

Vous connaissez le problème de la chaînette, forme prise par un fil pesant suspendu entre deux points fixes, dont la solution est la courbe du cosinus hyperbolique, et non une parabole comme le pensait Galilée ; une façon assez naturelle de généraliser ce problème est de se demander ce qu'il advient lorsque le fil est posé sur une surface, par exemple un collier autour du cou. C'est le géomètre Etienne Bobillier qui a posé et résolu ce problème en 1829 ; voici sa formulation dans les Annales de Gergonne (T. XX) :

*Quelle est la courbe à double courbure qu'affecte un fil pesant et homogène, parfaitement flexible et inextensible, d'une longueur déterminée, fixé, par ses deux extrémités, en deux points d'une surface courbe donnée quelconque et abandonné à l'action de la pesanteur sur cette surface, qu'on suppose n'exercer sur lui aucun frottement ? Quelle est la tension du fil, en un point quelconque de sa longueur ? Et quelle est la pression normale qu'il exerce sur la surface courbe, en ce même point ?*

Avant de passer à la résolution, un petit commentaire sur l'expression « abandonné sur la surface » : si la surface tourne constamment sa concavité vers le bas (ou vers le haut), on pourra bien concrètement « abandonner » la chaînette sur la surface, mais pas s'il y a changement de concavité : par exemple, un long collier posé sur une sphère va pendre dans le vide ; il vaudrait donc mieux voir cette chaînette comme un fil coincé (sans frottement) entre deux surfaces infiniment voisines.

#### RESOLUTION DU PROBLEME

La résolution que nous allons donner sera essentiellement celle de Bobillier, même si l'utilisation du calcul vectoriel va permettre de grandement simplifier les calculs.

Faisons le bilan des forces s'exerçant sur un élément de fil compris entre le point  $M$  et le point  $M + d\vec{M}$  ; il y a (cf. fig. 1)

- le poids  $\vec{P} = -\mu g ds \vec{k}$  où  $\mu$  est la masse linéique du fil (supposée constante)  $s$  l'abscisse curviligne, et  $g$  l'accélération de la pesanteur.  
 - Les deux tensions  $\vec{T}$  et  $-(\vec{T} + d\vec{T})$  exercées par le reste du fil en  $M$  et en  $M + d\vec{M}$ . On peut écrire  $\vec{T} = T \vec{t}_c$  où  $\vec{t}_c = \frac{d\vec{M}}{ds}$  est le vecteur unitaire tangent à la courbe.  
 - Enfin, seule force qui exprime que le fil est placé sur une surface, la réaction normale  $\vec{R}$  du support ; on peut écrire  $\vec{R} = \rho ds \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est le vecteur normal en  $M$  à la surface, et  $\rho$  est la *pression normale* dont parle Bobillier ci-dessus ;  $\rho$  est positif si la chaînette pèse sur la surface située de l'autre côté de  $\vec{n}$ . Notons qu'il s'agit ici d'une pression *linéique*, exprimée en N/m, et non *surfaccique*, comme

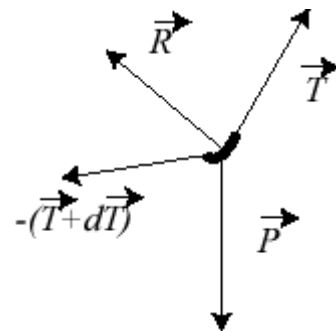


fig. 1

d'habitude.

La relation fondamentale de la statique nous donne, en écrivant que la somme des forces est

nulle, et en divisant par  $ds$  : (1)  $\frac{d(T\vec{t}_c)}{ds} - \mu g \vec{k} + \rho \vec{n} = \vec{0}$ , soit, en tenant compte de la

formule de Binet  $\frac{d\vec{t}_c}{ds} = \frac{\vec{n}_c}{R_c}$  où  $\vec{n}_c$  est le vecteur normal à la courbe et  $R_c$  son rayon de courbure :

$$(2) \quad \frac{dT}{ds} \vec{t}_c + \frac{T}{R_c} \vec{n}_c + \rho \vec{n} = \mu g \vec{k}$$

qui constitue l'équation intrinsèque de l'équilibre de la chaînette, et dont on va voir qu'elle contient la réponse aux 3 questions posées par Bobillier.

En multipliant scalairement par  $\vec{t}_c = \frac{d\vec{M}}{ds}$  on obtient :  $\frac{dT}{ds} = \mu g \vec{k} \cdot \vec{t}_c = \mu g \frac{dz}{ds}$ , où  $z$  est

l'altitude, d'où  $\frac{dT}{dz} = \mu g$ , et donc  $T = \mu g (z - z_0)$  ; réponse à la deuxième question posée : à condition de rapporter l'altitude à un point de départ où la tension est nulle (dont on verra qu'il ne correspond pas à un point réel de la courbe), la tension est proportionnelle à l'altitude.

Bobillier traduit cette relation sous la jolie forme :

*la différence des tensions en deux points quelconques de la chaînette est constamment égale au poids d'une portion de cette chaînette dont la longueur serait égale à la distance verticale entre ces deux points.*

Il fait aussi remarquer que si l'on remplace les tensions aux deux extrémités d'un arc quelconque de la chaînette par des prolongements de cette chaînette, d'une longueur suffisante, passant sur des poulies infiniment petites et pendant verticalement, ces deux prolongements devront se terminer inférieurement au même plan horizontal - plan  $z = z_0$  avec nos notations (fig.2)

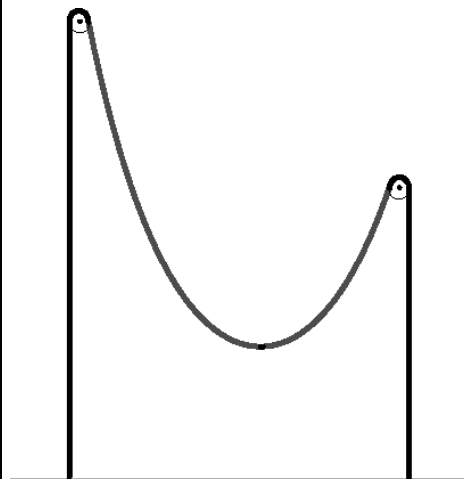


fig.2

Si maintenant, on reporte la valeur de  $T$  dans (1), on obtient  $\frac{d((z - z_0)\vec{t}_c)}{ds} - \vec{k} + \frac{\rho}{\mu g} \vec{n} = \vec{0}$ ,

dont on déduit

$$(3) \left( \frac{d}{ds} \left[ (z - z_0) \frac{\overline{dM}}{ds} \right] - \vec{k} \right) \wedge \vec{n} = \vec{0}$$

qui constitue l'équation différentielle de la courbe suivie par la chaînette : réponse à la première question. La relation  $\rho = \mu g \vec{k} \vec{n} - \frac{T}{R_c} \vec{n}_c \vec{n}$ , obtenue en multipliant (1) par  $\vec{n}$  répond enfin à la troisième question. D'après le théorème de Meusnier, cette dernière relation se met d'ailleurs sous la forme (4)  $\rho = \mu g \vec{k} \vec{n} - \frac{T}{R}$ , où  $R$  est le rayon de courbure algébrique de la section normale de la surface par un plan passant par la tangente à la courbe ( $R > 0$  si la surface tourne sa concavité vers  $\vec{n}$ ).

Avant de regarder des exemples, remarquons que  $\mu$  et  $g$  ont disparu de l'équation (3) : la forme de la chaînette ne dépend donc ni de sa masse, ni de l'intensité de la pesanteur : sur la lune par exemple, pas de différence ! Par contre, nous avons utilisé le fait que  $\mu$  et  $g$  sont non nuls : si l'un des deux l'est, la tension  $T$  est alors constante, et si on la suppose non nulle,

l'équation (3) se simplifie en  $\frac{d^2 \overline{M}}{ds^2} \wedge \vec{n} = \vec{0}$ , qui n'est autre que l'équation des *géodésiques* de la surface, les lignes de plus court chemin. Attention, le fait que la tension soit non nulle implique que le fil soit tendu ; sinon, en apesanteur, n'importe quelle courbe pourrait être position d'équilibre.

## CHAINETTES DE CYLINDRE VERTICAL

Commençons par tester nos formules avec une surface cylindrique d'axe vertical : le cas particulier du plan vertical doit nous redonner la chaînette habituelle.

Désignant par  $t$  le paramètre associé à la courbe, et posant  $\sigma = \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\overline{M}}{dt} \right\|$ , on a les relations

$$\begin{aligned} \sigma^3 \left( \frac{d}{ds} \left( (z - z_0) \frac{\overline{dM}}{ds} \right) - \vec{k} \right) &= \sigma^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{(z - z_0) \overline{M}'}{\sigma} \right] - \sigma^3 \vec{k} \\ &= (z - z_0) \sigma \overline{M}'' + (z' \sigma - (z - z_0) \sigma') \overline{M}' - \sigma^3 \vec{k} \end{aligned}$$

où les dérivées sont prises par rapport à  $t$ .

On obtiendra donc l'équation différentielle de la chaînette en exprimant que le vecteur  $(z - z_0) \sigma \overline{M}'' + (z' \sigma - (z - z_0) \sigma') \overline{M}' - \sigma^3 \vec{k}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{n}$  normal à la surface.

Ici, le problème étant invariant par translation verticale, on ne restreint pas la généralité en supposant  $z_0 = 0$ . Une courbe tracée sur le cylindre sera paramétrée sous la forme

$\overline{M} = N + z \vec{k}$  où  $N$  décrit une directrice horizontale du cylindre ; le problème est de trouver la fonction  $z$ .

Exprimons que le vecteur  $z \sigma \overline{M}'' + (z' \sigma - z \sigma') \overline{M}' - \sigma^3 \vec{k}$  a sa composante verticale nulle ;

les composantes verticales de  $\overline{M}'$  et  $\overline{M}''$  étant respectivement  $z' \vec{k}$  et  $z'' \vec{k}$ , on obtient

l'équation différentielle  $\sigma z z'' + (\sigma z' - z \sigma') z' - \sigma^3 = 0$ .

Si l'on choisit une paramétrisation normale de la directrice (i.e.  $\|\vec{N}'\| = 1$ , le paramètre  $t$  est alors égal à l'abscisse curviligne  $s$ ), on a  $\sigma^2 = \|\vec{N}' + z' \vec{k}\|^2 = 1 + z'^2$ , et l'équation différentielle devient, après multiplication par  $\sigma$  et simplification :

$$(E) \quad zz'' = 1 + z'^2.$$

Ce qui est remarquable, c'est que cette équation ne dépend pas de la directrice du cône : *la chaînette de cylindre vertical n'est autre qu'une chaînette de plan vertical enroulée* ; d'ailleurs, la solution de (E), avec condition initiale  $z'(0) = 0$  n'est autre que la chaînette

habituelle :  $z = a \operatorname{ch} \frac{s}{a}$ .

Voici, réalisées par Alain Esculier avec le logiciel Povray des chaînettes de cylindre de révolution vertical. J'ai accroché une chaînette métallique aux deux pointes de l'extrémité d'un tube de néon, et j'ai bien obtenu ce genre de figure.



fig. 3

## ENERGIE POTENTIELLE ET CALCUL DES VARIATIONS

Avant d'explorer d'autres exemples, nous allons reprendre le problème général en se plaçant cette fois d'un point de vue énergétique. On sait que l'équilibre d'un système correspond à un extremum de son énergie potentielle, ou tout au moins à un point critique, et que l'équilibre est stable pour un minimum, instable dans les autres cas. Ici, l'énergie potentielle de pesanteur du fil pesant entre un point  $A$  et un point  $B$  est l'intégrale de  $\mu ds g(z - z_0)$  de  $A$  à  $B$ , soit

$E_p = \mu g \int_A^B (z - z_0) ds$ . Il s'agit donc de déterminer les courbes réalisant les extremums de

cette intégrale ; nous entrons alors dans le domaine du *calcul des variations*, branche des mathématiques s'occupant de rechercher les objets rendant minimale ou maximale une certaine fonction de ces objets. Son point de départ a été le problème de la

« brachistochrone », courbe sur laquelle doit glisser un point matériel de façon à rendre minimal le temps pour se rendre d'un point à un autre, dont la solution est la cycloïde.

D'une façon générale, (voir [APPELL], p. 225 pour une démonstration), les courbes tracées sur une surface, joignant un point  $A$  à un point  $B$  et rendant extrémale une intégrale curviligne

$\int_A^B \varphi ds$  où  $\varphi$  est une fonction réelle quelconque (suffisamment régulière tout de même), sont

solutions de l'équation différentielle dite d'Euler-Lagrange s'écrivant :

$$(5) \quad \left( \frac{d}{ds} \left[ \varphi \frac{dM}{ds} \right] - \overline{\operatorname{grad} \varphi} \right) \wedge \vec{n} = \vec{0}.$$

Le lecteur aura certainement remarqué la similitude entre cette équation et l'équation (3) ci-dessus, et constaté que si l'on prend  $\varphi = z - z_0$ , elle se réduit bien à (3) puisque alors  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{k}$  : l'approche énergétique conduit bien aux mêmes équations.

Mais il est intéressant d'interpréter l'énergie potentielle  $E_p = \mu g \int_A^B (z - z_0) ds$  donnée ci-dessus. En effet  $E_p$  est en fait égale à  $\mu g L (z_G - z_0) = mg (z_G - z_0)$  où  $L$  est la longueur du fil entre  $A$  et  $B$ ,  $m$  sa masse et  $G$  son centre de gravité. Conclusion : *les chaînettes homogènes joignant un point  $A$  à un point  $B$  en équilibre stable (resp. instable) sont les courbes qui, pour une longueur donnée, rendent minimale (resp. maximale) l'altitude de leur centre de gravité (ou qui, pour un centre de gravité d'altitude donnée, ont une longueur minimale (resp. maximale).*

Remarquons en passant que si l'on prend comme fonction  $\varphi$  la fonction constante égale à 1 ; l'intégrale  $\int_A^B \varphi ds$  n'est alors autre que la longueur de l'arc  $AB$ , et en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange, on démontre ce que nous avons affirmé plus haut : la forme prise par un fil pesant tendu sur une surface en l'absence de gravité est une courbe minimisant les distances sur la surface, à savoir une géodésique.

D'autre part, il faut bien observer que la condition d'Euler-Lagrange donne des extremums locaux : cela signifie que pour un minimum, une légère déformation de la courbe ne peut que faire augmenter l'intégrale  $\int_A^B \varphi ds$  ; par exemple les géodésiques que l'on obtient sur un cylindre de révolution sont les hélices circulaires ou les génératrices de ce cylindre ; or tout le monde remarquera que pour aller d'un point à un autre d'une génératrice, il est plus court d'emprunter la génératrice plutôt que de faire des tours avec une hélice. Dans le cas des chaînettes, imaginons une surface présentant une crête avec un versant beaucoup plus pentu que l'autre ; suspendons à partir de deux points de la crête deux chaînettes de même longueur, dans chacun des deux versants : l'une aura un centre de gravité strictement plus bas que l'autre, et pourtant toutes deux seront solution de l'équation d'Euler-Lagrange.

Nous allons maintenant continuer notre exploration des chaînettes avec divers exemples qui ont été étudiés par les mathématiciens car l'équation différentielle se résout, tout au moins à l'aide de fonctions elliptiques.

## CHAINETTES SPHERIQUES

Avec les moyens de calculs actuels, l'équation du deuxième ordre (3) est l'idéal pour tracer des chaînettes, bien mieux que la forme intégrée, qui oblige à fixer certains paramètres : on entre la paramétrisation de la surface, l'équation avec la position et la vitesse initiales, et le logiciel nous donne la trajectoire correspondante

Voici donc tout d'abord diverses chaînettes sphériques que j'ai obtenues par intégration numérique, en choisissant empiriquement les conditions initiales et la valeur de  $z_0$ , de façon à ce que la courbe soit fermée (ou tout au moins, donne l'impression de l'être) :

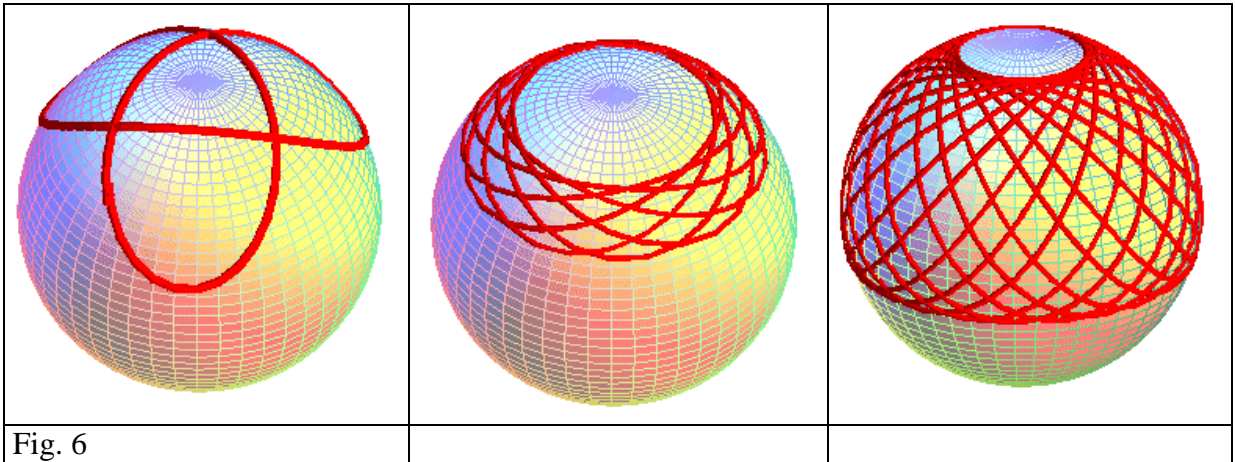


Fig. 6

Je ne sais pas si ces courbes correspondent à des équilibre stables ou instables (autrement dit, si l'on déforme légèrement la courbe, le centre de gravité va-t-il monter (cas stable) ou descendre (cas instable, la chaînette va alors tomber). Si un lecteur a des idées, qu'il m'écrive !

Mais on peut dans ce cas intégrer l'équation différentielle ; en coordonnées cylindriques,

l'intégrale première s'écrit simplement  $(z - z_0) r^2 \frac{d\theta}{ds} = cte$ , ce qui donne en prenant une

sphère de rayon 1 :  $\frac{d\theta}{dz} = \frac{k}{(1 - z^2) \sqrt{P(z)}}$  où  $P(z) = (z - z_0)^2 (1 - z^2) - k^2$ . Cette forme montre

bien comme cela se voit sur les figures, que la courbe est formée d'un motif simple allant de l'altitude  $z_1$  à l'altitude  $z_2$  (l'intervalle  $[z_1, z_2]$  étant celui où  $P$  est  $\geq 0$ ), qui se reproduit par isométries.

La pression normale  $\rho$  de la chaînette sur la sphère se calcule ici aisément par la formule (4) :

$$\rho = \mu g z + \mu g (z - z_0) = 2\mu g \left( z - \frac{z_0}{2} \right) \text{ (en orientant le vecteur } \vec{n} \text{ vers l'extérieur de la sphère,}$$

auquel cas  $R = -1$  !); la chaînette appuie donc sur la sphère intérieure pour  $z > \frac{z_0}{2}$  et

extérieure pour  $z < \frac{z_0}{2}$ .

Une dernière pour la route, réalisée par Alain Esculier.



fig. 7

### CHAINETTES CONIQUES

Pour un cône de révolution d'axe vertical, voici quelques élégantes chaînettes obtenues numériquement :

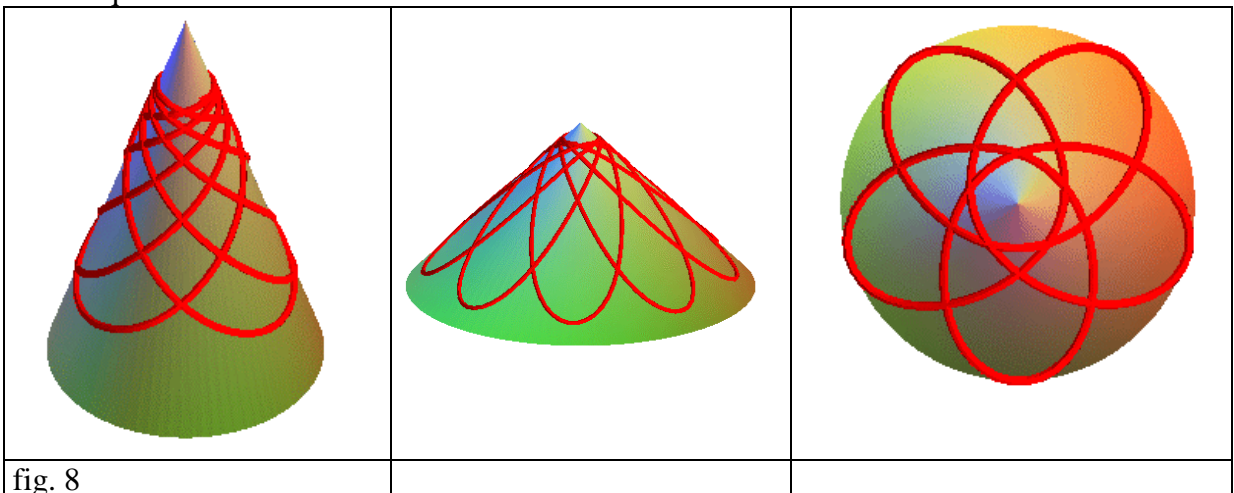


fig. 8

On obtient de nouveau en général, comme dans le cas sphérique, des courbes formées d'une suite d'ondulations joignant alternativement deux parallèles.

Si l'on prend cependant  $z_0 = 0$ , l'équation différentielle se simplifie fortement, et l'on montre que la courbe correspondante est cette fois une courbe qui se développe en une hyperbole. Etrange cas d'une courbe qui est tracée sur un cône, qui se développe en une conique, mais qui n'est pas elle-même une conique, puisqu'elle est non plane !

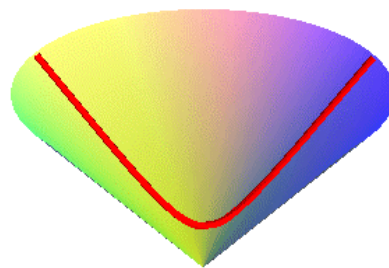


fig. 9

Pour terminer, regardons les chaînettes de cylindre de révolution horizontal.

On obtient une courbe en forme de sinusoïde courbée oscillant autour du faîte ou de la ligne de base.

Pour le faîte, l'équilibre n'est stable que si l'on prend une portion inférieure à une période : faites l'expérience !

On obtient une courbe en forme de sinusoïde courbée oscillant autour du faîte ou de la ligne de base, ou bien une courbe en hélice autour du cylindre. Le seul cas de courbe fermée est celui des cercles

verticaux.

Pour le faîte, l'équilibre n'est stable que si l'on prend une portion inférieure à une période.

Ci-contre, seule la courbe verte est en équilibre stable ; la courbe rouge va tomber d'un côté ou de l'autre.

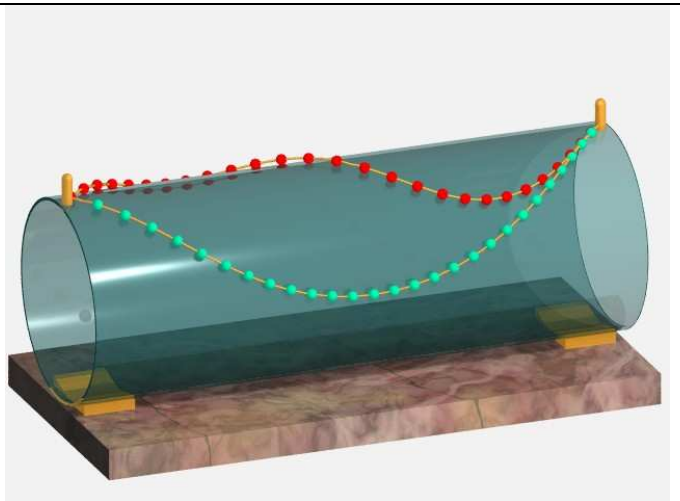


fig. 4

Voici le résultat d'une expérience réelle montrant bien l'allure sinusoïdale de la courbe.

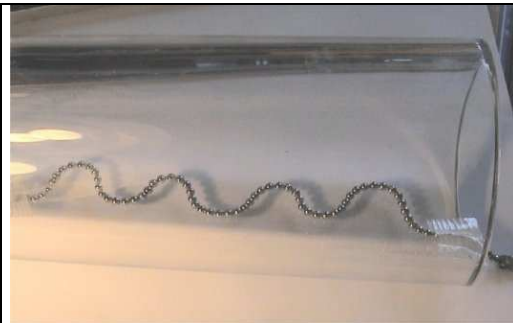


fig. 5

Le sujet est riche : il resterait à examiner plus en détail les problèmes de stabilité évoqués ci-dessus, ainsi que les problème d'existence d'une chaînette de longueur donnée passant par deux points donné. A vous lecteur !

Merci à Pascal Brasselet pour ses conseils judicieux.

Bibliographie :

[APPELL] Paul Émile Appell, Traité de mécanique rationnelle, réédité par J. Gabay, accessible sur le serveur de la bibliothèque nationale :

<http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-29089>