) les points A, B et C d'affixes respectives 1, α^3 et $\alpha^3\beta^3$.

On place alors sur (Γ) les points C_1, C_2, A_1, A_2, B_1, B_2 d'affixes respectives γ_1, γ_2, α_1, α_2, β_1, $\beta_{2\,1}$, α_2, β_1, β_2 tels

que:

$0 < \arg\gamma_1 < \arg\gamma_2 < \arg\alpha_1 < \arg\alpha_2 < \arg\beta_1 < \arg\beta_2 < 2\pi$

et

C_1 , C_2 (resp. A_1, A_2 , resp. B_1, B_2) partagent l'arc (AB) (resp. l'arc (BC), resp. l'arc (CA)) en trois arcs de même mesure.

Déterminer γ_1, γ_2, α_1, α_2, β_1, β_2 en fonction de α, β et j (j^3=1).

3. Déterminer
   - l'affixe *p* du point P d'intersection des droites (BB_1) et (CC_2),
   - l'affixe *q* du point Q d'intersection des droites (CC_1) et (AA_2),
   - l'affixe *r* du point R d'intersection des droites (AA_1) et (BB_2).
4. En déduire que le triangle PQR est équilatéral (direct).

5. Etendre le résultat obtenu à tout triangle *direct* A'B'C' du plan, puis à tout triangle quelconque.