QUESTIONS DE COURS D'ANALYSE (PCSI)

I FONCTIONS USUELLES

0) Démontrer $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$ dans $\mathbb{R}$.
1) Montrer la formule $\cos(a-b) = ...$, et en déduire $\cos(a+b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$.
2) Comment calculer $\tan(x/2)$ connaissant $\cos x$ et $\sin x$? Appliquer à $\tan\pi/8$ et $\tan\pi/12$.
3) Exprimer $\cos x, \sin x, \tan x$ en fonction de $t = \tan\dfrac{x}{2}$.
4) Formules de linéarisation ; application à $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$.
5) Formules $\cos p \pm \cos q$, $\sin p \pm \sin q$, $a\cos x + b\sin x$.
6) Calculer $\cos\pi/5$.
7) Montrer $|u| \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin u| \leq |u|$ et en déduire les continuités de sin et cos.
8) Montrer que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$.
9) Sachant 8), déterminer la dérivée de la fonction cos puis en déduire celle de sin.
10) Réduire l'intervalle d'étude de la fonction sin, de la fonction tan.
11) Déterminer une transformation géométrique faisant passer de $C_{\cos}$ à $C_{\sin}$ et de $C_{\tan}$ à $C_{\cot}$.
12) Calculer $C = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\theta + k\varphi)$ en multipliant cette expression par $\sin\frac{\varphi}{2}$.
13) Calculer $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(\theta + k\varphi)$ en multipliant cette expression par $\sin\frac{\varphi}{2}$.
14) 15) 16) Définition et étude d'arcsin, arccos, arctan.
17) Montrer que $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.
18) Montrer que $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = signe(x).\dfrac{\pi}{2}$.
19) Montrer que $xy < 1 \Rightarrow \arctan x + \arctan y = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.
20) Montrer $\begin{cases} \forall a,b > 0 \quad f(ab) = f(a) + f(b) \\ f \text{ dérivable sur }]0,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad f = k\ln,$
où $\ln x = \int_1^x \dfrac{dt}{t}$.
21) Montrer $\ln ab = \ln a + \ln b \ \forall a,b > 0$.
22) Montrer $\ln x^r = r\ln x \quad \forall x > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$.
23) Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
24) Montrer que $\ln x \leqslant x - 1$.
25) En déduire $\ln x \leqslant 2(\sqrt{x} - 1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; interprétation géométrique ?
25 bis) Montrer que $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ et $\exp rx = (\exp x)^r \quad \forall x,y \quad \forall r \in \mathbb{Q}$.
26) Donner les définitions du symbole a^b, et montrer : $\begin{cases} a^{b+c} = a^b a^c \ (a > 0) \\ a^{bc} = (a^b)^c \ (a > 0) \end{cases}$.
27) Étudier et tracer les courbes des diverses fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ sur $]0,+\infty[$.
28) Sachant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$.
29) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
30) Montrer $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$,
et $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$.
31) 32) 33) Étudier les fonctions ch, sh, th.
34) Montrer : $\forall x,y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad x = \cos t, y = \sin t$ et
$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad x = \pm\mathrm{ch}\,t, y = \mathrm{sh}\,t$.
Application aux équations paramétriques de l'ellipse et de l'hyperbole.

35) Déterminer les dérivées des fonctions argsh, argch, argth.

36) Exprimer arg sinh(y) en fonction d'y.
37) Exprimer arg cosh(y) en fonction d'y.
38) Exprimer arg coth(y) en fonction d'y.

II SUITES

1) Écrire : (u_n) est croissante à partir d'un certain rang ; (u_n) n'est croissante (resp. monotone) à partir d'aucun rang. Donner des exemples.

2) Donner un exemple de suite $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) ni majorée, ni minorée.} \\ \text{b) non majorée et croissante partir d'aucun rang.} \end{array} \right.$,

en précisant bien les définitions utilisées.

3) Étudier les sens de variation de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right)_{n \geqslant 1}$ et de $\left(\frac{n^{100}}{(1,1)^n} \right)_{n \geqslant 0}$.

4) Étudier les sens de variation de $\left(\frac{n!}{n^n} \right)$ et $\left(\frac{(2n)!}{n^n} \right)$.

5) Étudier le sens de variation d'une suite récurrente $u_n = f(u_{n-1})$ lorsque $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est croissante sur I, $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$.

6) Comme 5) avec f décroissante (5) peut être supposé connu).

7) Donner 3 définitions des suites arithmétiques et montrer leur équivalence.

$$\left(\begin{array}{c} \exists r \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1}), \ \exists a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = an + b \end{array} \right)$$

8) Calcul de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, géométrique.

9) Calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique ($u_n = au_{n-1} + b$).

10) Récurrences linéaires doubles : ($u_0 = \alpha, u_1 = \beta, u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$).

Énoncer (sans preuve) les résultats, dans le cas complexe puis dans le cas réel (en expliquant d'où vient l'équation caractéristique).

11) R.L.D. : montrer que

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists A, B \in \mathbb{C} \quad \forall n \quad u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n.$$

12) R.L.D. : montrer que

$$\Delta = 0 \Rightarrow \exists A, B \in \mathbb{C} \quad \forall n \quad u_n = An\lambda^n + B\lambda^n.$$

13) R.L.D. (cas réel).

Montrer que

$$\Delta < 0, \lambda = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \exists C, D \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad u_n = \rho^n (C \cos n\theta + D \sin n\theta).$$

11 bis) R. L. D. : montrer que si λ est solution de l'équation caractéristique (E) : $\lambda^2 = a\lambda + b$, la suite $(u_n - \lambda u_{n-1})$ est géométrique de raison $a - \lambda$.

12 bis) Dans le cas où (E) a deux solutions distinctes, calculer le terme général u_n en utilisant les deux suites géométriques $(u_n - \lambda_1 u_{n-1})$ et $(u_n - \lambda_2 u_{n-1})$.

13 bis) Dans le cas où (E) a une solution double $\lambda \neq 0$, montrer qu'$\left(\frac{u_n}{\lambda^n} \right)$ est arithmétique et en déduire u_n.

14) (suites réelles)

Montrer $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geqslant n_0 \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim u_n = \lim w_n = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim v_n = 0$ (gendarmes).

15) (suites complexes) Montrer : $\lim u_n = \lim v_n = 0 \Rightarrow \lim(u_n + v_n) = 0$.

16) Montrer $\begin{cases} (u_n) \text{ bornée} \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n v_n) = 0$.

17) Prouver l'unicité de la limite finie d'une suite.

18) (suites réelles) : conservation des inégalités larges par passage à la limite.

19) Montrer qu'une suite convergente est bornée.

20) Montrer (en utilisant les propriétés ci-dessus) que la somme et le produit de suites convergentes est une suite convergente.

21) Montrer que si $\lim u_n = l \neq 0 (\in \mathbb{C})$, alors il existe n_1 tel que $u_n \neq 0$ pour $n \geq n_1$ et $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_1}$ est bornée, puis que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

22) Montrer que toute sous-suite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.

23) (suites réelles) Montrer que si $\lim u_n = +\infty$ et (v_n) est minorée, alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

24) (suites réelles) Montrer que si $\lim u_n = +\infty$ et $v_n \geqslant \lambda > 0$, alors $\lim(u_n v_n) = +\infty$. Donner un contre-exemple avec $v_n > 0$.

25) Facultatif : montrer qu'une suite réelle est non majorée si et seulement si elle possède une sous-suite tendant vers $+\infty$.

25) On sait que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n,k} = 0$; que dire des suites :
$v_n = \sum\limits_{k=1}^{p} u_{n,k}$ (p fixé) , et $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n,k}$?

26) Montrer : (u_n) croissante majorée $\Rightarrow$ (u_n)convergente.

27) Montrer : (u_n) croissante non majorée $\Rightarrow$ $\lim u_n = +\infty$.

28) Donner un exemple de suite de limite $+\infty$ qui n'est croissante à partir d'aucun rang (avec preuve).

29) $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; montrer que (h_n) est divergente.

30) Montrer que $\forall n \geqslant 1 \quad \ln n \leq h_n \leq \ln n + 1$.

31) Donner trois exemples de suites divergentes vérifiant $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ (avec preuves).

32) $q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que (q_n) est convergente.

33) Définir la notion de suites adjacentes, et montrer qu'elles convergent vers la même limite.

34) Facultatif : Application des suites adjacentes : montrer que si A est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, entre deux réels, il existe toujours un réel qui n'appartient pas à A (autrement dit : une partie dénombrable est de complémentaire dense ; $\mathbb{R}$ n'est donc pas dénombrable).

35) Facultatif : démontrer que toute suite bornée possède une sous-suite convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass).

36) $e_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \; e'_n = e_n + \frac{1}{nn!}$; montrer que (e_n)et (e'_n) sont adjacentes.

37) En admettant 36) et $\lim e_n = e$, montrer que e est irrationnel.

38) Montrer la transitivité de $<<$; traduction en termes de "petits o" ?

39) Montrer que si $\lim(u_n) = l$, $\lim(u_n + o(u_n)) = l$.

40) Montrer : $o(u_n v_n) = u_n o(v_n)$, $u_n o(v_n) = o(u_n v_n)$, $o(\lambda u_n) = o(u_n)$, $\lambda o(u_n) = o(u_n)$, $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$.

41) Montrer : $\alpha < \beta \Rightarrow n^\alpha (\ln n)^\gamma << n^\beta (\ln n)^\delta \quad \forall \gamma, \delta$.

41) bis Montrer : si (u_n) est à termes > 0 et si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$.

42) Montrer $n^\alpha << a^n \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall a, |a| > 1$.

43) Montrer $a^n << n! \quad \forall a > 1$.

44) Montrer $n! << n^n$.

45) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des suites complexes ;

montrer la compatibilité de cette relation avec la multiplication et les fonctions puissance.

46) Donner un exemple où $\begin{cases} u_n \sim u'_n \\ v_n \sim v'_n \end{cases}$ et $u_n + v_n \nsim u'_n + v'_n$, un exemple où $u_n \sim v_n$ et $f(u_n) \nsim f(v_n)$, un exemple où $u_n \sim v_n$ et $(u_n)^{\alpha_n} \nsim (v_n)^{\alpha_n}$.

47) Montrer que s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u_n \sim \lambda v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$, mais que la réciproque est fausse.

III FONCTIONS NUMÉRIQUES : continuité, limites.

2) Montrer qu'il y a identité entre les intervalles et les convexes de $\overline{\mathbb{R}}$.

3) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

4) Structure de l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions réelles définies sur I muni de l'addition et de la multiplication (anneau commutatif non intègre).

5) Montrer que l'ensemble des périodes d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

6) Donner les définitions des fonctions numériques (strictement) (dé)croissantes, constantes, injectives, lipschitziennes sur un intervalle en utilisant le taux d'accroissement.

7) Démontrer à l'aide de la définition des limites que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

8) Montrer que si pour toute suite (u_n) d'éléments de l'ensemble de définition de f convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ a pour limite l, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

(fait en cours uniquement pour x_0 et l finis)

9) Donner un exemple de fonction définie au voisinage de 0 n'ayant de limite stricte ni à droite ni à gauche en 0.

10) Montrer que si lorsque x tend vers x_0, $f(x) \sim g(x)$, alors $o(f(x)) = o(g(x))$ et que, lorsque x tend vers x_0, $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.

11) Montrer que $\lambda o(f(x)) + \mu o(f(x)) = o(f(x))$ et que $o(o(f(x)) = o(f(x))$.

12) Montrer que si $\alpha < \beta$, $x^\alpha(\ln(x))^\gamma << x^\beta(\ln(x))^\delta$ quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la relation similaire en 0.

13) Sachant que $\sin x \sim x$ quand x tend vers 0, montrer que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

14) Connaissant les développements limités à l'ordre 1 quand x tend vers 0 de e^x et de $ln(1+x)$, en déduire celui de $(1+x)^a$.

15) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+4} - \sqrt[3]{3x+8}}{\sqrt{x+1} - 1}$.

16) Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur I est continue sur I et montrer que la réciproque est fausse.

17) Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont lipschitziennes sur $[\varepsilon,+\infty[$ $(\varepsilon > 0)$, et que $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur $[-A,A]$.

18) Montrer le lemme de Bolzano (annulation d'une fonction continue qui change de signe).

19) En déduire le théorème des valeurs intermédiaires.

20) En déduire que si f est continue sur un intervalle I, $f(I)$ est un intervalle et que donc si $\alpha = \inf\limits_{x\in I} f(x)$ et $\beta = \sup\limits_{x\in I} f(x)$, $f(I) = [\alpha,\beta], [\alpha,\beta[,]\alpha,\beta]$ ou $]\alpha,\beta[$.

21) Montrer que tout réel $\geqslant 0$ possède une unique racine carrée $\geqslant 0$, que tout réel possède une unique racine cubique et que, plus généralement, toute fonction polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

22) Montrer que si I est ouvert, les 4 possibilités du 20) peuvent arriver, mais énoncer ce qui se passe lorsque f est strictement monotone sur I, ou lorsque I est un segment (théorème de Weierstrass).

23) Facultatif : démontrer le théorème de Weiertstrass.

24) Montrer qu'une fonction croissante sur $]x_0 - \alpha_0, x_0]$ admet une limite stricte à gauche en x_0. (Le théorème de la limite monotone étant qu'une fonction monotone sur une partie de $\mathbb{R}$

admet une limite stricte à gauche et à droite en tout point adhérent à cette partie).

25) Montrer qu'une fonction continue, injective (i.e. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$) sur un intervalle I, y est strictement monotone.

26) Montrer qu'une fonction croissante sur un intervalle ouvert I telle que $f(I)$ soit un intervalle est continue sur I (le théorème général étant qu'une fonction monotone sur une partie quelconque I telle que $f(I)$ soit un intervalle est continue sur I).

27) En déduire que la fonction réciproque d'une fonction f continue strictement monotone sur un intervalle I est continue sur $f(I)$.

IV FONCTIONS NUMÉRIQUES : DÉRIVATION

1) Montrer la dérivabilité de la somme et du produit de deux fonctions dérivables.

2) Montrer la dérivabilité de l'inverse d'une fonction dérivable, de la composée de deux fonctions dérivables (uniquement dans le cas de $u \circ v$, $v(x) \neq v(x_0)$ si $x \neq x_0$).

3) (Petite règle de L'Hospital). Montrer que si f et g sont dérivables et nulles en x_0, g non nulle au voisinage pointé de x_0, $g'(x_0) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

4) Montrer que si f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$, alors $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$.

5) Idem en supposant seulement f continue. On énoncera les 4 étapes de la démonstration et en démontrera 2.

6) En utilisant 5) déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)f(y)$ et les fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad f(xy) = f(x) + f(y)$.

7) Montrer que la fonction

$$\begin{cases} x \neq 0 \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x} \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (sans avoir recours au théorème de la limite de la dérivée).

8) Montrer que la fonction

$$\begin{cases} x \neq 0 \longmapsto x^2 \sin(\frac{1}{x}) \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0 (autrement dit que cette fonction n'est pas de classe C^1).

9) Somme, produit de deux fonctions $\mathcal{C}^k$.

10) Formule de Leibniz.

11) Inverse d'une fonction $\mathcal{C}^k$.

12) Composée de 2 fonctions $\mathcal{C}^k$.

13) Dérivabilité d'une fonction réciproque.

14) Fonction réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

15) Montrer que si f est définie au voisinage de x_0, dérivable en x_0 et extrémale en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

16) Théorème de Rolle.

17) Montrer que si une fonction n fois dérivable sur un intervalle y possède $n+1$ racines, sa dérivée n-ième y possède au moins une racine.

18) Soit f une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, q la somme des ordres de ses racines réelles et q' la somme des ordres des racines réelles de f'. Montrer que $q' \geqslant q-1$.

19) Théorème des accroissements finis.

20) Inégalités des accroissements finis.

21) Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle I, dérivable sur $I \setminus \{\text{bornes de } I\}$, est croissante (resp. constante) sur I ssi sa dérivée y est $\geqslant 0$ (resp. $= 0$). Donner des ctre-exemples si I

n'est pas un intervalle.

22) Donner et démontrer (sachant 19)) une CNS pour qu'une fonction continue sur un intervalle I, dérivable sur $I \setminus \{$bornes de $I\}$, soit strictement croissante sur I.

23) Montrer qu'une fonction à dérivée bornée sur I est lipschitzienne sur I.

24) Théorème du passage à la limite dans la dérivée : montrer que si f est continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$, et si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$, alors $f'(x_0) = l$.

25) Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré $\leqslant n$ prenant la même valeur en x_0 qu'une fonction f, ainsi que ses n dérivées successives (noté $T_{(n,f,x_0)}$).

26) Déterminer $T_{(n,f,0)}(x)$ pour f = exp, cos, sin, ch, sh, $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

27) Montrer que $T'_{(n,f,x_0)} = T_{(n-1,f',x_0)}$.

28) Déterminer $T_{(n,f,0)}(x)$ pour $f(x) = \ln(1+x)$ en utilisant 27).

29) Montrer que pour $f(x) = 1/\sqrt{(1+x)}$, $T_{(n,f,0)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}}{2^{2k}} x^k$.

30) Démontrer le théorème de TAYLOR-YOUNG pour une fonction g vérifiant $g^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0,..,n$.

31) Montrer que le cas général (pour une fonction n fois dérivable en x_0) se ramène au cas précédent.

32) Énoncer les développements limités polynomiaux de e^x, ch x, sh x, sin x, cos x, $\dfrac{1}{1+x}$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $(1+x)^{\alpha}$, $\dfrac{1}{(1-x)^{\alpha}}$ à l'ordre n en 0.

33) Retrouver le D L P de $\dfrac{1}{1-x}$ en 0 par une méthode directe.

34) Preuve de l'unicité du développement limité polynomial à l'ordre n en x_0.

35) Parité du DLP en rapport avec celle de la fonction.

36) Déterminer le développement limité à l'ordre $2p+1$ en 0 de $1/(1+x^2)$ et en déduire celui d'arctan à l'ordre $2p+2$.

37) Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de $1/\sqrt{(1-x^2)}$ et en déduire celui d'arcsin à l'ordre 8.

38) Déterminer les développements limités polynomiaux de tan et th en 0 à l'ordre 5.

39) Déterminer des développements généralisés limités à trois termes de cot x et coth x en 0.

40) Déterminer des développements généralisés limités à trois termes de $\sqrt{x+1}$ et $\ln(x+1)$ en l'infini.

41) Montrer que $\arccos(1-x) = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{2x}}{2}$ $(x \geqslant 0)$ et en déduire un développement limité généralisé à trois termes de $\arccos(1-x)$ en 0 et que $x \mapsto \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x}}$ admet des DLP à tout ordre en 0.

42) Donner des exemples de fonction dont la courbe admet :

a) une direction asymptotique (horizontale, oblique, verticale) mais pas d'asymptote (en précisant bien les définitions correspondantes).

b) une branche infinie sans direction asymptotique.

43) Dessiner une allure possible des courbes correspondant aux situations suivantes.

a) au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$, $f(x) = 1 - x - x^2 + o(x^2)$, $f(x) = 1 - \sqrt{x} - x + o(x)$.

b) au voisinage de $+\infty$: $f(x) = -x - 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x) = -x + \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$, $f(x) = \sqrt{x} - 2 + o(1)$.

44) Montrer la formule d'interpolation linéaire : étant donnés $a < x_0 < b$ trois réels fixés et f une fonction numérique de classe C^1 sur $[a,b]$, 2 fois dérivable sur $]a,b[$, montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que : $f(x_0) = g(x_0) - \dfrac{(x_0-a)(b-x_0)}{2} f''(c)$, où g est l'unique fonction affine prenant les mêmes valeur que f en a et en b.

45) Montrer en utilisant 44) que si f est une fonction C^2 de dérivée croissante sur un intervalle I, alors , pour tout $a < b$ de I :

$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ pour tout t dans $[0,1]$.

V FONCTIONS NUMÉRIQUES : INTÉGRATION

1) Donner un exemple de fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$, qui n'est pas C^1 par morceaux ; donner un exemple de fonction non continue par morceaux sur $[a,b]$.

2) Montrer qu'une fonction continue par morceaux sur un segment (CM) est bornée et atteint ses bornes.

3) Pour une fonction bornée sur un segment, donner les définitions des intégrales inférieures et supérieures $I^-(f)$ et $I^+(f)$ et montrer que pour une fonction croissante $I^-(f) = I^+(f)$.

4) Positivité et croissance de l'intégrale des fonctions continues par morceaux.

5) Montrer que si f est continue positive ou nulle sur $[a,b]$ $(a \neq b)$ et non nulle en au moins un point de $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

6) En déduire que si f est de signe constant et continue sur $[a,b]$ $(a \neq b)$ d'intégrale nulle, alors elle est nulle en tout point de $[a,b]$; donner un contre-exemple dans les cas où l'on supprime l'une des deux hypothèses "de signe constant" et "continue" ; application à la croissance stricte de l'intégrale des fonctions continues sur un segment non réduit à un point.

7) Inégalité de la moyenne (pondérée) : $\left|\int_a^b fg\right| \leq \sup_{[a,b]}|f| \int_{[a,b]}|g|$ (d'où l'inégalité triangulaire $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_{[a,b]}|f|$ et l'inégalité de la moyenne (simple) : $\left|\int_a^b f\right| \leq |b-a| \ \sup_{[a,b]}|f|$).

8) Montrer que si f est CM sur I et $x_0 \in I$ la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est continue sur I.

9) Avec les notations du 8), montrer que si $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = l,$ alors $F'_d(x_0) = l.$

10) En déduire que toute fonction continue sur un intervalle y possède une primitive et montrer qu'elle possède une unique primitive prenant une valeur donnée en un point donné.

11) Montrer que si F est une primitive d'une fonction continue sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{def}}{=} [F(x)]_a^b$.

12) Dérivée de $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ (préciser les hypothèses).

13) Montrer que si u et v sont C^1 sur un intervalle I, $\int udv = uv - \int vdu$, en explicitant ces notations (calculer par exemple $\int \ln(x)dx$, $\int \arctan(x)dx$ et $\int xe^x dx$), puis que si u et v sont C^1 sur $[a,b]$, $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

14) Montrer que si u est C^1 sur I et f continue sur $u(I)$, alors $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$, en explicitant ces notations (calculer par exemple $\int \sin^3(x)dx$ et $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$), puis que si u est C^1 sur $[a,b]$ et f continue sur $u([a,b])$, alors $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$ (il a été admis que cette dernière relation est encore valable pour f CM).

15) En déduire que si f est CM sur $\mathbb{R}$,

- si f est paire, $\int_{-b}^{-a} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ et $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- si f est impaire, $\int_{-b}^{-a} f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
- si f est T-périodique, $\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de a.

16) Montrer, en intégrant par parties son reste $\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$, la formule de Taylor avec

reste intégral.

17) Déduire de cette formule l'inégalité de Taylor-Lagrange.

18) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

19) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

20) Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad \ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$.

21) Déterminer $\int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \frac{dx}{\cos x}$, $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$ et $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

22) Déterminer $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ et $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$.

23) Déterminer $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ ($a > |b| > 0$, poser $t = \tan \frac{x}{2}$) ; en déduire la moyenne sur une période de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a+b\cos x}$.

24) Donner la définition des sommes de Riemann d'une fonction CM sur un segment et énoncer le théorème correspondant (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision de pas $< \alpha$ la différence entre l'intégrale et toute somme de Riemann associée à la subdivision est majorée par ε en valeur absolue).

25) 24) étant connu, donner, pour f CM sur $[0,1]$, un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

26) Donner la valeur de l'intégrale approchée par la méthode des trapèzes sur un intervalle découpé en n intervalles de mêmes longueur et, admettant que si f est C^2 sur $[\alpha,\beta]$, $\left|\int_\alpha^\beta f - \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} \max_{[\alpha,\beta]} |f''|$ en déduire, une majoration de l'erreur.

VI ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1) Montrer qu'on obtient la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation homogène associée.

2) Résoudre l'e. d. l. du 1er ordre homogène : $a(x)y' + b(x)y = 0$ (hypothèses sur a et b ?) sur un intervalle où la fonction a ne s'annule pas.

3) Présenter la méthode de variation de la constante.

4) Enoncer sans démonstration les résultats concernant les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (a,b,c réels, $a \neq 0$)

5) Résoudre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'équation différentielle de 4) dans les cas où l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes.

6) Résoudre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'équation différentielle de 4) dans les cas où l'équation caractéristique possède une solution double.

5) bis Enoncer sans démonstration l'expression des solutions de l'équation $y'' = ky$ dans les divers cas, et montrer qu'on peut toujours ramener l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (a,b,c réels, $a \neq 0$) à ce cas particulier.

6) bis Connaissant les résultats de l'équation $y'' = ky$, résoudre l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ (a,b,c réels, $a \neq 0$), en posant $y = e^{-\frac{b}{2a}x}z$.

7) Résoudre et discuter l'équation différentielle : $x'' + \omega_0^2\, x = \cos(\omega t)$ ($\omega_0, \omega > 0$) en utilisant les résultats du cours.

VII FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

1) Montrer que $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que les normes $\|\ .\ \|_1, \|\ .\ \|_2$ et $\|\ .\ \|_\infty$ sont équivalentes.

3) Montrer que l'intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, mais que l'intersection d'une infinité d'ouverts peut ne pas être ouverte.

4) Montrer que la fonction $(x,y) \to \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ possède une limite nulle dans toutes les directions en (0,0) mais qu'elle ne possède pas de limite globale en (0,0).

5) Définition de la dérivée suivant un vecteur $\vec{u}$ en un point (x_0,y_0) d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ (notée $D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)$) ; vérifier $D_{\lambda\vec{u}}f(x_0,y_0) = \lambda D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)$;

définition des deux dérivées partielles : $D_1f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $D_2f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Interprétation de ces deux dernières comme dérivées suivant $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$.

6) Définition des fonctions de classe C^1 sur un ouvert U (pour tout $\vec{u}$, $(x,y) \mapsto D_{\vec{u}}f(x,y)$ est continue sur U) et énoncé du théorème fondamental : si les dérivées partielles sont continues sur U, f admet une dérivée suivant tout vecteur en tout point de U et
$D_{(dx,dy)}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$. En déduire que f est de classe C^1 sur U et que $\vec{u} \mapsto D_{\vec{u}}f(x,y)$ est linéaire ; donner le nom de cette dernière.

7) Donner la définition d'un développement limité à l'ordre 1 en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ et donner (sans démonstration) la forme de ce DL pour une fonction de classe C^1 sur un ouvert U.

8) Déterminer la dérivée d'une fonction g définie par $g(x) = f(u(x),v(x))$.

9) En déduire les dérivées partielles d'une fonction g définie par $g(x,y) = f(u(x,y),v(x,y))$.

10) Montrer que si une fonction de classe C^1 sur un ouvert U présente un extremum en un point de U, sa différentielle est nulle en ce point. Donner un exemple de point à différentielle nulle ne correspondant pas à un extremum. Donner un exemple montrant que la propriété est fausse si l'on ne suppose pas U ouvert.